

1.1. Ukažte, že libovolná dvakrát derivovatelná funkce $\mathcal{Y}$ argumentu $(t - \frac{x}{v})$ nebo $(t + \frac{x}{v})$ je řešením vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial t^2} \quad (1)$$

1.2. Ukažte, že libovolná dvakrát derivovatelná funkce $\mathcal{Y}$ argumentu $(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v})$ nebo $(t + \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v})$ je řešením vlnové rovnice

$$\Delta \mathcal{Y} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial t^2} \quad (2)$$

$\vec{r} \equiv (x, y, z)$ je polohový vektor a $\vec{s} \equiv (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ je libovolný jednotkový vektor o směrových úhlech α , β a γ .

1.3. Ukažte, že funkce $\mathcal{Y}(t \pm \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v})$ z předchozího příkladu představuje rovinnou vlnu (rozhru) postupující v prostoru směrem $\pm \vec{s}$ rychlostí v .

1.4. Funkce $\mathcal{Y}(x, t)$ znamená výchylku elementu struny v místě x a čase t . V počátečním okamžiku $t = 0$ má výchylka průběh daný závislostí

$\mathcal{Y}(x, 0) = \frac{10^{-1}}{1 + 10^4 x^2}$. Jak velká je výchylka elementu struny v čase $t = 10^{-3} \text{ sec}$, postupuje-li rozhru v kladném směru osy x rychlostí $v = 100 \text{ m.s}^{-1}$. Nakreslete průběh hledané funkce v časech $t = 0$ a $t = 10^{-3} \text{ s}$.

1.5. Jsou-li $\mathcal{Y}_1(x, y, z, t)$ a $\mathcal{Y}_2(x, y, z, t)$ řešením rovnice (2), je také funkce $C_1 \mathcal{Y}_1 + C_2 \mathcal{Y}_2$ řešením téže rovnice (C_1, C_2 jsou libovolné konstanty). Ověřte toto tvrzení nazývané principem superpozice.

1.6. Funkce $\mathcal{Y}(x, y, z, t)$ popisující vlnění bodového zdroje umístěného v počátku souřadnic je řešením rovnice (2) a má tvar $\mathcal{Y}(t, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Ukažte, že toto řešení se dá vyjádřit takto: $\mathcal{Y} = \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{v})$; v tomto výrazu je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a f je libovolná dvakrát derivovatelná funkce jedné proměnné.

1.7. Je-li funkce $\mathcal{Y}(t \pm \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v})$ z příkladu 1.2. harmonickou funkcí, je možno takovou závislost vyjádřit také takto:

$\mathcal{Y}(x, y, z, t) = A \cdot \cos(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) + B \cdot \sin(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})$, kde ω je kruhová frekvence a $\vec{k}$ je vlnový vektor. Mezi těmito veličinami, vlnovou délkou λ , periodou kmitů T platí vztahy $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{s}$, $\lambda = v \cdot T$ a $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ukažte, že $\mathcal{Y}(x, y, z, t)$ lze převést také na tvar $\mathcal{Y} = C \cdot \cos(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \varepsilon)$, kde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ a $\tan \varepsilon = \frac{B}{A}$.

⁺Proměnná x je kartézská prostorová souřadnice, proměnná t má význam času a v je konstanta představující rychlost šíření rozhru ve směru osy x .

1.8. Stanovte obor frekvencí elektromagnetických vln odpovídajících viditelnému oboru vlnových délek od 390 do 780 nm. Za rychlost šíření elektromagnetických vln vezměte hodnotu $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

1.9. Vyvoďte z Maxwellových rovnic, že v nevodivém homogenním a izotropním prostředí, které nepohlcuje energii elektromagnetického záření, splňuje vektor elektrického pole vlnovou rovnici

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3)$$

a vektor magnetické indukce touž rovnicí psanou s vektorem $\vec{B}$. V obou rovnicích je $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$. Hustotu volného prostorového náboje i hustotu vodivého proudu pokládejte rovné nule.

1.10. Rovinná elektromagnetická vlna postupuje ve směru osy z za podmínek příkladu 1.9. Elektrický vektor v takové vlně je možno pokládat za funkci souřadnice z a času t , t.j. $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$. Vyvoďte z Maxwellových rovnic, že elektrický vektor musí mít složku E_z všude v prostoru rovnu nule, což znamená, že elektromagnetická vlna má charakter příčného vlnění.

1.11. Rovinná elektromagnetická vlna postupuje směrem osy z a je lineárně polarizována tak, že její elektrický vektor má všude v prostoru pouze složku do směru osy x , tedy $\vec{E} = \vec{i} \cdot E_x(z, t)$. Ukažte, že odpovídající vektor magnetické indukce je roven $\vec{B} = \vec{j} \cdot B_y(z, t)$. Vektory $\vec{i}$ a $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směrech os x a y .

1.12. Je dána rovinná elektromagnetická harmonická vlna, jejíž elektrický vektor je lineárně polarizován v rovině xz , t.j. $\vec{E} = \vec{i} \cdot E_{0x} \cdot \sin[\omega(t - \frac{z}{v}) + \epsilon]$; E_{0x} je amplituda vlny nezávislá na čase i na poloze v prostoru. Určete vektor magnetické indukce příslušející vektoru $\vec{E}$ a nakreslete obrázek popisující toto uspořádání elektrického a magnetického pole v prostoru. Vlna se šíří ve vakuu.

1.13. Uvažujte rovinnou elektromagnetickou vlnu, která se šíří ve vakuu za podmínek předešlého příkladu. Je-li amplituda elektrického pole $E_{0x} = 1 \text{ V.m}^{-1}$, stanovte amplitudu vektoru magnetické indukce B_{0y} , amplitudu magnetického pole H_{0y} a vektoru elektrické indukce D_{0x} . Udejte hodnoty všech uvedených amplitud v jednotkách SI a v jednotkách soustavy Gaussovy. V těchto jednotkách stanovte maximální hodnotu Poyntingova vektoru.

1.14. Disperzí rozumíme závislost indexu lomu n na frekvenci γ (nebo kruhové frekvenci ω). Touto závislostí je jednoznačně určena i závislost fázové rychlosti v na γ (nebo ω). Uvažujeme-li vlnovou délku ve vakuu podle vztahu $\lambda_0 = \frac{c}{\gamma}$, máme jednoznačně určeny i závislosti $v(\lambda_0)$ a $n(\lambda_0)$. Můžeme dále uvažovat tak, že ke každé hodnotě frekvence γ (nebo ω) určíme vlnovou délku λ v daném prostředí a tím i vlnový vektor $k = 2\pi/\lambda = 2\pi n/\lambda_0$. To znamená, že jsme od výchozích závislostí $n(\gamma)$, $v(\gamma)$ přešli k závislostem $\lambda = \lambda(\gamma)$, $k = k(\gamma)$ (nebo $\lambda(\omega)$, $k(\omega)$), které jsou rovnocenné s předcházejícími.

Položme nyní požadavek, aby ke každé vlnové délce λ v daném prostředí bylo možno jednoznačně určit odpovídající frekvenci ω . Tento požadavek matematicky znamená, aby rovnice $\lambda = \frac{c}{n(\lambda)\omega}$, do níž je dosazeno $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ a která po této úpravě nabývá tvar $\omega \cdot n(\omega) = \frac{2\pi c}{\lambda}$, byla jednoznačně řešitelná vzhledem k ω . Je zřejmé, že v oblastech monotonního vzrůstu indexu lomu s frekvencí (normální disperze) lze tento požadavek klást vždy*. Pro účely následujících výpočtů tohoto příkladu tedy předpokládejme, že má smysl uvažovat o inverzní závislosti $\omega = \omega(\lambda)$ a tedy i o závislostech $\omega = \omega(k)$ a $n = n(k)$.

Ukažte na základě superpozice dvou lineárně polarizovaných vln popsanych výrazy

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{i} \cdot E_0 \cdot \cos[(k + \Delta k)z - (\omega + \Delta\omega)t] \\ \vec{E}_2 &= \vec{i} \cdot E_0 \cdot \cos[(k - \Delta k)z - (\omega - \Delta\omega)t] \end{aligned},$$

že za výraz pro grupovou rychlost je třeba vzít výraz $\frac{d\omega}{dk}$.

Užitím vztahů v textu tohoto příkladu odvoďte vztah mezi grupovou rychlostí u a fázovou rychlostí v na základě předpokladu, že index lomu n a velikost vektoru k jsou vzájemně jednoznačně určeny a že tedy disperzní vlastnosti daného optického prostředí jsou určeny závislostí $n = n(k)$. Určete podíl $\frac{u}{v}$.

1.15. Souvislost grupové rychlosti u a fázové rychlosti v je v literatuře uváděna dvěma vztahy, které vyvodili Gouy a Rayleigh. Prvý autor udává vztah $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} - \frac{\lambda_0}{c} \cdot \frac{dn}{d\lambda_0}$, druhý $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$. V těchto vztazích je λ_0 vlnová délka ve vakuu, λ vlnová délka v daném prostředí, c rychlost světla ve vakuu a n absolutní index lomu. Odvoďte oba uvedené vztahy.

1.16. Disperzní vlastnosti skla lze orientačně popsat hodnotou indexu lomu $n_D = 1,5$ pro Fraunhoferovu vlnovou délku $\lambda_D = 589,3$ nm a Abbeovým číslem $A = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = 40$, v němž n_F a n_C jsou indexy lomu pro vlnové délky $\lambda_F = 486,1$ nm a $\lambda_C = 656,3$ nm. Určete hodnotu grupové rychlosti elektromagnetických vln ve viditelném oboru pro $\lambda = \lambda_D$ za předpokladu, že index lomu závisí lineárně na vlnové délce. Vypočítejte též hodnotu fázové rychlosti.

1.17. Disperzní křivka skla může být přibližně vyjádřena Cauchyovým empirickým vzorcem $n = A + B \cdot \lambda_0^{-2}$. Najděte hodnoty fázové a grupové rychlosti pro sklo, u nějž jsou $A = 1,40$ a $B = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$ ($\lambda_0 = 500$ nm).

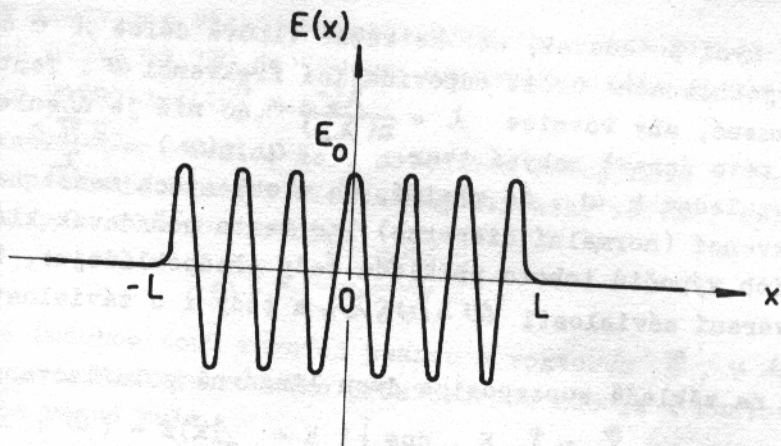
1.18. V okamžiku $t = 0$ má elektrické pole rovinné vlny ve vakuu průběh daný těmito údaji: pro $|x| \leq L$ je $E(x) = E_0 \cdot \cos(k_0 \cdot x)$ a pro $|x| > L$ je $E(x) = 0$. E_0 a k jsou amplituda a vlnový vektor této vlny v intervalu $\langle -L, L \rangle$. Stanovte pomocí Fourierovy transformace spektrum vlnového vektoru k a z odvozeného výrazu vyvoďte speciální výraz pro $L \gg \lambda_0$. Veličiny vlnový vektor k_0 a vlnová délka λ_0 spolu souvisí vztahem $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ (obrázek na další straně).

1.19. Spektrum vlnového vektoru rovinné vlny podle obr. 1.18. je vyjádřeno výrazem

$$A(k) = E_0 \cdot L \cdot \frac{\sin(k_0 - k) \cdot L}{(k_0 - k) \cdot L}$$

za předpokladu, že $L \gg \lambda_0$. Z tohoto výrazu je zřejmé, že $A(k)$ se více liší

*viz obr. 3.39 na str. 76.



Obr. 1.18

od nuly pouze v intervalu daném podmínkou $|(k_0 - k)L| \leq 2\pi$. Určete na základě této podmínky, kolik vlnových délek se vytvoří na rovinném úseku $2L$, jde-li o vlnovou délku $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ a jeví-li tato spektrální čára šířku $0,1 \text{ nm}$. Jak velký je za těchto podmínek úsek $2L$?

1.20. Komplexní tvar kartézských složek elektrického vektoru rovinné elektromagnetické vlny (postupující ve směru vlnového vektoru $\vec{k}$) zní

$$E_x = E_{x0} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_x)}$$

$$E_y = E_{y0} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_y)}$$

$$E_z = E_{z0} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_z)}$$

Ukažte, že reálná část a imaginární část tohoto řešení (mající skutečný fyzikální význam) se od sebe liší pouze tím, že reálná předbíhá imaginární ve fázi o $\frac{\pi}{2}$ (δ_x , δ_y a δ_z jsou pevné konstanty pro danou vlnu, $\vec{r}$ je polohový vektor bodu v prostoru.).

1.21. Uvažujme o rovinné harmonické vlně postupující ve směru osy z (to znamená, že vlnový vektor je rovnoběžný s uvedenou osou). Vektorové komplexní vyjádření takové vlny můžeme napsat a upravovat takto:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \hat{i} \cdot E_x + \hat{j} \cdot E_y = \hat{i} \cdot E_{x0} \cdot e^{i(\omega t - kz + \delta_x)} + \hat{j} \cdot E_{y0} \cdot e^{i(\omega t - kz + \delta_y)} = \\ &= [\hat{i} \cdot E_{x0} \cdot e^{i(-kz + \delta_x)} + \hat{j} \cdot E_{y0} \cdot e^{i(-kz + \delta_y)}] \cdot e^{i\omega t} = \\ &= [\hat{i} \cdot E_{x0} \cdot e^{i\delta_x} + \hat{j} \cdot E_{y0} \cdot e^{i\delta_y}] \cdot e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned}$$

Výrazům $E_{x0} \cdot e^{i(-kz + \delta_x)}$ a $E_{y0} \cdot e^{i(-kz + \delta_y)}$ se říká komplexní amplitudy vlny v místě s polohovým vektorem $\vec{r}$. O charakteru rovinné vlny však rozhodují výrazy ještě jednodušší, které jsou na $\vec{r}$ nezávislé; jsou to výrazy

$$\hat{E}_{x0} = E_{x0} \cdot e^{i\delta_x}$$

a

$$\hat{E}_{y0} = E_{y0} \cdot e^{i\delta_y}$$

Vztah obou těchto komplexních čísel zobrazených v Gaussově rovině jako vektory jednoznačně určuje charakter rovinné vlny. Jak spolu musí souviset veličiny $\vec{E}_{x0}$ a $\vec{E}_{y0}$ a v jakém geometrickém vztahu musí být oba odpovídající vektory v Gaussově rovině, má-li být vlna

- 1) lineárně polarizovaná s obecnou orientací polarizační roviny,
- 2) kruhově polarizovaná pravotočivě a levotočivě,
- 3) elipticky polarizovaná pravotočivě nebo levotočivě s obecnou orientací elipsy,
- 4) elipticky polarizovaná pravotočivě nebo levotočivě tak, aby osy elipsy byly rovnoběžné s jednotkovými vektory $\hat{i}$ a $\hat{j}$.

(Zmíněnou elipsu opisuje v závislosti na čase koncový bod reálné části vektoru $\vec{E}$, jehož počáteční bod se nachází v pevně zvoleném místě $\vec{r}$; E_{x0} a E_{y0} jsou reálné amplitudy elektrického pole.)

1.22. Přesvědčete se o tom, že řešení vyjadřující rovinnou vlnu napsané ve tvaru

$$E_x = E_{x0} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_x)}$$

$$E_y = E_{y0} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_y)}$$

$$E_z = E_{z0} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_z)}$$

má tu vlastnost, že jeho reálná část se fázově zpožďuje o $\frac{\pi}{2}$ za částí imaginární. K tomu účelu proveďte porovnání vztahů i textu příkladu 1.20.

1.23. Jak se změní výsledky příkladu 1.21., uvažujeme-li o vlně, jejíž komplexně vyjádřený vektor elektrického pole má tvar

$$\vec{E} = \hat{i} \cdot E_{x0} \cdot e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} + \hat{j} \cdot E_{y0} \cdot e^{i(kz - \omega t + \delta_y)}.$$

(Směr šíření a význam použitých označení jsou stejné jako v příkladě 1.21.)

1.24. Skutečný izotropní bodový zdroj světla S vytváří ve vzdálenosti r_0 intenzitu elektrického pole, jejíž střední kvadratická hodnota (vzniklá středováním přes prostorové souřadnice) je $\sqrt{E_0^2}$. Stanovte závislost této veličiny na vzdálenosti r od zdroje. Prostředí obklopující zdroj je opticky homogenní, izotropní a nepohlcuje světelnou energii. Hustotu energie záření pokládejte za přímo úměrnou druhé mocnině elektrického pole.

1.25. Stanovte podmínku, za níž lze výraz $\psi = \varphi\left(t - \frac{r}{v}\right) \cdot r^{-1/2}$ považovat za přibližné řešení vlnové rovnice popisující válcovou vlnu. φ je libovolná funkce.

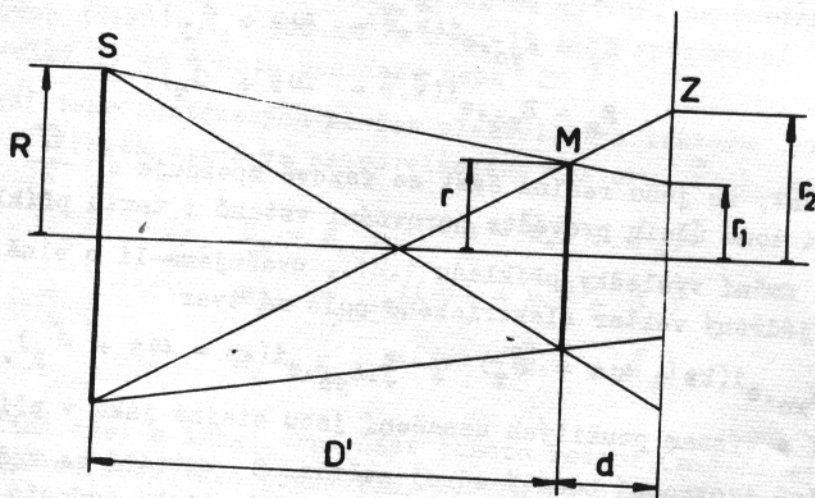
1.26. Popište, jaké je uspořádání elektrického pole v prostoru, jímž postupuje vlnění, jehož elektrický vektor je vyjádřen touto komplexní funkcí :

$$\vec{E} = E_0 (\vec{a} - i \vec{b}) e^{i(k_1 z - \omega t)} + E_0 (\vec{a} + i \vec{b}) e^{i(k_2 z - \omega t)}$$

($\vec{a}, \vec{b}$ jsou jednotkové vektory v kladných směrech os x, y ; k_1, k_2 jsou velikosti vlnových vektorů; E_0 je reálná amplituda elektrického pole; kartézský souřadnicový systém je pravotočivý). Na základě uvedeného výrazu určete výraz pro amplitudu vlnění v daném místě a stanovte jaká je v tomto místě polarizace výsledného vlnění. Předpokládejte, že oba vlnové vektory se od sebe velmi málo liší.

2. Z Á K L A D N Í Z Á K O N Y Š Í Ř E N Í S V Ě T L A

2.1. Při zatmění Slunce vzniká na povrchu Země oblast stínu a polostínu. Průmět těchto oblastí na rovinu hlavního řezu Země, postavenou kolmo k dopadajícím paprskům, mají tvar dvou soustředných kruhů. Odvoďte vztahy pro poloměry obou kruhů a podmínku, která musí být splněna, aby mohlo vzniknout úplné zatmění. Využijte číselných hodnot a vypočítejte hodnoty poloměrů pro nejmenší a pro největší vzdálenost Měsíce od Země. Při jakých vzdálenostech Země a Měsíce již nemůže úplné zatmění vzniknout ?
(Poloměr Slunce $R=7 \cdot 10^5 \text{ km}$, vzdálenost Země od Slunce $D=1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$, poloměr Měsíce $r=1740 \text{ km}$, vzdálenost Měsíce od Země $d_{\min}=3,56 \cdot 10^5 \text{ km}$, $d_{\max}=4,07 \cdot 10^5 \text{ km}$)



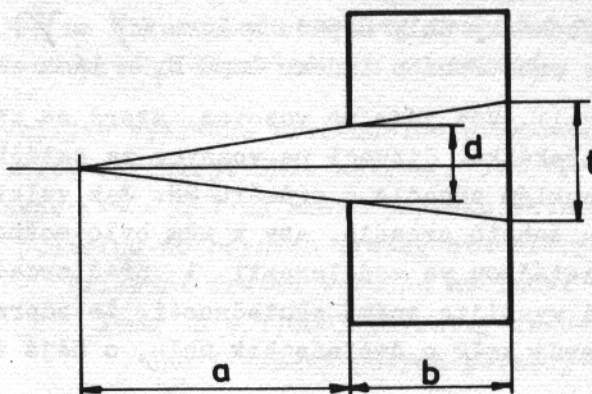
Obr. 2.1.

- 2.2. Temná komora o hloubce $b = 30 \text{ cm}$ zobrazuje předměty vzdálené více než $2,7 \text{ m}$ ($a_{\min} = 2,7 \text{ m}$). Jak velký může být nejvýše průměr vstupního otvoru komory, aby zobrazení bodového zdroje odpovídala kruhová ploška, jejíž průměr nepřesáhne velikost 1 mm . K ohybovému jevu nepřihlížejte.
- 2.3. Vodorovný paprsek se postupně odráží na dvou rovinných zrcadlech postavených kolmo k zemskému povrchu. Zrcadla svírají spolu úhel φ . Vypočítejte jak závisí odchylka δ odraženého paprsku na úhlu dopadu na první zrcadlo.
- 2.4. Mezi dvěma zrcadly, která nejsou rovnoběžná, leží bodový zdroj světla. Popište, jak jsou v prostoru rozmístěny všechny obrazy tohoto zdroje, které se vytvoří vícenásobnými odrazy světla.

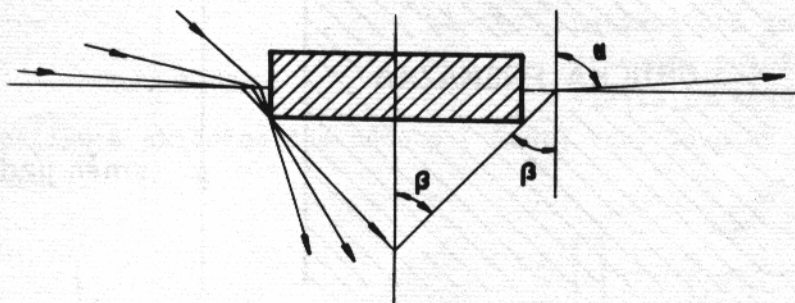
2.5. Paprsek se postupně odráží na třech navzájem kolmých zrcadlech. Jaký je výsledný směr dopadajícího paprsku ?

2.6. Určete nejmenší velikost svisle postaveného rovinného zrcadla, v němž se stojící člověk výšky H uvidí v plné velikosti.

2.7. Kruhovatá deska plovoucí na klidné vodní hladině zabráňuje světlu v přístupu do prostoru pod deskou. Světlo se do vody dostává pouze lomem z prostoru nad hladinou. Jaký tvar má neosvětlená část prostoru pod deskou, je-li index lomu vody $n = \frac{4}{3}$ (Určete úhel β).



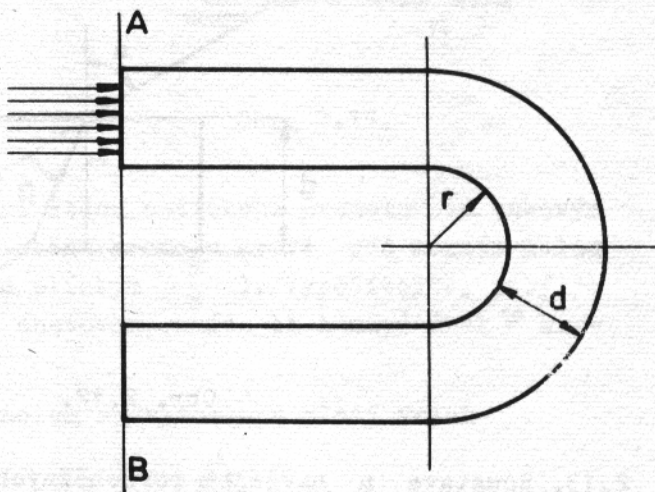
Obr. 2.2.



Obr. 2.7.

2.8. Skleněná tyč čtvercového průřezu o indexu lomu n má tvar vyznačený na obrázku. Do tyče vstupuje rovnoběžný svazek paprsků jedním jejím koncem (A) a postupuje rovnoběžně s přímkou částí tyče. Stanovte nejmenší hodnotu poměru $\frac{r}{d}$, při níž se všechna světelná energie dostává k druhému konci tyče (B). Mohou za těchto podmínek dopadat paprsky na válcovou plochu s poloměrem r , která spoluvytváří zakřivenou část tyče ?

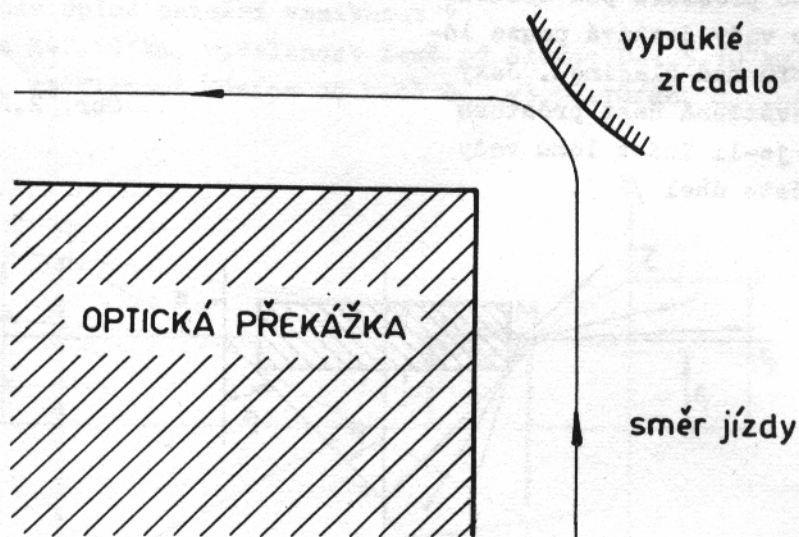
2.9. Jak nejvíce může být ohnuto nepostříbřené skleněné vlákno kruhového průřezu, aby byla zachována jeho funkce jakožto světlovodu ? Řešte pomocí veličin zavedených v obr. 2.8.



Obr. 2.8.

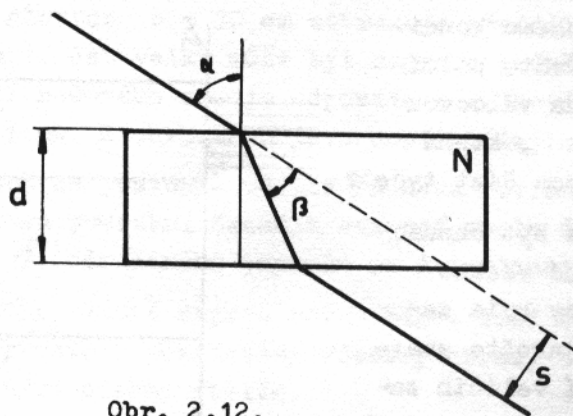
2.10. Odražený a lomený paprsek spolu svírají pravý úhel. Jak souvisí za této podmínky úhly dopadu a lomu (φ a γ) s oběma indexy lomu. Paprsek přichází z prostředí o indexu lomu N_1 a láme se do prostředí s indexem N_2 .

2.11. Vůz jede po vozovce, která se zatáčí doleva v pravém úhlu za optickou překážkou. Situaci na vozovce za zatáčkou pozoruje řidič z velké dálky ve vypuklém zrcadle o průměru $2R$. Jak velký poloměr křivosti r je nutno zvolit u tohoto zrcadla, aby v něm bylo možno pozorovat celou šířku vozovky d za zatáčkou ve vzdálenosti l před zrcadlem. Předpokládejte, že $R \ll d \ll l$ a využijte známé skutečnosti, že paprsek odražený od rovinného zrcadla změnil svůj směr o dvojnásobek úhlu, o nějž se pootočí zrcadlo.



Obr. 2.11.

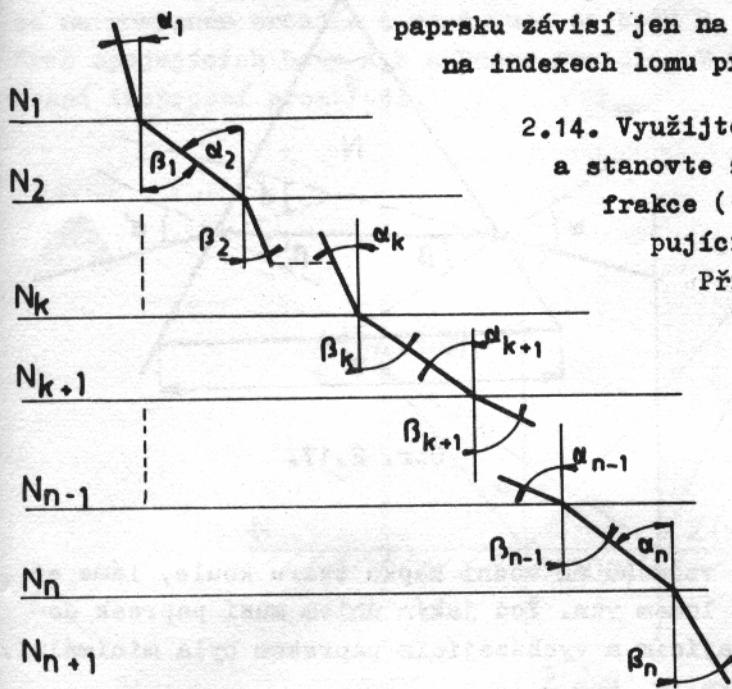
2.12. Paprsek dopadá ze vzduchu na planoparalelní desku, jejíž index lomu je N a tloušťka d . Vypočtete stranové posunutí s paprsku po průchodu deskou.



Obr. 2.12.

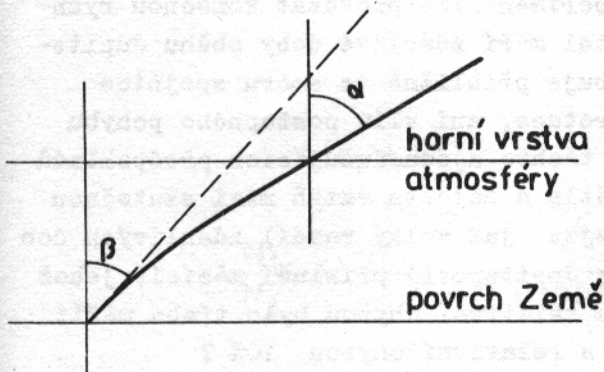
2.13. Soustava n navzájem rovnoběžných rovin odděluje od sebe $n+1$ prostředí s různými indexy lomu. Předpokládejte, že na prvé rozhraní dopadá paprsek pod takovým úhlem, že nikde nedochází k totálnímu odrazu a paprsek postupně projde

až do $(n+1)$ -ho prostředí. Dokažte, že směr vystupujícího paprsku závisí jen na úhlu dopadu na prvé rozhraní a na indexech lomu prvního a posledního prostředí.

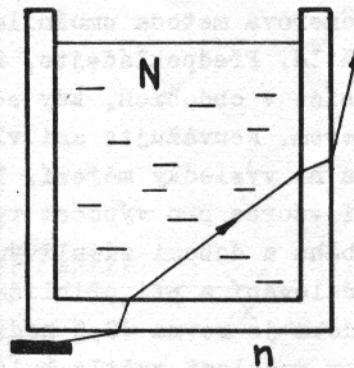


Obr. 2.13.

stěnou přes kapalinu a skleněné dno nádoby (Řešte tak, jako by šlo o kyvetu hranolového tvaru.).



Obr. 2.14.



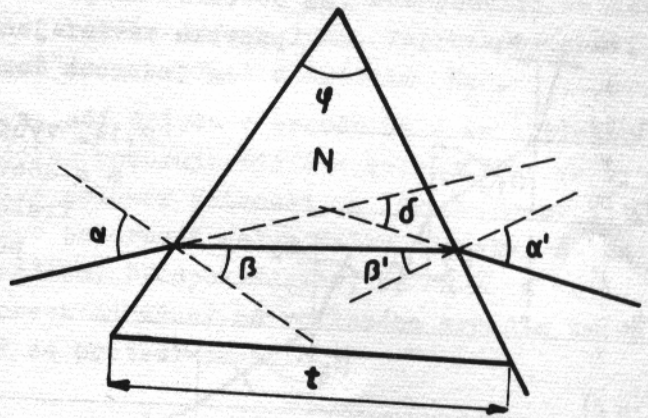
Obr. 2.15.

2.16. Světelný paprsek dopadá na přední stěnu optického hranolu pod takovým úhlem α , že po lomu dopadá na zadní stěnu hranolu právě pod mezním úhlem (paprsek vystupuje z hranolu pod úhlem blízkým $\frac{\pi}{2}$). Vypočítejte, jaký je index lomu skla, ze kterého je hranol zhotoven, znáte-li lámaný úhel φ hranolu (obr. 2.17).

2.17. Pro chod paprsku rozkladným hranolem spektroskopu platí vztah

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \beta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} \cdot N, \quad ,$$

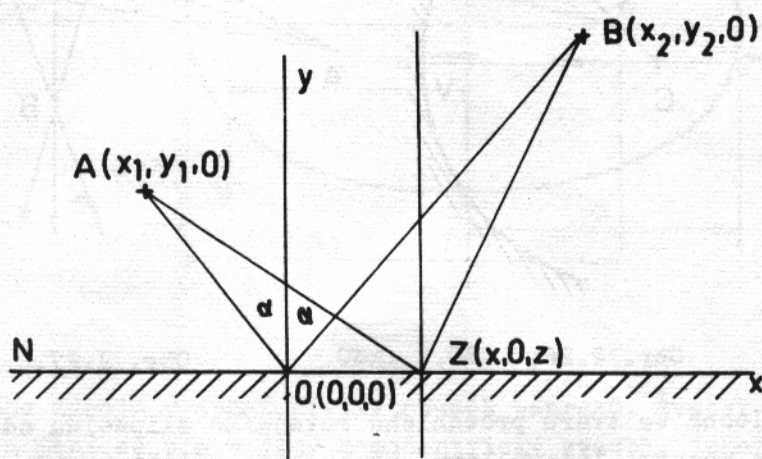
δ je výsledný deviační úhel, který závisí na úhlu dopadu α na prvou lámavou plochu, φ a N jsou lámavý úhel a index lomu hranolu. Odvoďte uvedený vztah a ukažte z něho dále, že symetrickému průchodu hranolem odpovídá minimum deviačního úhlu. Udejte výraz pro úhlovou disperzi hranolu v oblasti minimální deviace. (Úhlovou disperzí se rozumí veličina $\frac{d\delta_{\min}}{d\lambda}$, kde λ je vlnová délka, na níž závisí minimální deviace $\delta_{\min}$.)



Obr. 2.17.

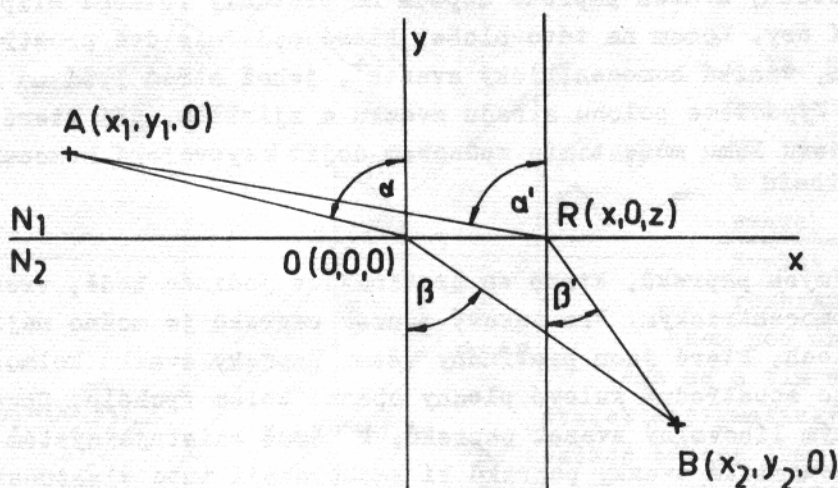
- 2.18. Světelný paprsek dopadá ze vzduchu na vodní kapku tvaru koule, láme se do ní a po odraze opět vystupuje lomem ven. Pod jakým úhlem musí paprsek dopadnout, aby odchylka mezi dopadajícím a vycházejícím paprskem byla minimální. Index lomu pro danou vlnovou délku je $N = \frac{4}{3}$.
- 2.19. Michelsonova metoda měření rychlosti světla využívá vícenásobných odrazů světla mezi dvěma rovinnými zrcadly. Zrcadla jsou 50 cm vysoká a jsou od sebe vzdálena 1600 m. Jak velký úhel musí tato zrcadla spolu svírat, aby jejich vzdálenost proběhl paprsek 10krát než opět vystoupí z měřicí aparatury.
- 2.20. Römerova metoda umožnila poprvé experimentálně prokázat konečnou rychlost světla. Předpokládejte, že pozorovatel měří zdánlivé doby oběhu Jupitera měsíce v obdobích, kdy se Země pohybuje přibližně ve směru spojnice s Jupiterem. Neuvažujte ani vliv zemské rotace, ani vliv postupného pohybu Jupitera na výsledky měření. Proveďte za těchto zjednodušujících předpokladů odvození vzorce pro výpočet rychlosti světla a najděte vztah mezi skutečnou dobou oběhu a dobami zdánlivými. Vypočítejte, jak velký rozdíl zdánlivých dob (při vzdalování a při přibližování Země k Jupiterovi) přísluší měsíci, jehož oběžná doba je rovna 42,5 hodiny. S jakou relativní chybou bylo třeba měřit čas, aby rychlost světla byla stanovena s relativní chybou 10%?
- 2.21. Nalezněte výraz pro rychlost světla určenou Römerovou metodou za podmínek předešlého příkladu, pouze s tím rozdílem, že při přibližování Země k Jupiterovi i při jejím vzdalování má Jupiter stálou složku rychlosti ve směru spojnice obou planet.
- 2.22. Porovnejte, jak velké úhly hvězdné aberace přísluší oběžnému pohybu Země okolo Slunce a otáčivému pohybu Země okolo vlastní osy. Uvažujte polohu pozorovatele na rovníku. (Poloměr Země je 6378 km, oběžná rychlost 30 km/s.)
- 2.23. Stanovte rychlosti otáčení ozubeného kola ve Fizeauově metodě měření rychlosti světla, při nichž vymizí světelný signál. Vstup světla ze zdroje do aparatury i výstup světla z aparatury do oka pozorovatele jsou ozubeným kolem současně otevírány a současně zavírány. Stanovte také nejmenší číselnou hodnotu rychlosti otáčení, je-li odrazující zrcadlo ve vzdálenosti $l = 8,6$ km a počet zubů $Z = 720$.

2.24. Ukažte, že skutečná optická dráha paprsku, který vychází z bodu A, odráží se na rovinném zrcadle a postupuje do bodu B, je nejmenší ze všech optických drah spojujících body A, B s bodem zrcadla. V okolí zrcadla je opticky homogenní izotropní prostředí.



Obr. 2.24.

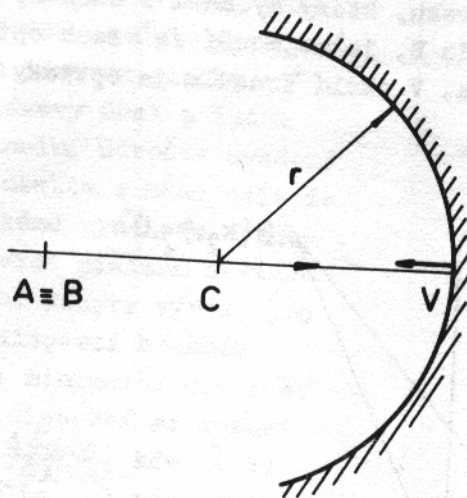
2.25. Ukažte, že skutečná optická dráha paprsku, který vychází z bodu A, lomí se na rovinném rozhraní a postupuje do bodu B, je nejmenší ze všech optických drah spojujících bod A, bod B a bod rozhraní. Obě prostředí, nad rozhraním i pod ním, jsou opticky homogenní a izotropní.



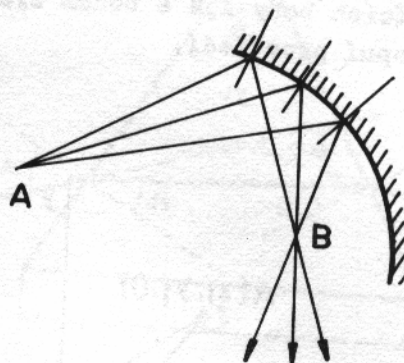
Obr. 2.25.

2.26. Světelný paprsek vychází z bodu A, odráží se na dutém zrcadle, které má poloměr r a vrací se stejnou cestou zpět do výchozího bodu A. O jaký extrém optické dráhy v tomto případě jde?

2.27. Z bodového zdroje vychází široký svazek paprsků, odráží se na zrcadlové ploše a mění se tím v jiný homocentrický svazek. Středem odraženého svazku prochází světelná energie. Najděte tvar zrcadla, které takto působí.



Obr. 2.26.



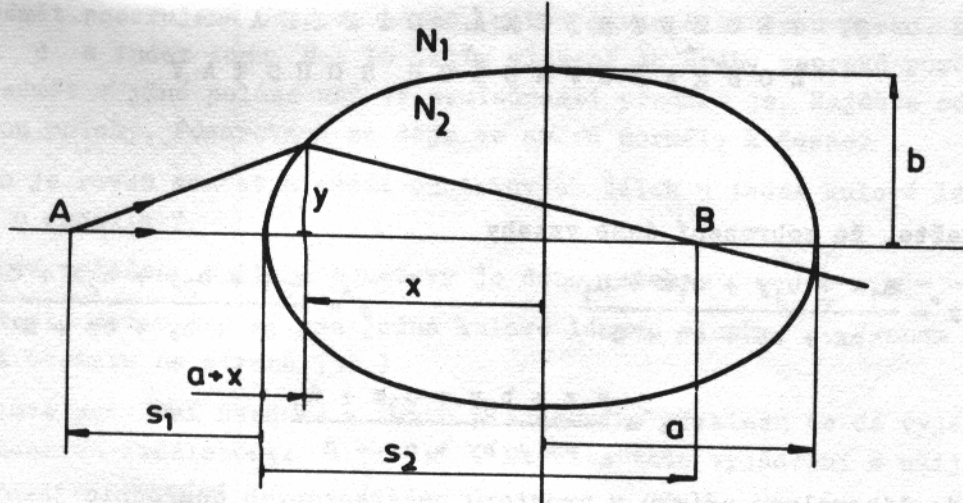
Obr. 2.27.

2.28. Lámavá plocha ve tvaru protáhlého rotačního elipsoidu odděluje od sebe dvě prostředí s různými indexy lomu. Rozhodněte výpočtem, zda je možné na hlavní ose elipsoidu nalézt dva body A a B, vůči kterým by tato plocha byla plochou Cartesiovou. To znamená, že libovolný paprsek vycházející z bodu A, lámající se při průchodu plochou elipsoidu, projde také bodem B.

2.29. Kulová lámavá plocha poloměru r odděluje od sebe prostředí o indexech lomu N a N' . Vypočtete, pro kterou dvojici bodů je tato plocha plochou Cartesiovou.

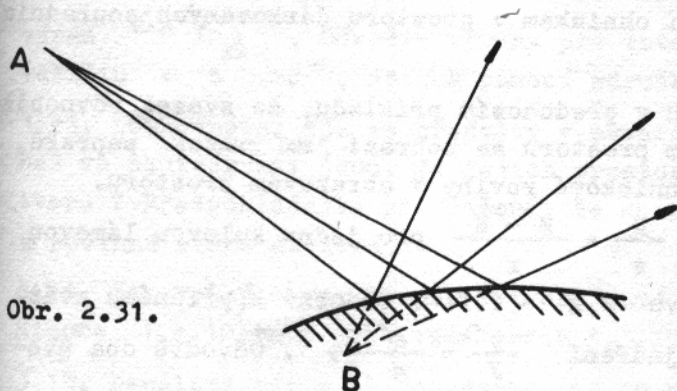
2.30. Rovnoběžný svazek paprsků dopadá na protáhlý rotační elipsoid ve směru jeho hlavní osy. Lomem na této ploše, která odděluje dvě prostředí s různými indexy lomu, vzniká homocentrický svazek[†], jehož střed leží na hlavní ose elipsoidu. Vypočtete polohu středu svazku a zjistěte, při které hodnotě relativního indexu lomu může tímto způsobem dojít k vytvoření homocentrického svazku.

[†]Svazek přímých paprsků, které se protínají v jediném bodě, vrcholu svazku, nazýváme homocentrickým. Pro takový svazek paprsků je možno najít systém normálových ploch, které jsou protínány všemi paprsky svazku kolmo. V tomto případě jsou to soustředné kulové plochy opsané kolem vrcholu. Obecně nazýváme orthonomickým libovolný svazek paprsků, k němuž existuje systém normálových ploch. Orthonomické svazky paprsků si zachovávají tuto vlastnost po libovolném počtu odrazů nebo lomů. Optické dráhy všech paprsků mezi dvěma normálovými plochami jsou si navzájem rovny, a proto světlo urazí dráhu mezi oběma plochami za stejnou dobu podél kteréhokoli paprsku svazku. Normálová plocha obecně mění svůj tvar, ale zůstává po odrazu nebo lomu plochou normálovou. Homocentrický svazek obecně nezůstane homocentrickým. Z úzkých homocentrických svazků se pak stanou svazky astigmatické.



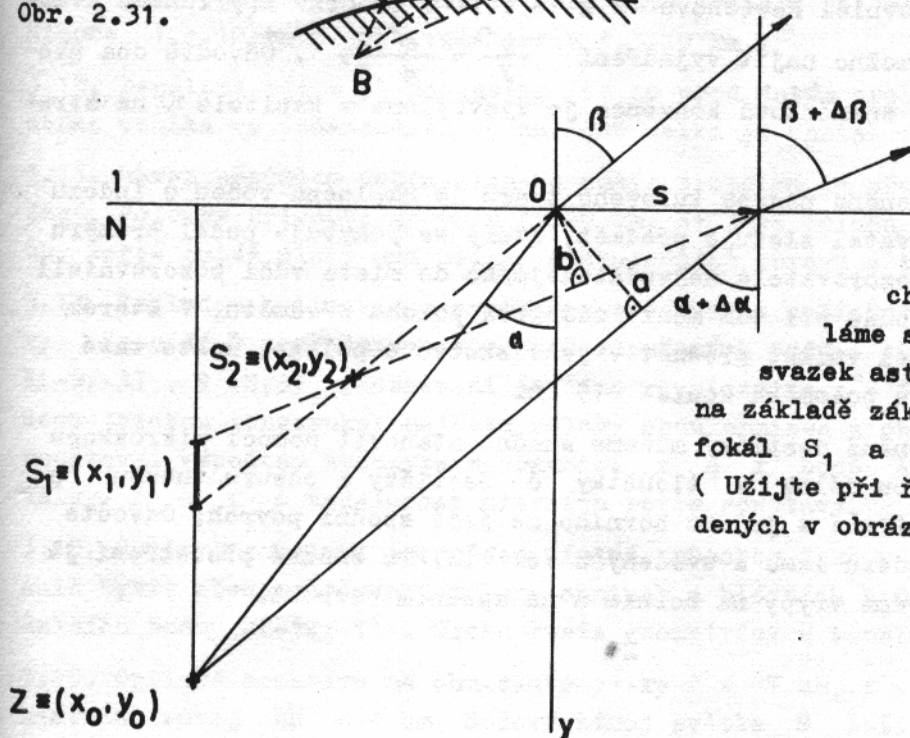
Obr. 2.28.

2.31. Z bodového zdroje vychází široký svazek paprsků. Svazek dopadá na zrcadlovou plochu a mění se tím v jiný homocentrický svazek, jehož střed leží za zrcadlem. Najděte tvar zrcadla, které takto působí.



Obr. 2.31.

2.32. Rovnoběžný svazek paprsků dopadá na zrcadlovou plochu a mění se odrazem ve svazek homocentrický. Jaký tvar zrcadla vyhovuje tomuto ději ?



2.33. Bodový zdroj světla Z umístěný ve vodě vysílá k hladině úzký svazek paprsků. Svazek dopadá na rozhraní se vzduchem pod úhlem α , láme se a tím se změnil ve svazek astigmatický. Stanovte na základě zákona lomu polohy obou fokál S_1 a S_2 tohoto svazku. (Užijte při řešení veličin zavedených v obrázku.)

Obr. 2.33.

3. GEOMETRICKÁ OPTIKA ZOBRAZOVACÍCH SOUSTAV

3.1. Ukažte, že zobrazení dané vztahy

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{ax + by + cz + d}$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{ax + by + cz + d}$$

$$z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{ax + by + cz + d}$$

zobrazuje libovolnou přímku v prostoru nečárkovaných souřadnic jako přímku v prostoru souřadnic čárkovaných.

(Vzájemná poloha obou prostorů není zadanými vztahy určena.)

3.2. Ze zobrazovacích rovnic $x' = \frac{ff'}{x}$, $y' = \frac{fy}{x}$, $z' = \frac{fz}{x}$

ukážete, že paprsek rovnoběžný s osou x v prostoru nečárkovaných souřadnic se zobrazí jako přímka procházející ohniskem v prostoru čárkovaných souřadnic a naopak.

3.3. Ukažte pomocí vztahů uvedených v předchozím příkladu, že svazek rovnoběžných paprsků umístěný v předmětovém prostoru se zobrazí jako svazek paprsků, které se protínají v jednom bodě ohniskové roviny v obrazovém prostoru.

3.4. Ze zobrazovací rovnice $\frac{N'}{s'} - \frac{N}{s} = \frac{N' - N}{r}$ pro jednu kulovou lámavou plochu lze odvodit rovnici Newtonovu $x \cdot x' = f \cdot f'$. Obdobně k příčnému zvětšení $\frac{y'}{y} = \frac{f}{x}$ je možno najít vyjádření $\frac{y'}{y} = \frac{s' \cdot N}{s \cdot N'}$. Odvoďte oba uvedené vztahy. (Užitá znaménková konvence je vysvětlena v kapitole 10 na straně 129.)

X 3.5. Tenkostěnná skleněná nádoba kulového tvaru je naplněna vodou o indexu lomu $N = \frac{4}{3}$. Pozorovatel sleduje předmět, který se pohybuje podél průměru nádoby z místa pro pozorovatele nejvzdálenějšího do místa vůči pozorovateli nejbližšího. Jak se bude při tom měnit zdánlivá poloha předmětu. V kterém místě bude pozorovatel vnímat předmět v jeho skutečné poloze. Řešte také numericky pro hodnotu poloměru koule 15 cm.

3.6. Index lomu skleněné destičky můžeme snadno stanovit pomocí mikroskopu na základě měření dvou délek: tloušťky d destičky a posuvu tubusu h potřebného pro přestření z jejího horního na její spodní povrch. Odvoďte vztah pro výpočet indexu lomu z uvedených veličin. Pro snadné přestření je destička opatřena dvěma vrypy na horním a na spodním povrchu.

3.7. Předmět pozorujeme nejprve přímo, potom skrze skleněnou desku. Deska má tloušťku d a index lomu N . Po jejím vložení do dráhy paprsků pozorovatel vnímá předmět v jiné poloze než ve skutečnosti předmět je. Najděte odpovídající změnu polohy. Pozorování se děje ve směru normály k desce.

3.8. Čemu je roven součet a podíl ohniskových dálek u jedné kulové lámavé plochy a u zrcadla?

3.9. Úhlové zvětšení optické soustavy je dáno vztahem $\frac{\text{tg } \sigma'}{\text{tg } \sigma} = - \frac{x}{f'}$. Odvoďte tento vztah pro případ jedné kulové lámavé plochy. (Význam σ a σ' vyplývá z obrázku na straně 130.)

3.10. Úhlové zvětšení uvedené v textu předchozího příkladu se dá vyjádřit pomocí sdružených vzdáleností s a s' . Najděte toto vyjádření a užitě při tom zobrazovací rovnici $\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = -1$.

3.11. Ukažte výpočtem, že u jedné kulové lámavé plochy nebo u zrcadla leží oba uzlové body ve středu křivosti.

3.12. Posune-li se bodový předmět ležící na optické ose zobrazovací soustavy o malou délku Δx ve směru osy, posune se ve směru optické osy i poloha jeho obrazu. Označme tento posuv $\Delta x'$. Axiálním neboli osovým zvětšením rozumíme výraz $\Delta x' / \Delta x$. Odvoďte výrazy pro toto zvětšení jednak pomocí sdružených veličin s a s' , jednak pomocí sdružených veličin x a x' .

3.13. Rozhodněte, zda se předměty v akvariu jeví pozorovateli větší nebo menší než ve skutečnosti jsou. Je jejich prostorový obraz podobný jejich skutečnému tvaru? Předpokládejte při řešení, že se pozorování děje ve směru normály k rovinné stěně akvaria.

3.14. Jak velký obraz Slunce vytvoří duté zrcadlo poloměru r , je-li průměr Slunce $1,4 \cdot 10^6 \text{ km}$ a jeho vzdálenost $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$?

3.15. Zapálená svíce je postavena 60 cm před dutým zrcadlem. Její ostrý obraz vzniká ve vzdálenosti 25 cm. Jak velká je ohnisková délka zrcadla?

3.16. Obraz předmětu zobrazovaného dutým zrcadlem je skutečný a třikrát zvětšený. Poloměr křivosti zrcadla je 60 cm. Najděte polohu předmětu i jeho obrazu. Řešte tutéž úlohu pro případ neskutečného obrazu s tímto zvětšením.

3.17. Vzhledem k libovolně zvolenému počátku na optické ose centrované soustavy jsou dány souřadnice dvou párů sdružených bodů: $A(-6;2)$, $A'(11;-4)$, $B(-9;-3)$, $B'(8;3)$. Zobrazení je dáno rovnicemi $x \cdot x' = f \cdot f'$ a $y/y' = f/x$. Geometrickou konstrukcí najděte polohy obou ohnisek a obou hlavních bodů soustavy. Výpočtem stanovte souřadnice x a x' bodů A a A' , obě ohniskové délky f a f' a vzdálenost hlavních rovin soustavy.

3.18. Optická soustava je určena tímto způsobem jako v předchozím příkladě. Aniž byste předem určovali polohy ohnisek a hlavních bodů, najděte obraz dalšího bodu $C(-12;-1)$. Úlohu řešte geometrickou konstrukcí.

3.19. Optická soustava má ohniskové délky $f = -7 \text{ cm}$, $f' = 6 \text{ cm}$ a vzdálenost hlavních rovin $\overline{HH'} = 4 \text{ cm}$. Bodový zdroj světla S leží v bodě o souřadnicích $x_s = -16 \text{ cm}$, $y_s = 5 \text{ cm}$. Zkonstruuje obrazy čtyř paprsků vycházejících ze zdroje, z nichž první probíhá rovnoběžně s optickou osou, další procházejí

předmětovým ohniskem , předmětovým uzlovým bodem a bodem optické osy, jemuž přísluší souřadnice $-f$.

3.20. Řešte tutéž konstruktivní úlohu jako v předešlém příkladě, avšak pro soustavu, v níž je $f = 3$ cm, $f' = -4$ cm, $\overline{HH'} = 3$ cm a bodový zdroj je umístěn v bodě o souřadnicích $x_s = -7$ cm, $y_s = 3$ cm .

3.21. Optická soustava vytváří skutečný obraz malého trojrozměrného předmětu. Předmět i jeho trojrozměrný obraz jsou si navzájem podobné. Stanovte kolikrát jsou rozměry obrazu větší než rozměry předmětu a kde musí být předmět umístěn, aby bylo dosaženo takového zobrazení.

3.22. Centrovaná optická soustava složená z libovolného počtu lámavých ploch je umístěna v prostředí konstantního indexu lomu. Toto znamená, že indexy lomu před první a za poslední lámavou plochou jsou si rovny. Ukažte, že mezi oběma ohniskovými dálkami této soustavy platí vztah $f' = -f$.

3.23. Vypočtete ohniskovou dálku tenké dvojbypuklé čočky ohraničené kulovými plochami o poloměrech 35 a 60 mm. Index lomu skla je $N = 1,5$.

3.24. Tenká čočka s ohniskovou dálkou $f = 30$ cm je vyrobena ze skla o indexu lomu $N = 1,5$. Jak velká bude její ohnisková dálka ve vodě. Index lomu vody je $N_v = \frac{4}{3}$.

3.25. Z výrazu pro optickou mohutnost tenké čočky umístěné ve vzduchu vyvoďte výpočtem, jaký tvar musí mít tato čočka, aby byla

a) spojku,

b) rozptylkou .

Index lomu skla je větší než 1 .

3.26. Spojná čočka vytváří skutečný obraz malého předmětu. Při které poloze předmětu je vzdálenost mezi předmětem a jeho obrazem minimální. Jak velká je tato vzdálenost ?

3.27. Tlustá a tenká čočka jsou vyrobeny z téhož skla o indexu lomu N a jsou ohraničeny lámavými plochami o těchto poloměrech křivosti r_1 a r_2 . Jak silná může být nejvýše tlustá čočka, aby se obě ohniskové dálky lišily nejvýše o p procent ?

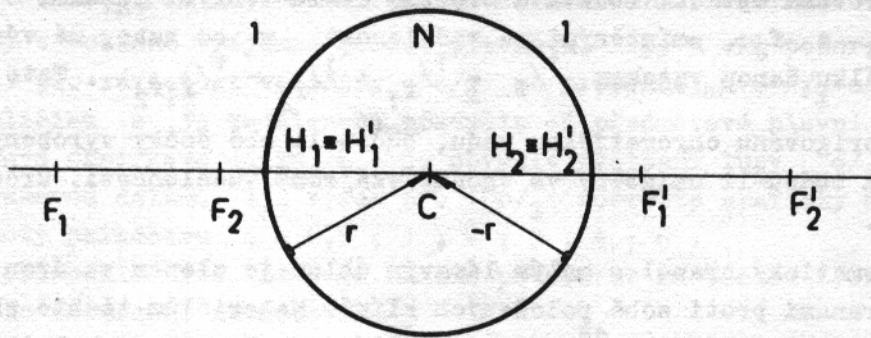
3.28. Stanovte podmínku pro tloušťku d dvojbypuklé čočky tak, aby se ve vzduchu chovala jako rozptylka. Index lomu čočky je větší než jednička a poloměry křivosti lámavých ploch jsou r_1 a r_2 .

3.29. Optickou soustavu slunoměru, který slouží k měření celkové denní doby slunečního svitu, tvoří skleněná koule o indexu lomu N . Určete polohy hlavních bodů a ohnisek této soustavy.

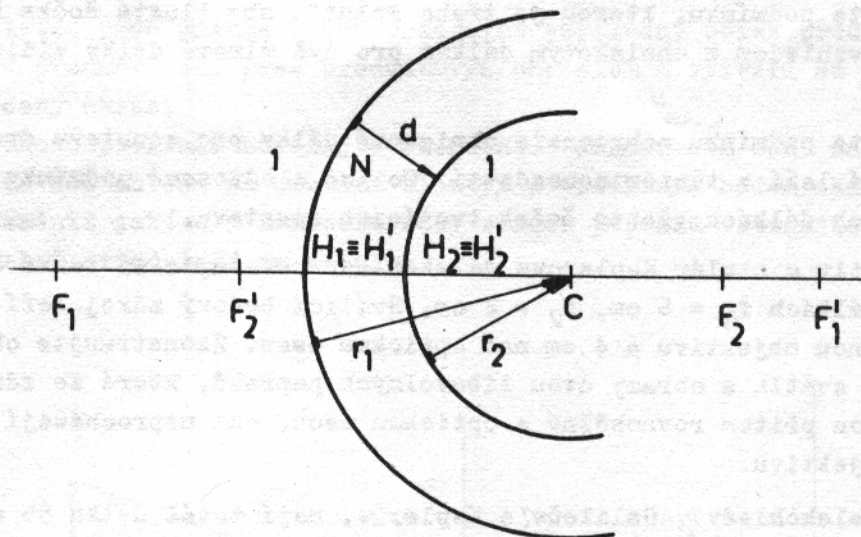
3.30. Tlustá čočka je tvořena dvěma soustřednými kulovými plochami tak, že $r_1 \cdot r_2 > 0$. Vypočtete polohy hlavních bodů a ohnisek soustavy.

3.31. Tenká a tlustá čočka jsou vyrobeny z téhož materiálu a jejich povrchy mají stejné poloměry křivosti. Určete podmínku, při jejímž splnění budou ohniskové dálky obou čoček sobě rovny.

3.32. Jak musí být uspořádána optická soustava oka obojživelníka, aby mohla zobrazovat vzdálené předměty ve vzduchu i ve vodě beze změny akomodace při



Obr. 3.29.



Obr. 3.30.

přechodu z jednoho prostředí do prostředí druhého.

3.33. Ohniskovou dálku tenké spojné čočky můžeme stanovit jako vzdálenost čočky od obrazu velmi vzdáleného zdroje. Jak velká při tom musí být vzdálenost tohoto zdroje a čočky, abychom určili ohniskovou dálku s chybou menší než p procent ?

3.34. Soustava je utvořena z tenké spojky o ohniskové dálce $f_1 > 0$ a tenké rozptylky o ohniskové dálce $f_2 = -f_1$. Určete konstruktivně i výpočtem polohy hlavních a uzlových bodů, obou ohnisek i ohniskové dálky, víte-li, že vzdálenost v obou čoček je také rovna hodnotě f_1 (f_1 a f_2 jsou předmětové ohniskové dálky obou čoček).

3.35. Huygensův okulár je tvořen dvěma tenkými spojkami, jejichž ohniskové dálky jsou v poměru $3 : 1$. Podle výsledku následujícího příkladu je vzdálenost obou čoček rovna dvojnásobku menší ohniskové dálky (okulár má korigovanou chromatickou vadu ohniskové dálky). Určete výpočtem a konstrukcí polohy hlavních bodů a ohnisek soustavy.

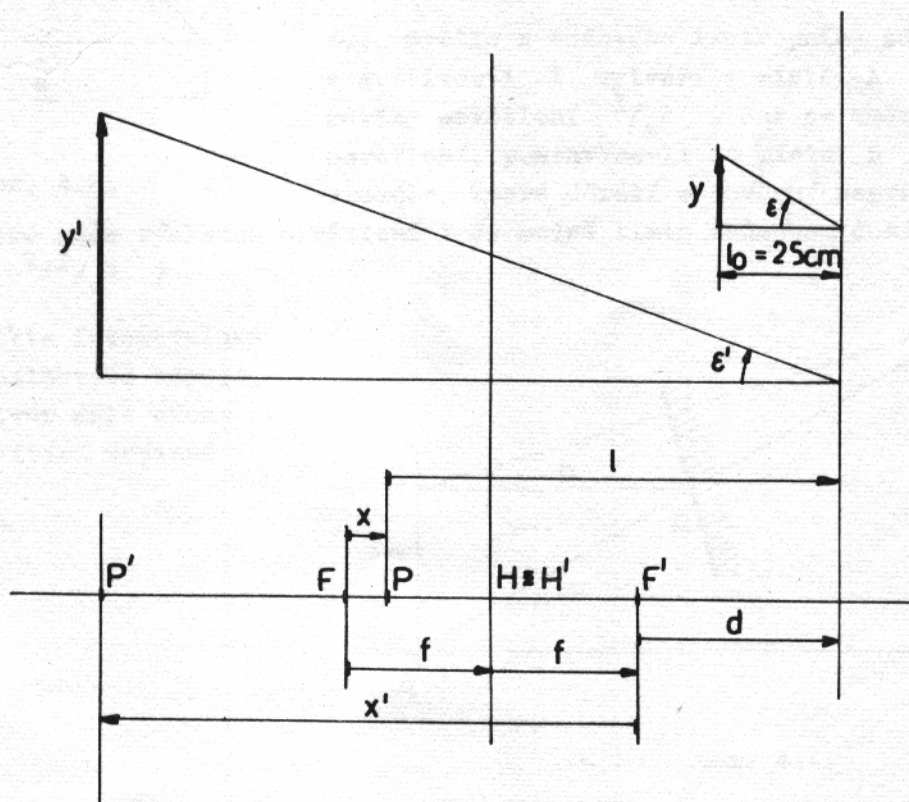
- 3.36. Centrovaná optická soustava tvořená dvěma tenkými čočkami o ohniskových dálkách f_1 a f_2 , umístěnými ve vzdálenosti v od sebe, má výslednou ohniskovou dálku danou vztahem $1/f = 1/f_1 + 1/f_2 - v/f_1 f_2$. Tato soustava bude mít korigovanou chromatickou vadu, budou-li obě čočky vyrobeny z téhož materiálu a budou-li umístěny ve vhodné vzájemné vzdálenosti. Určete tuto vzdálenost.
- 3.37. Achromatický hranol s malým lámavým úhlem je slepen ze dvou tenkých, lámavými hranami proti sobě položených klínů. Materiálům těchto skleněných klínů přísluší disperze $dn_1/d\lambda$ a $dn_2/d\lambda$. Hranol odchyluje kolmé dopadající paprsky o úhel δ . Odvoďte podmínku achromazie deviačního úhlu a výrazy pro lámavé úhly obou částí hranolu.
- 3.38. Najděte podmínku, kterou je třeba splnit, aby tlustá čočka byla achromatizována vzhledem k ohniskovým dálkám pro dvě vlnové délky viditelného spektra.
- 3.39. Odvoďte podmínku achromazie ohniskové dálky pro soustavu dvou tenkých čoček, které leží v těsném sousedství. Co lze z odvozené podmínky usoudit o ohniskových dálkách těchto čoček tvořících soustavu.
- 3.40. Objektiv a okulár Keplerova dalekohledu považujte za tenké čočky o ohniskových dálkách $f_1 = 6$ cm, $f_2 = 2$ cm. Svítící bodový zdroj leží 10 cm před hlavní rovinou objektivu a 4 cm nad optickou osou. Zkonstruujte obraz bodového zdroje světla a obrazy dvou libovolných paprsků, které ze zdroje vycházejí a nejsou přitom rovnoběžné s optickou osou, ani neprocházejí předmětovým ohniskem objektivu.
- 3.41. Dva dalekohledy, Galileův a Keplerův, mají tutéž délku 55 cm a totéž zvětšení rovné deseti. Určete v obou případech ohniskové dálky objektivu a okuláru.
- 3.42. Dalekohled je nastaven pro pozorování velmi vzdálených předmětů. O jakou délku musíme vzdálit okulár od objektivu, abychom viděli ostře předměty ve vzdálenosti 100 m. Ohnisková dálka objektivu je 40 cm.
- 3.43. Objektiv a okulár Keplerova dalekohledu jsou tvořeny tenkými čočkami o ohniskových dálkách $f_1 = 16$ cm, $f_2 = 2$ cm. Určete velikost obruby objektivu, která má v soustavě význam aperturní clony tak, aby při denním pozorování bylo využito veškeré světelné energie vstupující do objektivu. Průměr vstupní pupily oka je 3 mm. Určete také polohu výstupní pupily dalekohledu. Úlohu řešte početně i geometrickou konstrukcí.
- 3.44. Objektiv hypotetického mikroskopu má ohniskovou dálku 2 cm a vzdálenost hlavních rovin 1 cm. Okulár má ohniskovou dálku 3 cm a vzdálenost hlavních rovin 2 cm. Určete konstrukcí polohy ohnisek a hlavních rovin celé soustavy, víte-li, že optický interval je $\Delta = 6$ cm. Konstrukci ověřte výpočtem. (Číselné hodnoty jsou zvoleny z hlediska přehlednosti prováděné konstrukce.)
- 3.45. Mezi okem pozorovatele a předmětem je udržována konstantní vzdálenost 1. Při splnění této podmínky přiloží pozorovatel lupu blízko k předmětu a potom ji pomalu od předmětu vzdaluje. Zorný úhel ε' pod nímž pozoruje předmět, se nejprve s rostoucí vzdáleností od předmětu zvětšuje. Odvoďte výraz pro podíl

tangent $Z = \frac{\tan \xi}{\tan \xi}$ (význam ξ plyne z obrázku), který vyjadřuje zvětšení lupy v obecné vzájemné poloze předmětu, lupy a oka pozorovatele. Odvoďte výraz pro závislost veličiny $Z_{o/z}$ na proměnné $u = \frac{s}{f}$ a na parametru $q = \frac{1}{f}$. Veličina s je vzdálenost předmětu od předmětové hlavní roviny, f je předmětová ohnisková dálka, Z_o je obvyklé zvětšení lupy $\frac{1_o}{f}$ vyjádřené konvenční zrakovou délkou l_o . Výraz pro $Z_{o/z}$ zobrazte graficky a zvolte při tom hodnoty parametru $q = 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6$. Při výpočtu předpokládejte, že lupu můžeme považovat za tenkou čočku a že oko je schopno neomezeně akomodovat.

3.46. Mezi předmětem a okem udržujeme konstantní vzdálenost l . Chceme umístit lupu do takové polohy, aby zorný úhel při pozorování obrazu byl co největší. Využijte výsledků předchozího příkladu a najděte tuto polohu.

3.47. Vysvětlete, proč můžeme lupou pozorovat vzpřímený obraz předmětu i v tom případě, když předmět leží před předmětovým ohniskem a vytváří se tedy skutečný převrácený obraz.

Při řešení tohoto příkladu považujte akomodační schopnosti oka za neomezené, to znamená, že bez ohledu na omezení blízkým a vzdáleným bodem oka, má oko schopnost přeměnit jakýkoli homocentrický svazek paprsků vstupujících do oka ve svazek, jehož střed leží na sítnici.

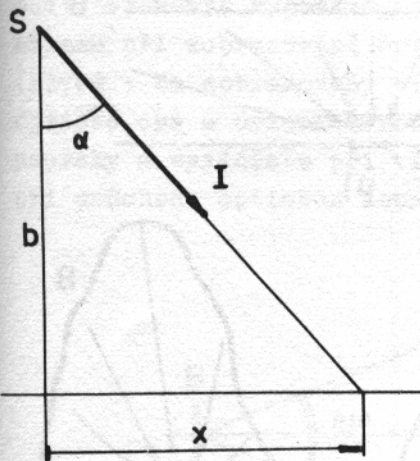


Obr. 3.45.

- 3.48. Jaké brýle pro čtení potřebuje osoba, která má blízký bod ve vzdálenosti 2 m před okem (Tabulka I).
- 3.49. Vzdálený bod leží 1 m před okem. Stanovte optickou mohutnost brýlí, jimiž by toto oko vidělo zřetelně velmi vzdálené předměty (Tabulka I).
- 3.50. Blízký a vzdálený bod leží ve vzdálenostech 15 a 90 cm před okem. Je možné navrhnout brýle tak, aby sloužily pro čtení (na konvenční zrakovou vzdálenost 25 cm) i pro pozorování na dálku ?
- 3.51. Dalekozraký člověk má u obou očí blízký bod ve vzdálenosti 150 cm před okem a vzdálený bod 150 cm za okem. Navrhněte brýle pro čtení ze vzdálenosti 25 cm . Může tento dalekozraký člověk používat těchto brýlí i při pozorování na dálku ?
- 3.52. Krátkozraký člověk má u obou očí blízký bod ve vzdálenosti 15 cm před okem a vzdálený bod 60 cm rovněž před okem. Navrhněte brýle pro opravení krátkozrakosti a stanovte, kam se potom posune blízký bod. Vzdálenost oka a očního skla při výpočtu neuvažujte.

4.1. Nad stolem je zavěšena lampa, jejíž polohu je možno zvyšovat nebo snižovat. Ve vzdálenosti a od paty kolmice spuštěné ze zdroje na rovinu stolu leží kniha. V jaké výšce h nad stolem musíme upevnit lampu, aby osvětlení knihy bylo největší. Zdroj světla považujte za izotropní.

4.2. Rovina je rovnoměrně osvětlena bodovým zdrojem S . Jak vypadá fotometrický diagram tohoto zdroje? Najděte příslušnou úhlovou závislost a její grafické znázornění.



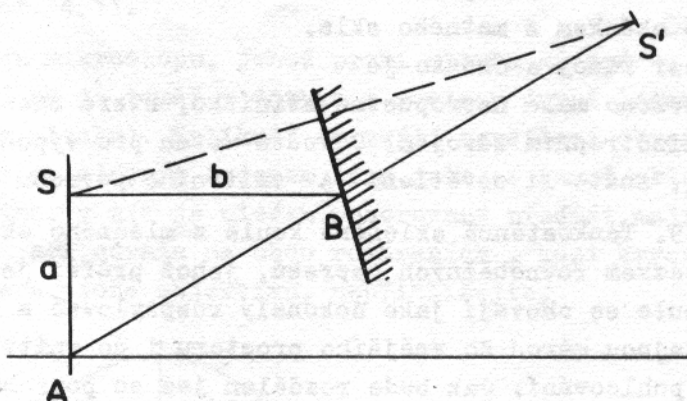
Obr. 4.2.

A. Jak velké bude výsledné osvětlení? Je možné tímto způsobem dosáhnout osvětlení $2 \cdot I/a^2$?

4.5. Stanovte fotometrický diagram kosinového zdroje, který má tvar malé oboustranně svítící rovinné plošky.

4.3. Stínítko Bunsenova fotometru je z jedné strany osvětleno plošným zdrojem ve tvaru kruhového rovnoměrně svítícího kotouče, z druhé strany bodovým zdrojem téže svítivosti jako je normálová svítivost kotouče. Vzdálenosti obou zdrojů od stínítka jsou si rovny a spojnice středů plošného zdroje a stínítka je kolmá na rovinu stínítka i plošného zdroje. Stanovte v jakém poměru budou hodnoty obou osvětlení, je-li vzdálenost zdrojů od stínítka d a poloměr svítícího kotouče R .

4.4. Světlo z bodového izotropního zdroje S o svítivosti I vytváří v místě A vodorovné roviny osvětlení I/a^2 . Jak se změní toto osvětlení, postavíme-li do místa B rovinné zrcadlo, které odrazí vodorovný paprsek do bodu



Obr. 4.4.

4.6. V prostoru jsou umístěny dva plošné zdroje ve tvaru rovinných ploch konečných rozměrů. Oba zdroje, jímž přísluší jasy B_1 a B_2 , jsou v prostoru libovolně orientovány a jeden druhého se nedotýká. Vypočtete poměr světelných toků, kterými se zdroje navzájem osvětlují za předpokladu, že jde o zdroje kosinové.

4.7. Plošný zdroj mající všude stejný jas B osvětluje shora část vodorovné roviny. Tvar a rozměry zdroje jsou takové, že uvažovaná část roviny je osvětlována ze všech směrů vedoucích z poloprostoru nad osvětlovanou rovinou (příklady různých uspořádání zdroje jsou na obrázcích). Vypočítejte osvětlení takto osvětlované části roviny za předpokladu, že plošný zdroj se chová jako kosinový zářič.

4.8. Integrační fotometr

je utvořen jako kulová dutina poloměru R s bílým vnitřním povrchem.

Hodnota koeficientu rozptylu k tohoto povrchu je blízká jedné.

Do dutiny je vložen

anizotropní zdroj světla S ,

u něhož je třeba stanovit

jeho střední sférickou

svítivost. Světlo ze

zdroje je mnohonásobně

rozptylováno stěnami du-

tiny a tak se vytváří na

vnitřním povrchu rovno-

měrné osvětlení, které

je pro měření zpřístupně-

no okénkem z matného skla.

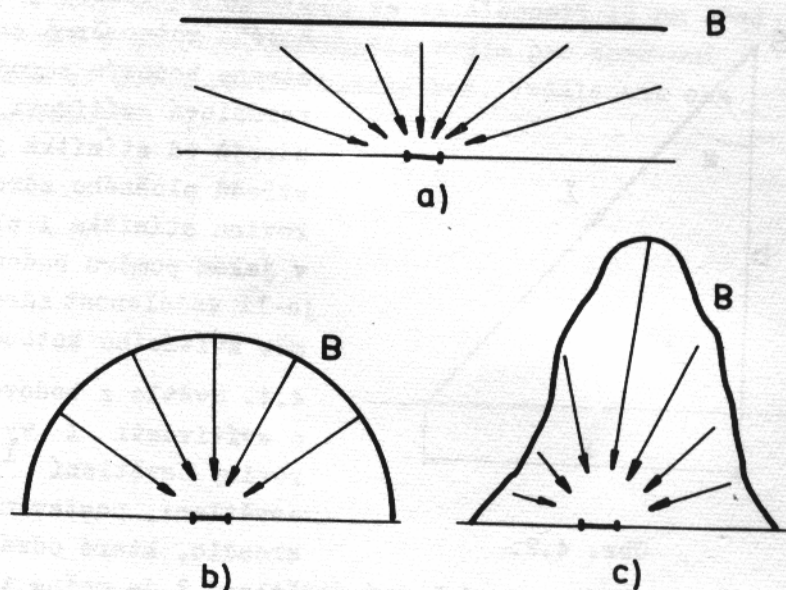
Mezi zdroj a okénko je

vloženo malé nepropustné stínítko, které znemožňuje přímé osvětlení okénka anizotropním zdrojem. Odvoďte vztah pro výpočet střední sférické svítivosti

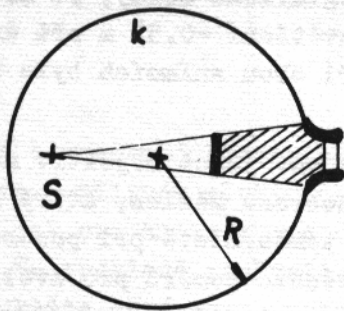
I_0 , znáte-li osvětlení A vnitřního povrchu a jeho koeficient rozptylu k .

4.9. Tenkostěnná skleněná koule z mléčného skla je osvětlena v jednom místě svazkem rovnoběžných paprsků, jehož průřez je malý proti průměru koule. Stěny koule se chovají jako dokonalý rozptylovač a rozptylují dopadající světlo stejnou měrou do vnějšího prostoru i do vnitřku koule, aniž při tom dochází k pohlcování. Jak bude rozdělen jas po povrchu koule.

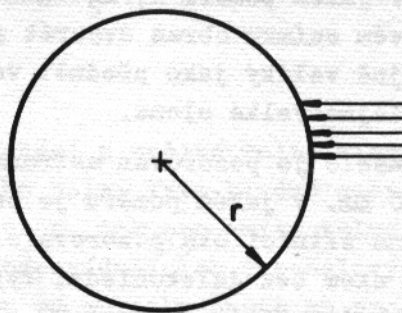
4.10. Stěny uzavřené dutiny mají všude stejný energetický jas. Odvoďte vztah mezi tímto jasem a prostorovou hustotou zářivé energie uvnitř dutiny za předpokladu, že stěny dutiny se chovají jako kosinový zářič a pohlcují všechnu dopadající energii záření.



Obr. 4.7.



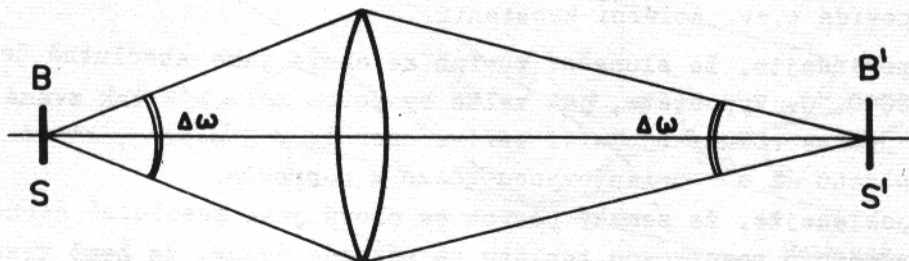
Obr. 4.8.



Obr. 4.9.

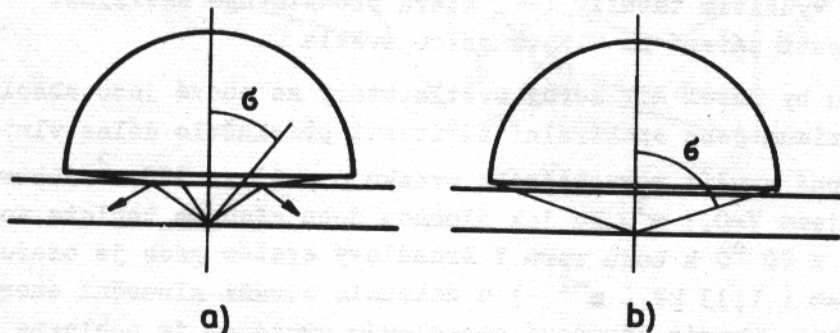
4.11. Stanovte výpočtem, jaký vztah platí mezi jasem předmětu a jasem jeho obrazu při zobrazování optickou soustavou.

(Návod : Za zobrazovaný předmět vezměte malou rovinnou plošku umístěnou na optické ose a orientovanou kolmo k této ose. Uvažujte zobrazení paraxiálními paprsky a vyjádřete při výpočtu vhodně zavedeným koeficientem ztráty světla při průchodu optickou soustavou.)



Obr. 4.11.

4.12. Předmět leží pod objektivem mikroskopu, jehož první obruha má průměr 4 mm. Krycí sklo o tloušťce 0,25 mm je téměř v dotyku s rovinou první lámavé plochy objektivu (jde o rovinnou plochu). Kolikrát se zvýší osvětlení obrazu předmětu, bude-li použito imerze se stejným indexem lomu jako má krycí sklo? Obě tato prostředí a také kapalina, v níž je uložen pozorovaný předmět, mají index lomu $N = 1,5$. Ke ztrátám při odrazu na obou rozhraních, mezi krycím sklem a vzduchem a na první lámavé ploše objektivu, nepřihlížejte.



Obr. 4.12.

4.13. V jakém poměru A_1/A_2 budou osvětlení fotografické desky, je-li při prvním snímku obraz dvakrát zmenšen (příčné zvětšení $-0,5$) a při druhém je stejně veliký jako předmět ve skutečnosti. Při obou snímcích byla nastavena stejně velká clona.

4.14. Měsíc je pozorován astronomickým dalekohledem, jehož objektiv má průměr 100 mm. V jakém poměru je osvětlení v místě obrazu Měsíce, který se vytvoří na sítnici oka pozorovatele k osvětlení v témže místě při pozorování pouhým okem bez dalekohledu. Vypočtěte hodnoty těchto poměrů pro zvětšení dalekohledu rovné postupně 20, 30 a 50. Průměr zornice je 3 mm.

4.15. Stanovte hodnotu činitele rozptylu k měsíčního povrchu za předpokladu, že měsíční povrch se chová jako dokonalý rozptylovač. Použijte k tomu následujících změřených hodnot : jas slunečního povrchu $1,6 \cdot 10^9 \text{ nt}$, jas měsíčního povrchu při úplňku $3 \cdot 10^3 \text{ nt}$, vzdálenost Země od Slunce $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$, poloměr Slunce $7 \cdot 10^5 \text{ km}$.

4.16. Vypočtěte osvětlení, které vytváří Slunce na zemském povrchu postaveném kolmo ke slunečním paprskům (potřebné číselné údaje jsou uvedeny v předchozím příkladě).

4.17. Jak velkou teplotu by muselo mít absolutně černé těleso, aby vyzařovalo z každého čtverečního metru svého povrchu energii 1330 J za vteřinu? Tato hodnota odpovídá t.zv. solární konstantě.

4.18. Předpokládejte, že sluneční povrch se chová jako absolutně černé těleso o teplotě 6000 °C. Vypočtěte, jak velká by potom měla být tak zvaná solární konstanta, již se rozumí množství zářivé energie v joulech, které za 1 vteřinu dopadá na plochu 1 m^2 orientovanou kolmo k paprskům.

4.19. Předpokládejte, že zemský povrch se chová jako absolutně černé těleso. Stanovte průměrnou rovníkovou teplotu na základě úvahy, že Země vyzařuje rovnoměrně ve dne i v noci stejně velké množství energie, jako na zemský povrch dopadne ve dne (užijte hodnotu solární konstanty $1,33 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$).

4.20. Spirála vlákna žárovky má 1000 závitů a je vyrobena z wolframového drátku o poloměru $r_1 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Poloměr dosti těsně vinuté spirály je $r_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Jak vysokou teplotu by mělo mít vlákno při příkonu 1000 wattů, posuzujeme-li jeho záření jako záření absolutně černého tělesa. Ztráty způsobené vedením tepla neuvažujte.

4.21. Za stejných předpokladů jako v předchozím příkladě stanovte účinnost žárovky jako zdroje světla, je-li teplota vlákna 2500 °C. Výpočet proveďte numerickou integrací s využitím tabulky II, která představuje závislost poměrné světelné účinnosti záření na vlnové délce světla.

4.22. Jak velkou teplotu by musel mít zdroj světla, který se chová jako absolutně černé těleso, aby maximum jeho spektrální zářivosti příslušelo délce vlny 555 nm.

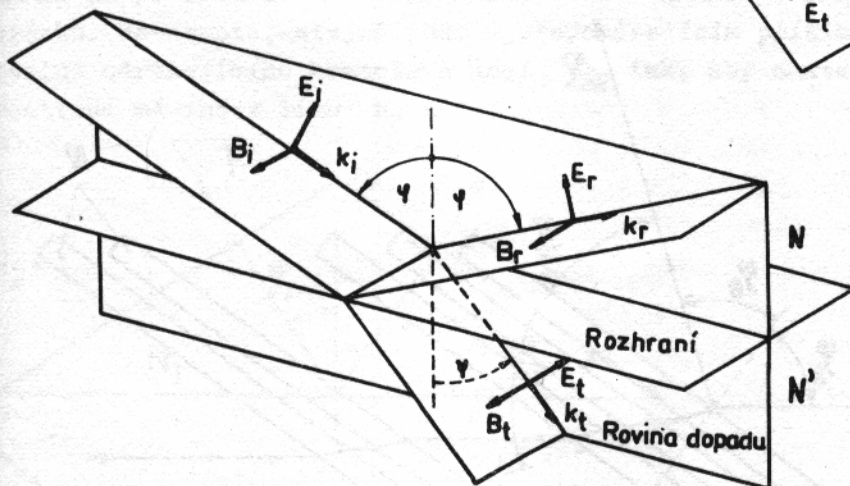
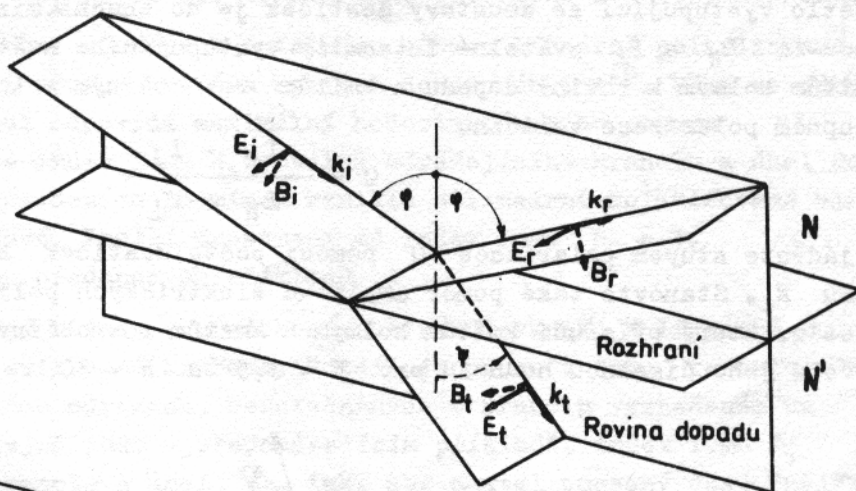
4.23. Sluneční pec schopná využít rovnoběžného svazku o průřezu 300 m^2 fokusuje sluneční energii do objemu $V = 0,1 \text{ m}^3$. Za jak dlouhou dobu stoupne teplota vody vyplňující tento objem z 20 °C k bodu varu? Zrcadlový systém pece je ozařován přímým slunečním světlem ($1,33 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$) a dokonale odráží sluneční energii. Předpokládejte, že všechna energie odražená zrcadlovým systémem je pohlcena vodou.

5.1. Při odvozování Fresnelových vzorců se vychází z určité volby kladných směrů pro amplitudy elektrického a magnetického pole. Tyto kladné směry jsou zvoleny jak pro kmity rovnoběžné s rovinou dopadu, tak pro kmity kolmé k této rovině. Na podkladě znalosti této volby a jí odpovídajících Fresnelových vzorců ukažte správnost tvrzení, že při odrazu od opticky hustšího prostředí dochází ke změně fáze o π . Toto tvrzení ověřte

- pro kmity kolmé k rovině dopadu a uvažujte při tom libovolný úhel dopadu,
- pro kmity rovnoběžné s rovinou dopadu jednak při tečném dopadu, jednak při dopadu ve směru normály.

5.2. Podobným postupem jako v předchozím příkladě ukažte, že při odrazu světla od opticky řidšího prostředí nebo při jeho průchodu rozhraním do dalšího prostředí (s větším indexem lomu nebo s menším indexem lomu) k žádné fázové změně nedochází. Řešte pro dopad ve směru kolmice k rozhraní.

Obr. 5.1a.



Obr. 5.1b.

5.3. Rovinné rozhraní odděluje od sebe dvě homogenní, izotropní prostředí, která nepohlcují světelnou energii. Vyjádřete poměr světelných intenzit při kolmém odrazu a kolmém průchodu tímto rozhraním pomocí indexů lomu obou prostředí.

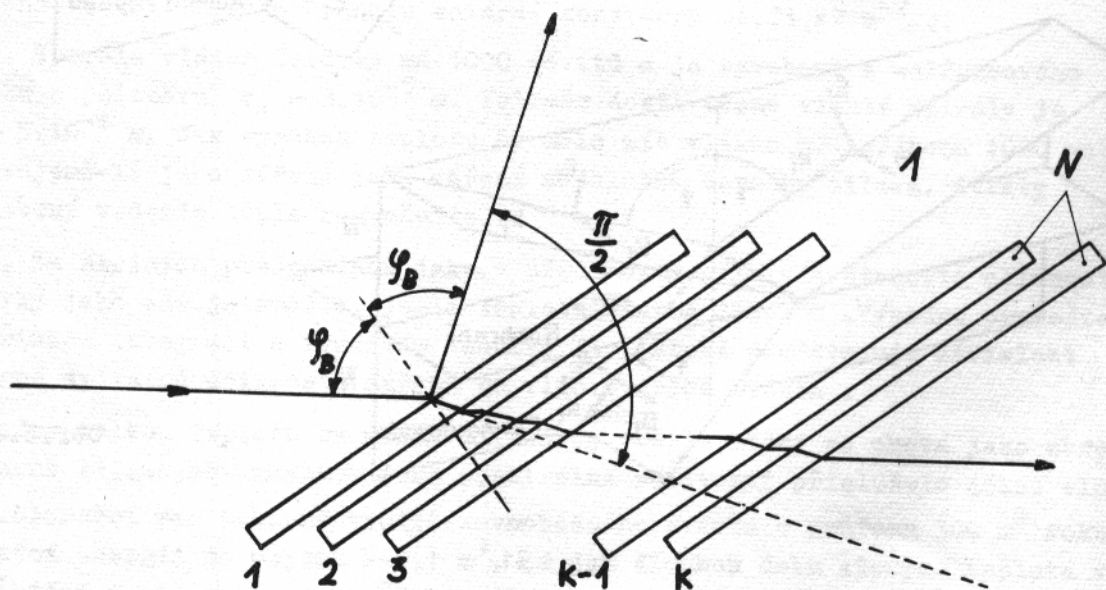
5.4. Rovinná monochromatická vlna dopadá z prostředí 1 na rovinné rozhraní a láme se do prostředí 2. Úhel dopadu a odrazu je φ , úhel lomu je γ . Ukažte, že při opačném chodu paprsků, t.j. při dopadu vlny z prostředí 2 pod úhlem γ a lomu do prostředí 1 pod úhlem φ zachovávají obě odrazivosti i obě propustnosti své původní hodnoty. Obě prostředí jsou homogenní, izotropní a nepohlcují světelnou energii. Řešte zvlášť pro kmity rovnoběžné a zvlášť pro kmity kolmé k rovině dopadu a vylučte situaci, při níž nastává úplný odraz.

5.5. Ukažte, že součet odrazivosti a propustnosti rovinného rozhraní mezi homogenními, izotropními a nepohlcujícími prostředími je pro obě orientace polarizační roviny roven jedné.

5.6. Na soustavu skleněných navzájem rovnoběžných destiček, vyrobených z téhož materiálu, dopadá světlo ze vzdáleného zdroje pod Brewsterovým úhlem. Světlo vystupující ze soustavy destiček je do značné míry polarizováno. Jsou-li $I_{\parallel}$ a $I_{\perp}$ světelné intenzity vystupujícího světla, které odpovídají kmitům kolmým k rovině dopadu a kmitům rovnoběžným s touto rovinou, nazveme stupněm polarizace veličinu

$$Q = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}}.$$

Vyjádřete stupeň polarizace Q pomocí počtu destiček k a jejich indexu lomu N . Stanovte také poměr amplitud elektrických polí ve vystupujícím světle, který přísluší kmitům kolmým a kmitům rovnoběžným s rovinou dopadu. Určete jeho číselnou hodnotu pro $N = 1,5$ a $k = 20$.



Obr. 5.6.

5.7. Mezní úhel při úplném odrazu je 60° . Určete Brewsterův úhel vzorku tohoto skla pro odraz světla přicházejícího zvenčí i pro odraz zevnitř. Vzorek skla je umístěn ve vzduchu.

5.8. Při úplném odrazu na rovinném rozhraní mezi dvěma dielektriky dochází ke změně fáze o hodnotu, ležící v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Tato hodnota závisí na úhlu dopadu φ . Pro kmity kolmé k rovině dopadu a kmity rovnoběžné s rovinou dopadu jsou změny fáze $\delta_\perp$ a $\delta_\parallel$ dány těmito funkcemi

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\left[\sin^2 \varphi - \left(N_2/N_1 \right)^2 \right]^{1/2}}{\cos \varphi} \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_\parallel}{2} = \frac{\left[\sin^2 \varphi - \left(N_2/N_1 \right)^2 \right]^{1/2}}{\left(N_2/N_1 \right)^2 \cdot \cos \varphi}.$$

Přitom $N_2 < N_1$. Jak velký je vzájemný fázový posuv $\delta_\parallel - \delta_\perp$ příslušející kmitům kolmým a kmitům rovnoběžným s rovinou dopadu v odražené vlně, dopadá-li na rozhraní lineárně polarizovaná vlna, jejíž polarizační rovina je libovolně orientována. Jaká vlna vzniká při úplném odrazu za uvedených podmínek?

(Návod: vypočtete $\operatorname{tg} \frac{\delta_\parallel - \delta_\perp}{2}$)

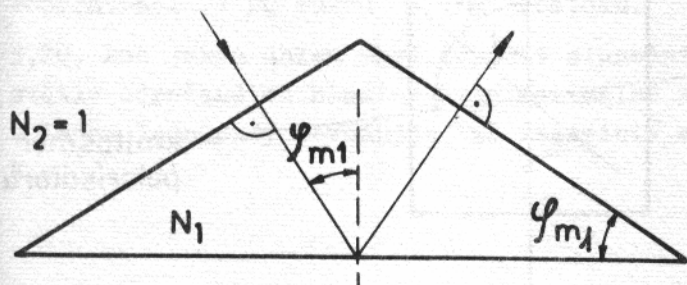
5.9. Využijte výsledku předchozího příkladu a určete při které hodnotě úhlu φ je fázový posuv $\delta_\parallel - \delta_\perp$ největší. Určete také tuto jeho největší hodnotu.

5.10. Na rovinném rozhraní dochází k totálnímu odrazu lineárně polarizované vlny, jejíž polarizační rovina svírá s rovinou dopadu úhel 45° . Vlna se odráží pod úhlem φ_{m1} , jemuž odpovídá maximální hodnota fázového posuvu

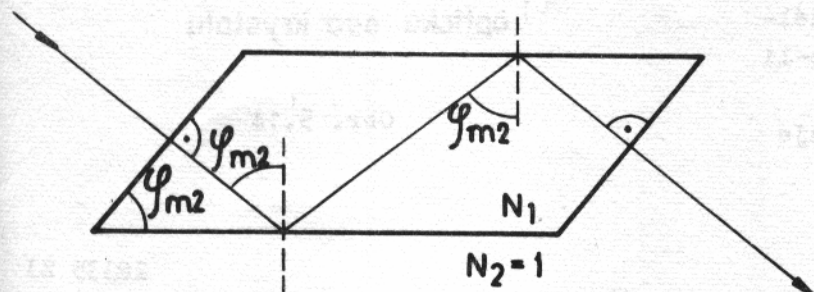
$(\delta_\parallel - \delta_\perp)_{\max}$. Navrhněte index lomu N_1 totálně odrážejícího hranolu a úhel dopadu φ_{m1} tak, aby za uvedených podmínek vznikla z lineárně polarizované vlny vlna polarizovaná kruhově. Vnější prostředí má index lomu $N_2 = 1$.

(Využijte výsledků obou předchozích příkladů.)

5.11. Za podmínek stejných jako v předchozím příkladě vzniká z lineárně polarizované vlny vlna polarizovaná kruhově. Rozdíl je pouze v tom, že tato vlna vzniká až po dvou úplných odrazech, uskutečněných v hranolu vyznačeném na obrázku. Navrhněte, stejně jako v předcházejícím příkladě, index lomu N_1 totálně odrážejícího hranolu a úhel φ_{m2} tak, aby nastal popsáný děj. Vnější prostředí má index lomu $N_2 = 1$.



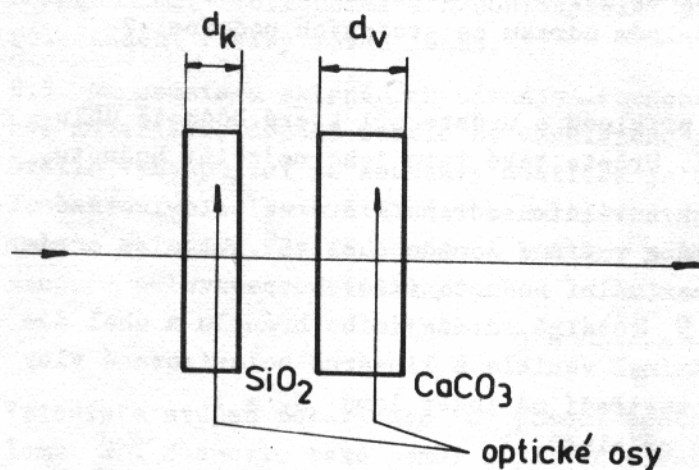
Obr. 5.10.



Obr. 5.11.

5.12. Z jednoosého krystalu je vyřezána destička, jejíž rovina je rovnoběžná s optickou osou krystalu. Jaké hodnoty může nabývat tloušťka d destičky, aby se destička chovala jako čtvrtvlnová pro určitou vlnovou délku. Stanovte z tohoto hlediska nejmenší přípustné tloušťky křemenné a vápencové destičky pro vlnovou délku 589,3 nm. Potřebné další údaje obsahuje tabulka III.

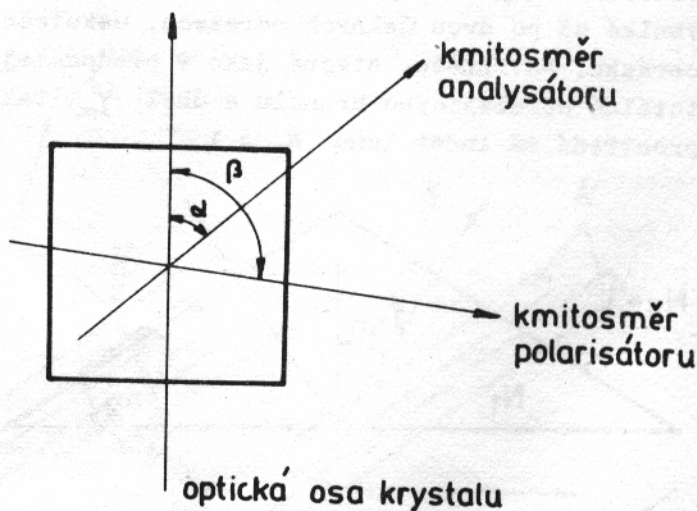
5.13. Výraz pro tloušťku čtvrtvlnové destičky uvedený v řešení předchozího příkladu závisí značně na vlnové délce. Chceme-li sestavit zařízení, které působí jako čtvrtvlnová deska v širším vlnovém oboru, můžeme užít dvou desek vyřezaných stejným způsobem z materiálů, z nichž jednomu přísluší rostoucí a druhému klesající závislost rozdílu $N_e - N_o$ na vlnové délce. Krystaly vhodné pro tento účel jsou křemen a vápenec. Najděte výrazy pro tloušťky d_v a d_k obou desek tak, aby se soustava znázorněná na obrázku chovala jako čtvrtvlnová deska v širokém oboru v okolí vlnové délky λ .



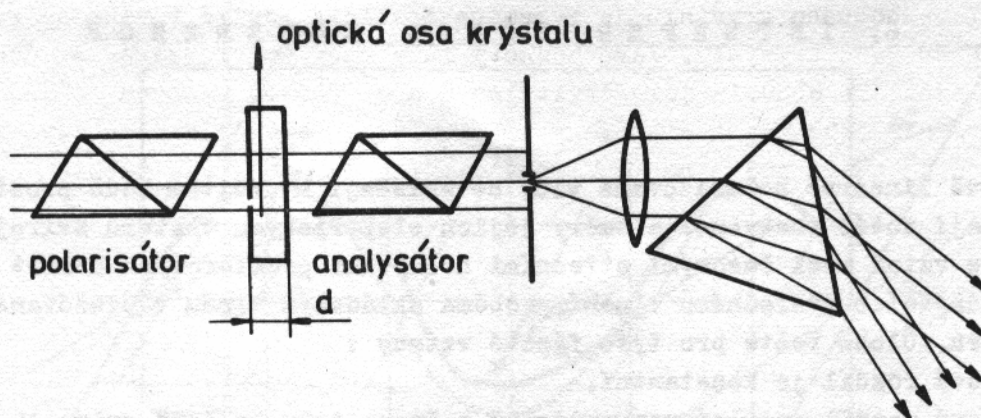
Obr. 5.13.

5.15. Destička tloušťky d vyřezaná rovnoběžně s optickou osou je kolmo osvětlena bílým lineárně polarizovaným světlem, jehož polarizační rovina svírá s optickou osou destičky úhel 45° . Světlo vycházející z destičky prochází nikolem zkříženým vzhledem k nikolu polarizujícímu a potom dopadá na štěrbinu spektroskopu. Kolik tmavých proužků budeme pozorovat ve spektru mezi vlnovými délkami 589,3 nm a 486 nm, jde-li o křemennou destičku 4 mm silnou. Další potřebné údaje poskytuje tabulka III.

5.14. Mezi dva nikoly je vložena destička vyřezaná z jednoosého krystalu. Optická osa tohoto výbrusu je rovnoběžná s rovinou destičky a svírá s kmitoměry nikolů úhly α a β (srovnej s obrázkem). Vypočtete intenzitu světla vystupujícího z této soustavy, je-li intenzita vstupujícího světla I a jeho vlnová délka λ . Destička má tloušťku d a indexy lomu N_e a N_o . Při výpočtu neberte v úvahu žádné světelné ztráty.



Obr. 5.14



Obr. 5.15.

5.16. Destička vyříznutá z jednoosého krystalu rovnoběžně s optickou osou je kolmo osvětlena kruhově polarizovaným světlem. Světlo vystupující z destičky prochází dále analyzujícím nikolem, jehož kmitosměr svírá s optickou osou materiálu destičky úhel α . Stanovte výraz pro intenzitu světla, které prochází touto soustavou, je-li vstupní intenzita I . Světelné ztráty neberte v úvahu.

5.17. Křemenná destička o tloušťce 1 mm je vyříznuta kolmo k optické ose a umístěna mezi dva nikoly v souhlasné poloze (kmitoměry obou nikolů jsou navzájem rovnoběžné). Jejich pomocí bylo dříve stanoveno, že rovina lineárně polarizovaného světla určité vlnové délky je po průchodu destičkou stočena o 18° . Jak silnou musíme zvolit její tloušťku, aby světlo této vlnové délky neprocházelo analyzujícím nikolem.

5.18. Díváme-li se skrze desku z dvojlomného materiálu, pozorujeme pouze jediný obraz pozorovaného předmětu, je-li tento předmět ve velké vzdálenosti. Odůvodněte toto tvrzení.

5.19. Cukerný roztok v trubici o délce 18 cm otáčí rovinu kmitů sodíkového světla (589,3 nm) o 30° . Jaké množství cukru se nachází v 1 m^3 roztoku, je-li specifická otáčivost $0,665 \text{ grad.m}^2\text{kg}^{-1}$. Specifickou otáčivostí se rozumí otočení roviny kmitů, které působí sloupec cukerného roztoku o délce 1 m a o koncentraci 1 kg cukru v 1 m^3 roztoku.

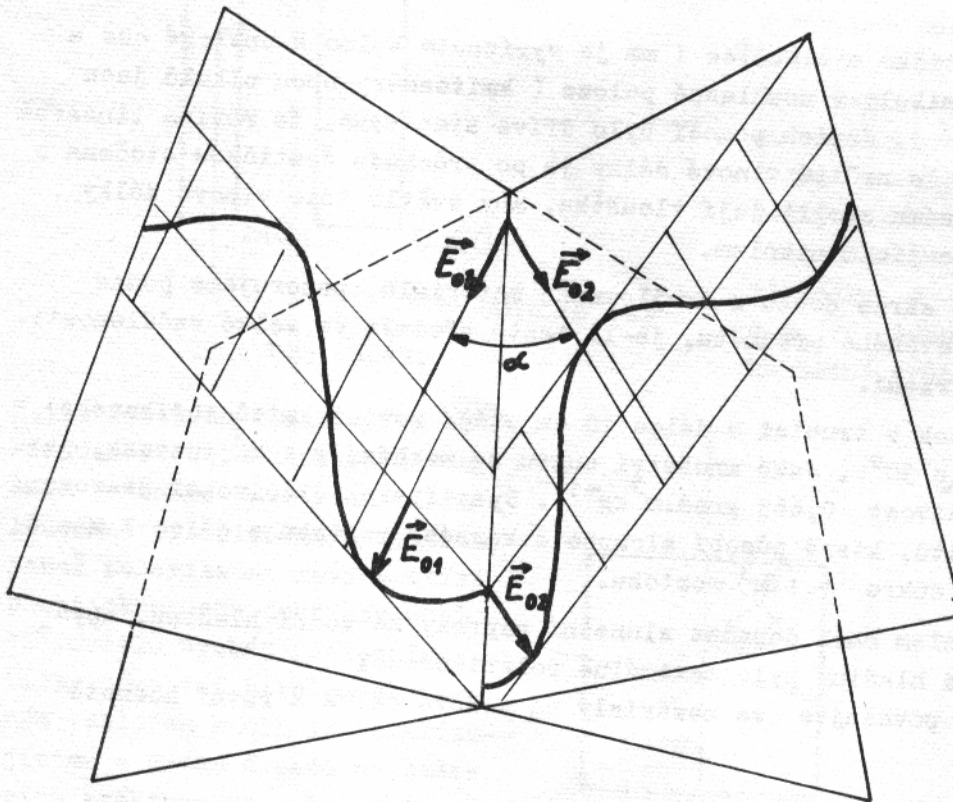
5.20. Pod jakým úhlem musí dopadat sluneční paprsky na vodní hladinu, aby světlo odražené od hladiny bylo maximálně polarizováno?

(Index lomu vody považujte za nezávislý na vlnové délce a rovný hodnotě $n = \frac{4}{3}$.)

6.1. Dvě lineárně polarizované vlny se skládají v určitém bodě prostoru. Obě vlny mají tutéž frekvenci a směry jejich elektrických vektorů svírají úhel α . Najděte vztah mezi časovými středními hodnotami prostorových hustot energie, odpovídajících výslednému vlnění a oběma skládaným vlnám v uvažovaném bodě prostoru. Úlohu řešte pro tyto fázové vztahy :

- Fázový rozdíl je konstantní.
- Fázový rozdíl se mění nepravidelně s časem tak, že jeho změna o 2π proběhne za dobu řádově rovnou pozorovací době.
- Fázový rozdíl mezi oběma vlnami se mění nepravidelně tak, že během pozorovací doby jsou všechny hodnoty fázového rozdílu stejně pravděpodobné.

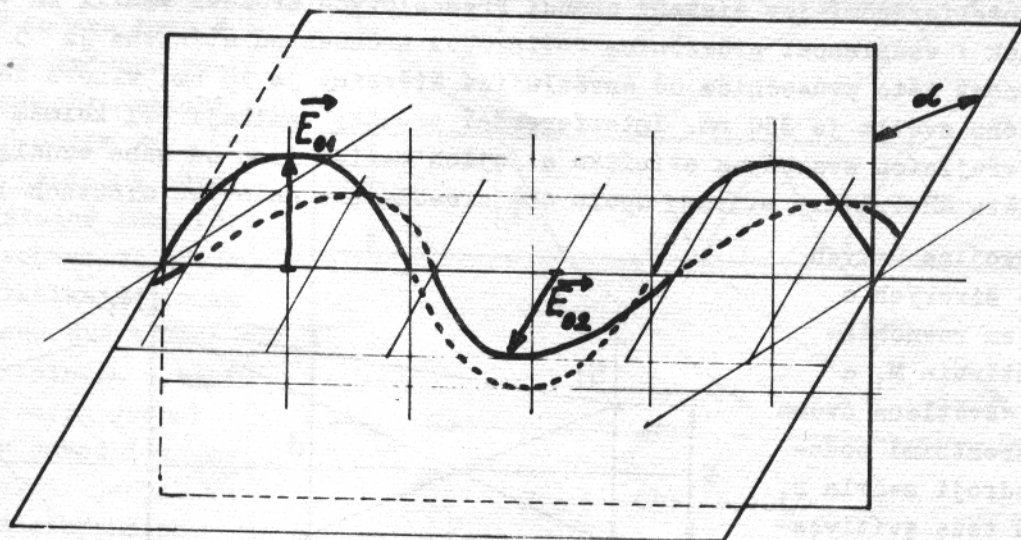
Prostorovou hustotu energie pokládejte za přímo úměrnou druhé mocnině elektrického pole; směry šíření obou rovinných vln a orientace kmitových rovin v obou těchto vlnách jsou libovolné ve všech třech uvažovaných případech.



Obr. 6.1.

6.2. Najděte tentýž vztah jako v předchozím příkladě pro totéž experimentální uspořádání, ale uskutečněné s vlnami různých frekvencí.

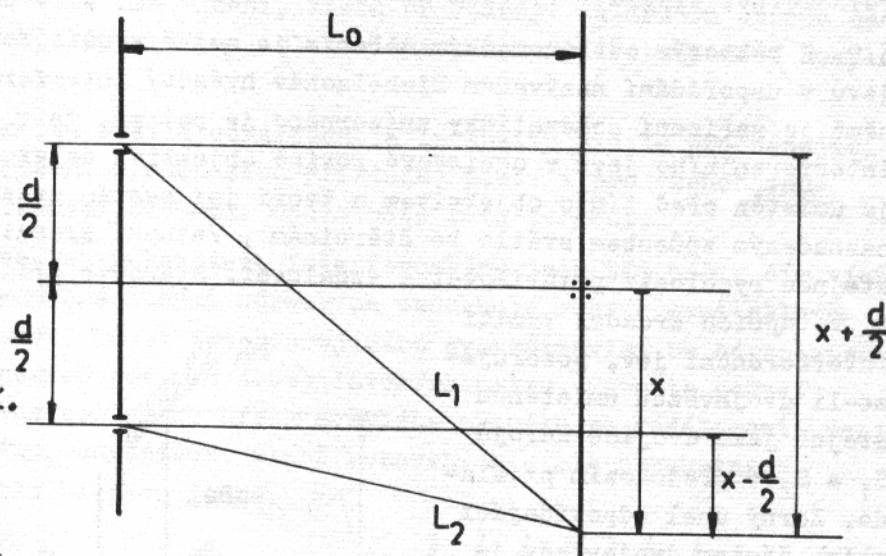
6.3. Dvě rovinné lineárně polarizované vlny téže frekvence a téhož směru šíření se skládají tak, že výsledná světelná intenzita je vždy rovna součtu světelných intenzit obou skládaných vln nezávisle na hodnotě fázového rozdílu. Kdy k takové situaci může dojít?



Obr. 6.3.

6.4. Dvě koherentní rovinné světelné vlny téže frekvence ω dopadají na stínítko přibližně ve směru kolmice k jeho rovině. Úhly dopadu obou vln se vzájemně liší. Na stínítku vznikají interferenční proužky, přičemž vzdálenost maxim dvou sousedních světlých proužků je d . Vypočtete, jak velký úhel svírají mezi sebou směry šíření obou vln. Stanovte, jak souvisí směr interferenčních proužků se směry šíření obou vln.

6.5. Stanovte rozdělení osvětlení na stínítku při Youngově interferenčním pokusu, za podmínky, že obě štěrby sloužící jako koherentní zdroje světla jsou velmi úzké ve srovnání s jejich vzájemnou vzdáleností. Předpokládejte, že v rovině štěrbin je časová závislost intenzity elektrického pole dána výrazem $E_0 \cdot \sin \omega t$. Při výpočtu užitte veličin uvedených v obrázku. K ohybovému jevu na štěrbinách nepřihlížejte.

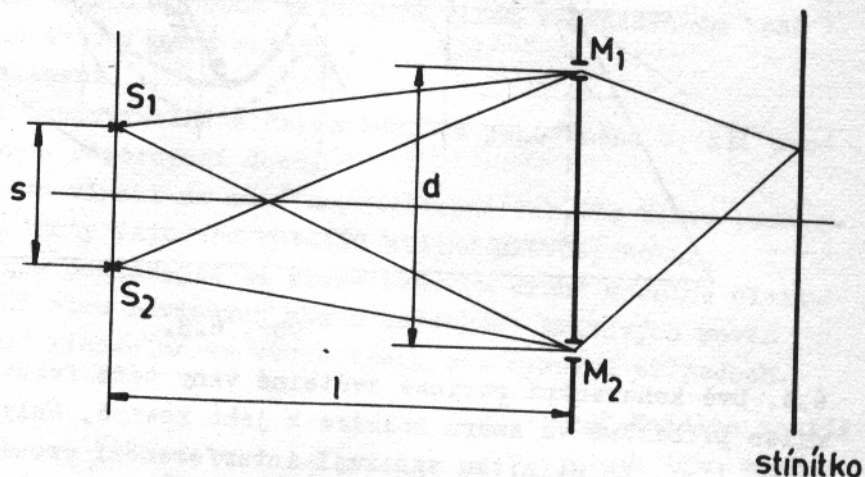


Obr. 6.5.

6.6. Jak se změní rozdělení osvětlení na stínítku při Youngově pokusu, popsaném v předchozím příkladě, změní-li se šířka jedné štěrby? K ohybovým na štěrbinách nepřihlížejte.

6.7. Interferenční jev získaný pomocí Fresnelových zrcadel vznikl za těchto podmínek : vzdálenost průsečnice rovin obou zrcadel od stínítka je 5 m, vzdálenost této průsečnice od osvětlující štěrbiny je 10 cm, vlnová délka použitého světla je 350 nm. Interferenční proužky vznikají při kolmém dopadu interferujících svazků na stínítko a jejich maxima jsou od sebe vzdálena 1 mm. Vypočtete úhel, který svírají spolu obě zrcadla (v úhlových minutách).

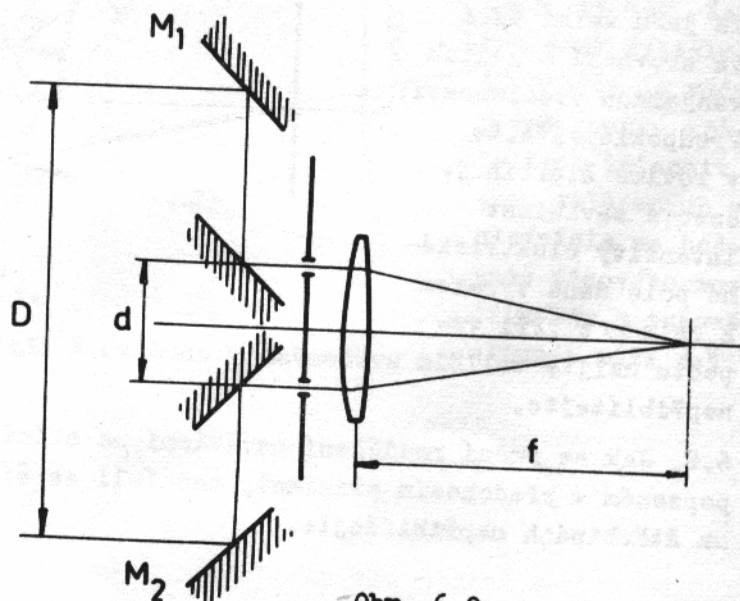
6.8. Dvojice úzkých stejně širokých a navzájem rovnoběžných štěrbin M_1 a M_2 je osvětlena dvěma nekoherentními bodovými zdroji světla S_1 a S_2 o téže svítivosti. Geometrické uspořádání experimentu je ukázáno na obrázku. V jaké vzdálenosti s musí být oba zdroje umístěny, aby se osvětlení stínítka ležícího za šterbinami stalo



Obr. 6.8.

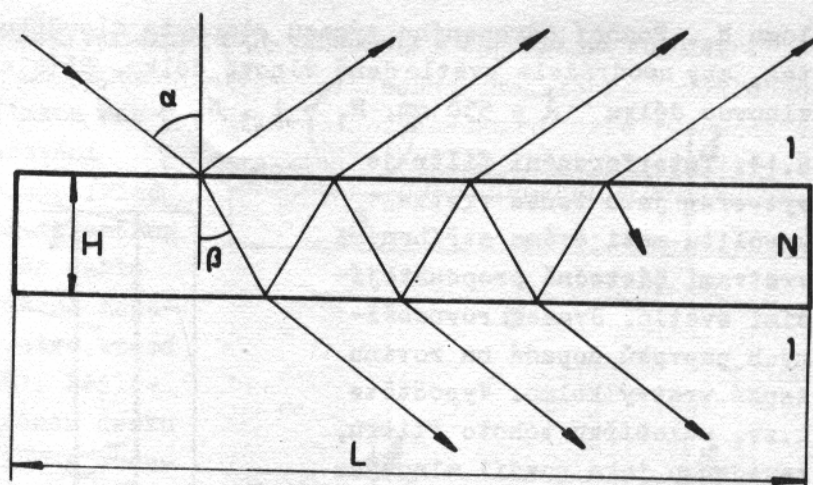
rovnoměrné, t.j. aby vymizel interferenční jev.

6.9. K některým astronomickým měřením je možné využít Youngova interferenčního jevu v uspořádání nazývaném Michelsonův hvězdný interferometr. Z obrázku, na němž je zařízení schematicky znázorněno, je patrné, že v něm jde o studium interferenčního jevu v ohniskové rovině objektivu dalekohledu. Interferometr je umístěn před tímto objektivem a tvoří jej systém zrcadel, které přivádějí naznačeným způsobem světlo ke štěrbinám . Vstupní zrcadla M_1 a M_2 se mohou stejnou rychlostí přibližovat a vzdalovat. Stanovte při kterých vzdálenostech D vstupních zrcadel vymizí interferenční jev, pozorujeme-li dvojhvězdu umístěnou stejně jako dvojice zdrojů S_1 a S_2 v předchozím příkladě. Zorný úhel odpovídající oběma částem dvojhvězdy je φ . Vypočtete také, jak velká je vzdálenost mezi interferenčními maximy v ohniskové rovině objektivu.



Obr. 6.9.

6.10. Na planparalelní desku o indexu lomu N dopadá ze vzduchu rovinná monochromatická vlna pod úhlem α . Vlna se částečně odráží a částečně láme. Při mnohonásobném vnitřním odrazu vznikají lomem do vzduchu dvě soustavy koherentních vlnění, postupujících jednak ve směru původní dopadající vlny, jednak ve směru odraženého pa-



Obr. 6.10.

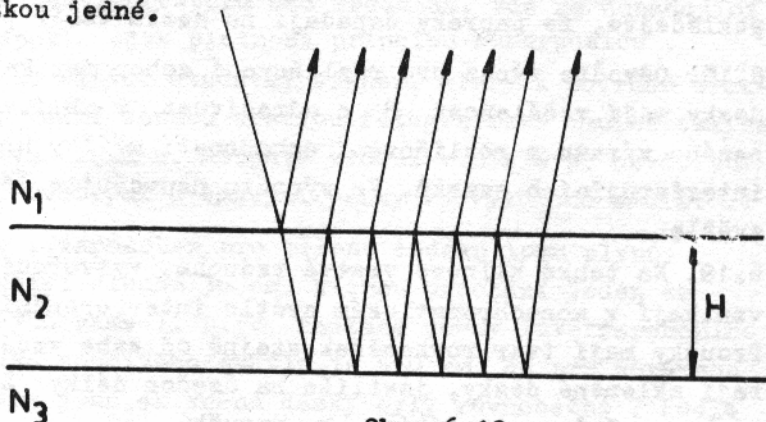
prsku. Využijte poznatků o odrazivosti, propustnosti a změnách fáze, získaných v příkladech předchozí kapitoly, a najděte výsledné elektrické pole všech superponovaných vlnění odražených od desky v závislosti na úhlu β . (Za místo superpozice těchto vln volte bod dostatečně vzdálený od desky a desku samu dostatečně rozlehlou. Kriterium této dostatečnosti souvisí s šířkou svazku primárních dopadajících paprsků při praktické realizaci uvažované situace.) Z výsledku superpozice elektrických polí příslušných jednotlivým vlnám stanovte poměr světelných intenzit v odraženém a dopadajícím světle.

Obdobný výpočet proveďte pro vlnění, která procházejí na druhou stranu desky ve směru primární dopadající vlny. Elektrická pole vyjádřete pomocí komplexních funkcí.

6.11. Výrazy pro intenzitu světla odraženého a intenzitu světla procházejícího deskou (uvedené v řešení předchozího příkladu) platí i pro vzduchovou vrstvu mezi dvěma skleněnými deskami. Odůvodněte toto tvrzení.

6.12. Světlé proužky ve Fabry-Perotově interferometru jsou tím užší, čím více svazků, vznikajících mnohonásobnými odrazy na vzduchové vrstvě mezi skleněnými deskami, interferuje. Počet interferujících svazků závisí na odrazivosti obou k sobě přivrácených povrchů desek interferometru. Odvoďte pomocí jmenované veličiny výraz pro poměr šířky světlého proužku ke vzdálenosti mezi dvěma sousedními proužky. Odrazivost slabě pokovených, ale propustných povrchů desek má hodnotu blízkou jedné.

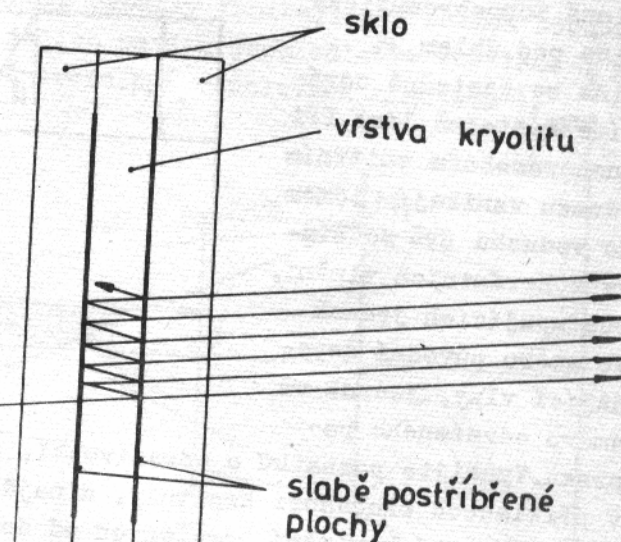
6.13. Najděte výraz pro intenzitu elektrického pole u vlnění, které se odráží ve směru kolmice od tenké vrstvy o tloušťce H a indexu lomu N_2 . Indexy lomu obou přilehlých prostředí vyhovují nerovnosti $N_1 < N_2 < N_3$. Světelné vlnění dopadá na vrstvu z prostředí o indexu



Obr. 6.13.

lomu N_1 . Pomocí odvozeného výrazu stanovte tloušťku a index lomu tenké vrstvy tak, aby neodrážela světlo dané vlnové délky. Příklad řešte numericky pro vlnovou délku $\lambda = 550 \text{ nm}$, $N_1 = 1$, $N_3 = 1,8$.

6.14. Interferenční filtr je vytvořen jako tenká vrstva kryolitu mezi dvěma stříbrnými vrstvami částečně propouštějícími světlo. Svazek rovnoběžných paprsků dopadá na rovinu tenké vrstvy kolmo. Vypočtete t.zv. pološířku tohoto filtru, zavedenou jako rozdíl vlnových délek, při nichž klesne intenzita prošlého světla na polovinu maximální hodnoty. Užijte vztahů odvozených v příkladě 6.10.



Obr. 6.14.

6.15. Na desky Fabry Perotova interferometru dopadá světlo dvou blízkých vlnových délek λ_1 a λ_2 . Při posuvu pohyblivé desky o délku d vznikne v interferometru k nových kroužků odpovídajících vlnové délce λ_1 a $(k+1)$ nových kroužků odpovídajících vlnové délce λ_2 . Určete velikost obou vlnových délek a jejich rozdíl.

6.16. Fabry-Perotův etalon se od Fabry-Perotova interferometru liší tím, že jeho desky jsou umístěny v pevné vzdálenosti dané tloušťkou křemenného nebo invarového prstence, k němuž jsou desky přitisknuty. Etalon slouží ke studiu jemné struktury spektrálních čar. Stanovte a vysvětlete, v jak širokém pásmu vlnových délek v okolí dané délky λ můžeme etalonem určovat strukturu této čáry, je-li vzdálenost desek etalonu d . Jak velký je nejnižší pozorovaný řád interferenčních maxim? Řešte numericky pro $d = 5 \text{ mm}$ a $\lambda = 500 \text{ nm}$.

6.17. Odvoďte výraz pro rozlišovací schopnost Lummer-Gehrckeovy desky a vypočtete její hodnotu pro vlnovou délku $\lambda = 500 \text{ nm}$. Deska je dlouhá 20 cm , její tloušťka je 5 mm a je vyrobena z křemene o indexu lomu $N = 1,544$. Předpokládejte, že paprsky dopadají na desku téměř pod úhlem dopadu 90° .

6.18. Odvoďte výraz pro rozlišovací schopnost Fabry-Perotova etalonu, jehož desky mají vzdálenost H a odrazivost r blízkou jedničce. Porovnáním odvozeného výrazu s rozlišovací schopností mřížky určete t.zv. efektivní počet interferujících svazků. Ve výpočtu neuvažujte žádné ztráty působené absorpcí světla.

6.19. Na tenké klínové vrstvě vzduchu, vytvořené mezi dvěma skleněnými deskami vznikají v monochromatickém světle interferenční proužky stejné tloušťky. Proužky mají tvar rovnoběžek stejně od sebe vzdálených. Jak velký úhel α svírají skleněné desky, jestliže na úsečce délky L , ležící v rovině vrstvy kolmo k proužkům, napočítáme k proužků.

tenká vrstva studovaného materiálu je napařena ve vakuu na rovinnou skleněnou podložku. Vrstva má všude stejnou tloušťku d s výjimkou místa A, které bylo při napařování vhodným způsobem zastíněno, například položením tenkého drátku na skleněnou podložku před napařováním. Na takto vytvořenou vrstvu je rovnoměrně napařena další pomocná tenká vrstva, která pokrývá i místo A (obr. a, b). Přiložíme-li nyní rovinnou skleněnou desku k pomocné vrstvě, vznikne tenký vzduchový klín, na němž je možno pozorovat interferenční proužky stejné tloušťky. Jejich směr lze mechanickým tlakem upravit tak, aby byly kolmé ke směru, v němž ležel stínicí drátek. Interferenční proužky vypadají při pozorování v monochromatickém světle přibližně jako na obrázku c.

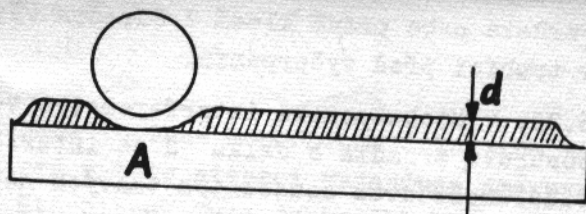
Vyjádřete tloušťku vrstvy studovaného materiálu pomocí vlnové délky λ použitého světla a veličin zavedených v obrázcích.

6.21. Na rovinné zrcadlo s odrazivostí $r = 1$ dopadá rovinná monochromatická vlna pod úhlem 45° . Uvažujme tyto případy : dopadající i odraženou vlnu lze popsat

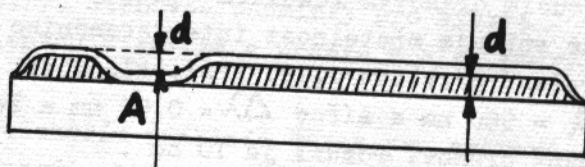
- veličinou skalární
- veličinou vektorovou, jejíž směr je rovnoběžný se směrem šíření vlny,
- veličinou vektorovou, jejíž směr je kolmý k rovině dopadu,
- veličinou vektorovou, jejíž směr je rovnoběžný s rovinou dopadu a současně kolmý ke směru šíření.

Stanovte ve všech čtyřech případech, jak závisí amplituda uvažované veličiny na vzdálenosti od zrcadla v té části prostoru nad zrcadlem, kde se dopadající a odražená vlna skládají. Předpokládejte platnost principu superposice. (Charakter skutečného světelného vlnění studoval Wiener, který k povrchu zrcadla přiložil skleněnou desku s velmi tenkou vrstvou fotografické emulze tak, že se utvořila tenká klínová vrstva vzduchu. Stojaté vlnění vzniklé po osvětlení při povrchu zrcadla se projeví světlými a tmavými pruhy ve vyvolané emulsi.)

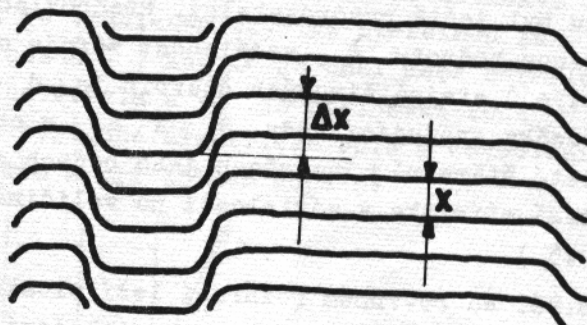
6.22. Jaminův interferometr je přizpůsoben pro měření indexu lomu plynů. Zkoumaný plyn je uzavřen v trubici dlouhé 30 cm, kterou prochází jeden ze dvou interferujících svazků. Vyčerpáme-li plyn, nastane posuv interferenčního jevu o 150 proužků. Vlnová délka použitého světla je 550 nm. Je pro správnou funkci interferometru třeba, aby jeho skleněné desky byly rovnoběžné? Podle



a



b



c

Obr. 6.20.

čeho poznáme, že index lomu plynu v trubici v závislosti na tlaku právě vzrůstá nebo právě klesá? Odvoďte výraz pro index lomu, který měl plyn v trubici před vyčerpáním.

6.23. V Michelsonově interferometru vznikají proužky stejné tloušťky. Při posunutí zrcadla o délku d se interferenční obraz posune o k -násobnou vzdálenost dvou sousedních tmavých nebo světlých proužků. Určete vlnovou délku použitého světla. Za jakých podmínek vznikají proužky stejné tloušťky a proužky stejného sklonu? Jaký tvar mají proužky stejného sklonu?

6.24. S rostoucí vzdáleností desek Fabry-Perotova interferometru nebo s rostoucím dráhovým rozdílem daným polohami zrcadel v Michelsonově interferometru se snižuje zřetelnost interferenčního jevu. Vysvětlete tento jev na podkladě řešení příkladu 1.19. Předpokládejte, že jde o spektrální čáru o vlnové délce $\lambda = 500 \text{ nm}$ a šířce $\Delta\lambda = 0,01 \text{ nm}$ a že maximální vzdálenost desek nebo zmíněný dráhový rozdíl je 10 cm .

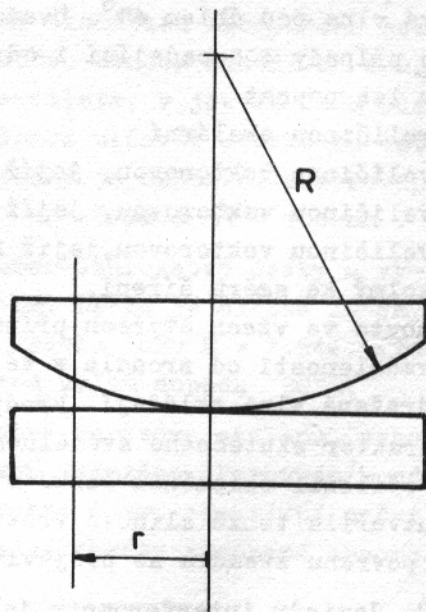
6.25. Jak velké mohou být nejvýše rozměry zdroje světla, jehož užijeme k osvětlení dvojité štěrbin v Youngově pokusu, aby interferenční jev na stínítku byl ještě pozorovatelný. Předpokládejte, že vlnová délka užitého světla má danou hodnotu λ , vzdálenost zdroje od dvojité štěrbin je l_0 a vzdálenost středů stejně širokých štěrbin je d . Řešte pro lineární zdroj ve tvaru úsečky spojující body S_1 a S_2 v obr. 6.8. Svítivost zdroje ve směru k dvojité štěrbině je ve všech jeho bodech stejná. Najděte výraz pro výsledné osvětlení stínítka v závislosti na veličině x (podobně jako v řešení a obrázku 6.5).

6.26. Na rovinném rozhraní leží ploskovypuklá čočka o velikém poloměru křivosti. Odvoďte podmínky pro rozložení maxim a minim Newtonových kroužků pozorovaných v odraženém světle.

6.27. Mýdlová blána silná méně než $0,1\lambda$ je pozorována v odraženém světle. Jeví se pozorovateli světlá nebo tmavá. Odůvodněte odpověď.

6.28. Mezi Newtonovými skly je vzduchová vrstva. Jeví se střed soustavy interferenčních kroužků světlý nebo tmavý? Odpověď vysvětlete.

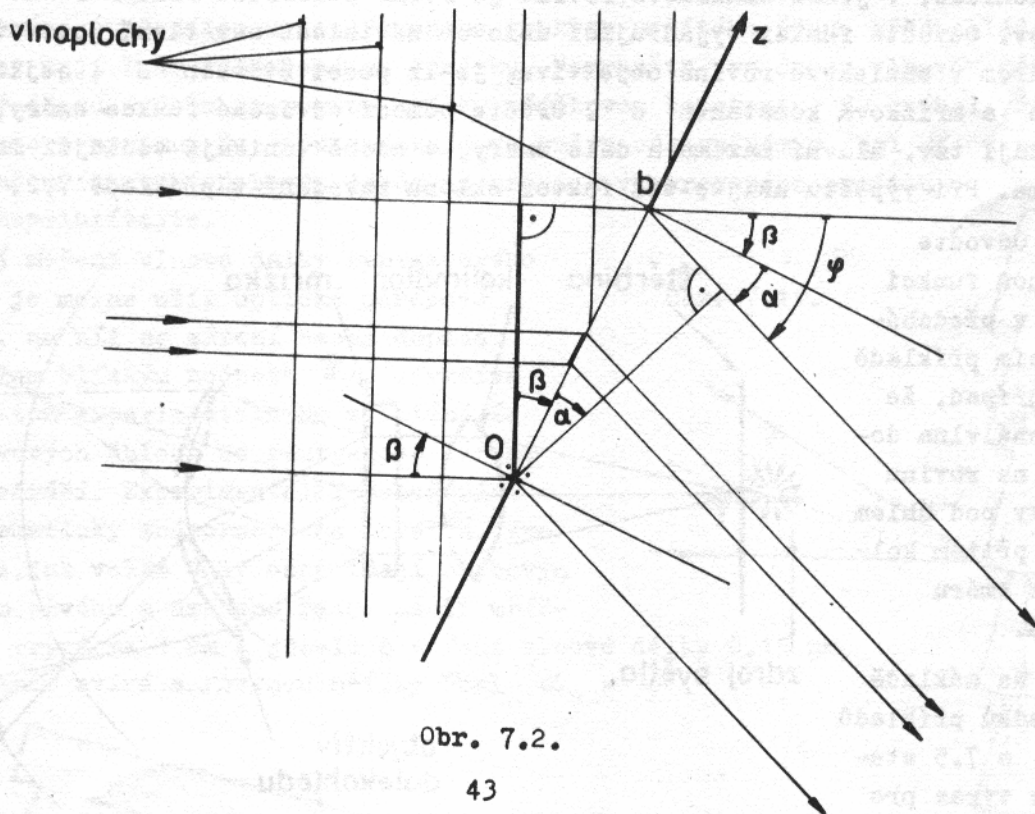
6.29. Vypočítejte nejmenší možnou tloušťku rovinné mydlinové blány, napnuté ve vzduchu, která se při pozorování v odraženém světle jeví jasně zelená a svírá-li normála blány s paprsky, vstupujícími do oka, úhel 35° . Index lomu blány ve vzduchu je $1,38$, jasně zeleným světlem rozumějte světlo s převažujícím zastoupením vlnových délek v okolí 500 nm .



Obr. 6.26.

7.1. Na přímou velmi dlouhou štěrbinu dopadá rovinná monochromatická vlna kolmo k rovině štěrbin. Odvoďte funkci, která v této situaci vyjadřuje směrové rozdělení světelné energie procházející štěrbinou. Tuto funkci hledejte jako závislost osvětlení velmi vzdáleného stínítka na úhlu φ , který představuje odchylku od původního směru dopadající vlny. Úlohu řešte jako ohyb Fraunhoferův, t.j. hledejte nejprve výsledné elektrické pole ve velké vzdálenosti (teoreticky v nekonečnu) od přímé štěrbin. Stanovte podmínky pro výskyt extrémních hodnot osvětlení velmi vzdáleného stínítka a určete z nich směry odpovídající maximum a minimum.

7.2. Odvoďte stejným způsobem jako v předchozím příkladě výraz pro směrové rozdělení světelné energie při Fraunhoferově ohybu na přímé štěrbině, dopadá-li rovinná monochromatická vlna na rovinu štěrbin pod úhlem β a kolmo ke směru štěrbin. Předpokládejte při výpočtu, že příspěvek plošného elementu štěrbin k výslednému elektrickému poli ve vzdáleném bodě za štěrbinou je přímo úměrný faktoru sklonu $\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta)$, kde β je úhel mezi normálou k plošnému elementu a směrem dopadajícího světla a α je úhel mezi touž normálou a směrem k bodu, v němž hledáme výsledné elektrické pole a osvětlení. Porovnejte chování světla při tomto šikmém a při kolmém dopadu.



Obr. 7.2.

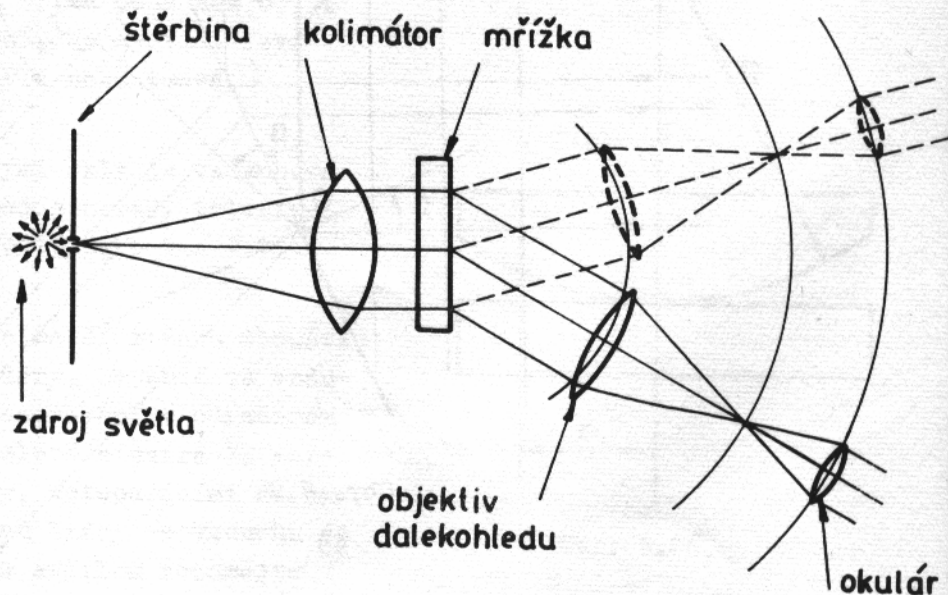
7.3. Štěrby užití při Youngově interferenčním pokusu jsou stejně široké a tak úzké, aby se pro pozorování prostým okem vytvořila na vzdáleném stínítku dostatečně široká hlavní ohybová maxima. Šířka štěrbin a jejich vzdálenost jsou zvoleny tak, že se hlavní ohybové maximum příslušné jedné štěrbině téměř přesně kryje s hlavním ohybovým maximum příslušným druhé štěrbině. Vypočtete, kolik interferenčních proužků vznikne v oblasti kryjících se hlavních maxim a vyjádřete tento počet šířkou štěrbin b a jejich vzájemnou vzdáleností d .

7.4. Dopadá-li rovinná monochromatická vlna na hranol spektroskopického přístroje, dochází po výstupu světla z hranolu k Fraunhoferovu ohybu ve smyslu příkladu 7.1. Hranol svými geometrickými rozměry omezuje dopadající vlnu podobně jako hrany přímé štěrby. K posouzení kvality přístroje je nutno vědět, jak blízko u sebe mohou být dvě spektrální čáry λ a λ_1 , aby je přístroj ještě rozlišil. Stanovte proto výraz $\lambda/(\lambda - \lambda_1)$, zvaný rozlišovací schopnost, z tohoto předpokladu: dvě blízké spektrální čáry budou přístrojem rozlišeny tehdy, padne-li hlavní ohybové maximum jedné vlnové délky do směru prvního ohybového minima druhé vlnové délky. Při výpočtu vezměte v úvahu symetrický chod světla hranolem a závislost indexu lomu materiálu hranolu na vlnové délce. Rozměry hranolu vyjádřete délkou t základny trojbokého hranolu, která je rovnoběžná s procházejícími paprsky (obr. 2.16.).

7.5. Rovinná monochromatická vlna vystupující z kolimátoru dopadá kolmo na rovinu optické průchozí mřížky. Do prostoru za mřížku je umístěn objektiv dalekohledu, v jehož ohniskové rovině je možno pozorovat Fraunhoferův ohybový jev. Odvoďte funkci vyjadřující úhlovou závislost osvětlení pozorovaného okulárem v ohniskové rovině objektivu, je-li počet štěrbin N , jejich šířka b a mřížková konstanta d . Určete pomocí odvozené funkce směry, v nichž vznikají tzv. hlavní maxima a dále směry, v nichž vznikají vedlejší maxima a minima. Při výpočtu užíjte též faktor sklonu zavedený v příkladě 7.2.

7.6. Odvoďte stejnou funkci jako v předcházejícím příkladě pro případ, že rovinná vlna dopadá na rovinu mřížky pod úhlem β a přitom kolmo ke směru vrypů.

7.7. Na základě výsledků příkladů 6.17 a 7.5 stanovte výraz pro rozlišovací schopnost optické mřížky.



Obr. 7.5.

7.8. Na průchozí optickou mřížku dopadá kolmo světelné vlnění obsahující dvě blízké vlnové délky. Jak velká musí být minimální šířka ryté části mřížky o hustotě 8000 vrypů na 1 cm, aby jí bylo možno rozlišit dvě stejně jasné spektrální čáry, ležící v okolí vlnové délky 500 nm, které jsou od sebe vzdáleny 0,1 nm.

7.9. Optická průchozí mřížka má mřížkovou konstantu d a je osvětlena rovnoběžným svazkem paprsků dopadajících kolmo na mřížku. Určete

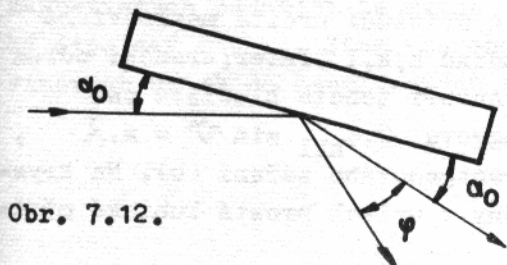
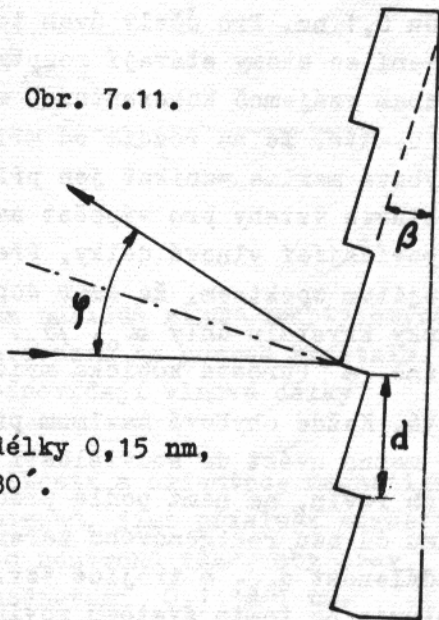
- a) který nejvyšší řád spektra (celé číslo k) můžeme při dané vlnové délce na této mřížce pozorovat,
- b) která je teoreticky největší použitelná vlnová délka $\lambda_{\max}$ pro tuto mřížku,
- c) zda se mohou překrývat spektra prvního a druhého řádu, osvětlujeme-li mřížku bílým světlem v oboru od 400 do 700 nm.

7.10. Na optické průchozí mřížce, osvětlené kolmo k její rovině rovnoběžným svazkem paprsků, dochází jednak k ohybovému jevu na každé štěrbíně, jednak k interferenci světla vycházejícího z jednotlivých štěrbin. Určete v jakém vztahu jsou mezi sebou šířka štěrbiny b a mřížková konstanta d , vymizí-li ve spektru maximum 3. řádu dané vlnové délky. Jak velká je dále mřížková konstanta, vznikne-li maximum 4. řádu této vlnové délky ve směru odkloněném o 90° od původního směru dopadajících paprsků? V kterých směrech pozorujeme pak maxima 1. a 2. řádu vlnové délky λ ?

7.11. Volbou vhodného profilu vrypů optické odrazové mřížky lze docílit podstatného zvýšení jasu pozorovaného spektra určitého řádu. Předpokládejte, že vrypy mají tvar vyznačený na obrázku. Navrhněte pro danou vlnovou délku a kolmý dopad světla na rovinu mřížky mřížkovou konstantu d a úhel β tak, aby ohybové maximum 2. řádu vznikalo ve směru odkloněném o úhel φ od normály k rovině mřížky. K ohybovým jevům na hranách vyobrazeného profilu vrypů nepřihlížejte.

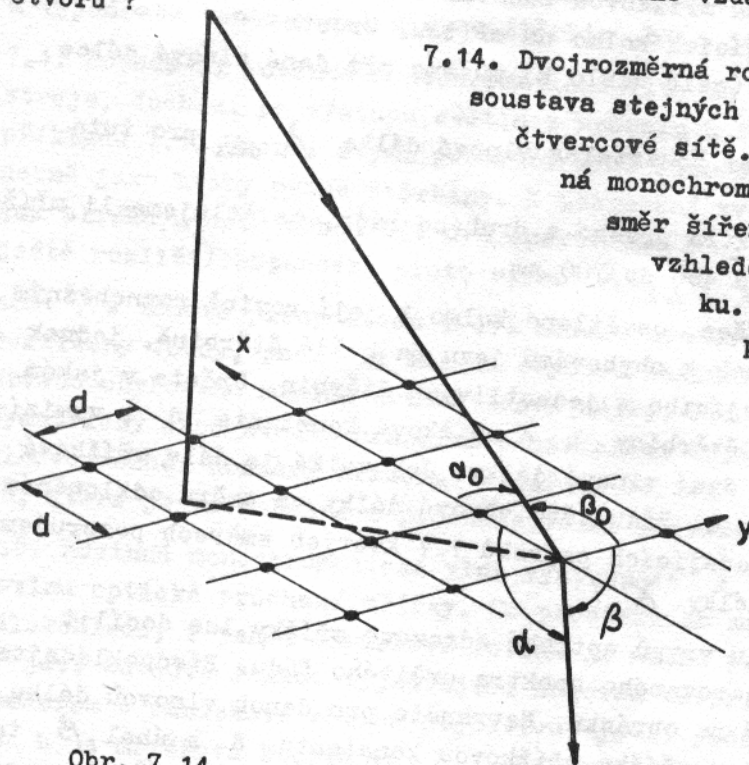
7.12. K měření vlnové délky rentgenového záření je možné užít optické odrazové mřížky, na níž se záření nechá dopadat pod úhlem blízkým hodnotě $\pi/2$. Využívá se při tom experimentálního zjištění, že při takových úhlech se rentgenové záření zcela odráží. Experimentální uspořádání je schematicky znázorněno na obrázku. Vypočtete, jak velké úhly odpovídají ohybovým maximum prvního a druhého řádu, má-li mřížka 500 vrypů na 1 mm a jde-li o záření vlnové délky 0,15 nm, jehož směr svírá s rovinou mřížky úhel $\alpha_0 = 30^\circ$.

Obr. 7.11.



Obr. 7.12.

7.13. Jednorozměrná mřížka je vytvořena jako řada stejných otvorů v tenké neprůhledné desce. Otvory jsou rozloženy na přímce ve stejných vzdálenostech d od sebe. Na rovinu desky dopadá rovinná monochromatická vlna o délce λ , jejíž směr šíření svírá se směrem řady otvorů úhel α_0 . Určete směry, v nichž se vytvoří hlavní maxima Fraunhoferova ohybového jevu. Co budeme pozorovat na stínítku postaveném ve vhodné vzdálenosti rovnoběžně s řadou otvorů?



Obr. 7.14.

7.14. Dvojměrná rovinná mřížka je vytvořena jako soustava stejných kruhových otvorů v průsečících čtvercové síti. Na rovinu mřížky dopadá rovinná monochromatická vlna o délce λ , jejíž směr šíření je určen směrovými kosiny vzhledem k osám vyznačeným v obrázku. Určete směry, v nichž se po průchodu mřížkou vytvoří hlavní maxima.

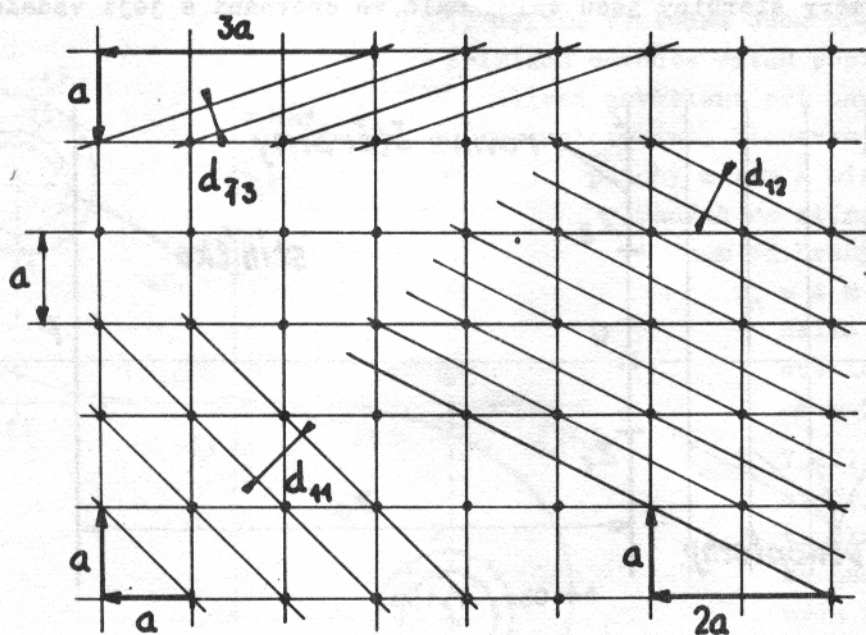
7.15. Zkoumání stavby krystalů se provádí prostřednictvím studia ohybových jevů, k nimž dochází na atomech nebo iontech pravidelně rozmístěných v objemu krystalu, jestliže krystal ozáříme vhodným zářením. Vzhledem k velikosti meziatomových vzdáleností

v pevných látkách je k těmto účelům vhodné rentgenové záření s vlnovou délkou řádu 0,1 nm. Pro účely úvah tohoto příkladu stačí poznamenat, že pod účinkem záření se atomy stávají rozptylovými centry, které mají z optického hlediska význam vzájemně koherentních zdrojů.

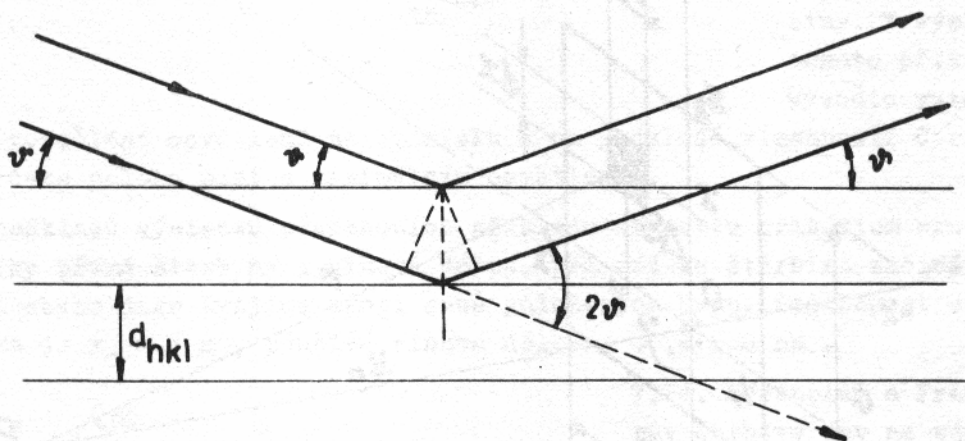
Ukažte, že na rozdíl od mřížky jednorozměrné a dvourozměrné mohou hlavní ohybová maxima vznikat jen při užití záření zcela určitých vlnových délek. Sestavte vztahy pro výpočet směrových úhlů hlavních maxim a určete k nim odpovídající vlnové délky. Předpokládejte, že krystal je ozářován zářením se spojitým spektrem, že směr dopadajícího záření svírá s hranami elementární buňky krystalu úhly $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ a že elementární buňka má tvar krychle o hraně a (prostá kubická mřížka).

7.16. Každé ohybové maximum při ohybu rentgenového záření na krystalové mřížce je možno uvést do souvislosti s určitým systémem navzájem rovnoběžných atomových rovin, na němž podle představ W.H. a W.L. Bragga, dochází k interferenčnímu odrazu rentgenového záření. Systému rovin přísluší určitá meziorovinná vzdálenost d_{hkl} a trojice tzv. Millerových indexů h, k, l . Interferenční odraz splňuje na tomto systému rovin zákon odrazu. Autoři tohoto hlediska pak dospěli k rovnici známé jako rovnice Vulf-Braggova $2 \cdot d_{hkl} \cdot \sin \vartheta = n \cdot \lambda$, která skutečně určuje směry silných reflexí rentgenového záření (b). Na krystalu NaCl, v němž jsou ionty střídavě umístěny v uzlech prosté kubické mřížky,

dochází k reflexi prvního řádu pod úhlem $\vartheta = 15^\circ 50'$. Použitá vlnová délka je $0,1542 \text{ nm}$ (čára K_{α} u mědi). Určete odpovídající mezirovinnou vzdálenost a !



Obr. 7.16a.

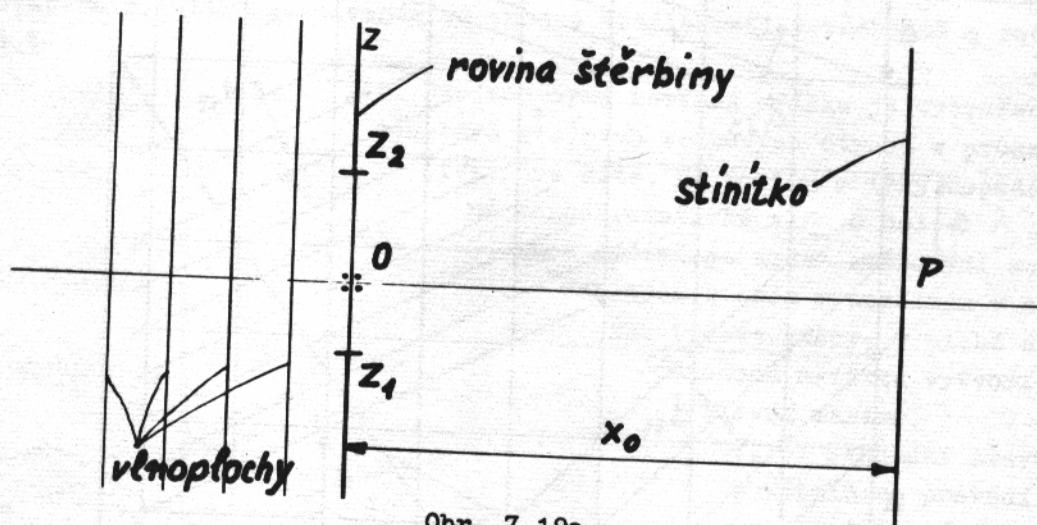


Obr. 7.16b

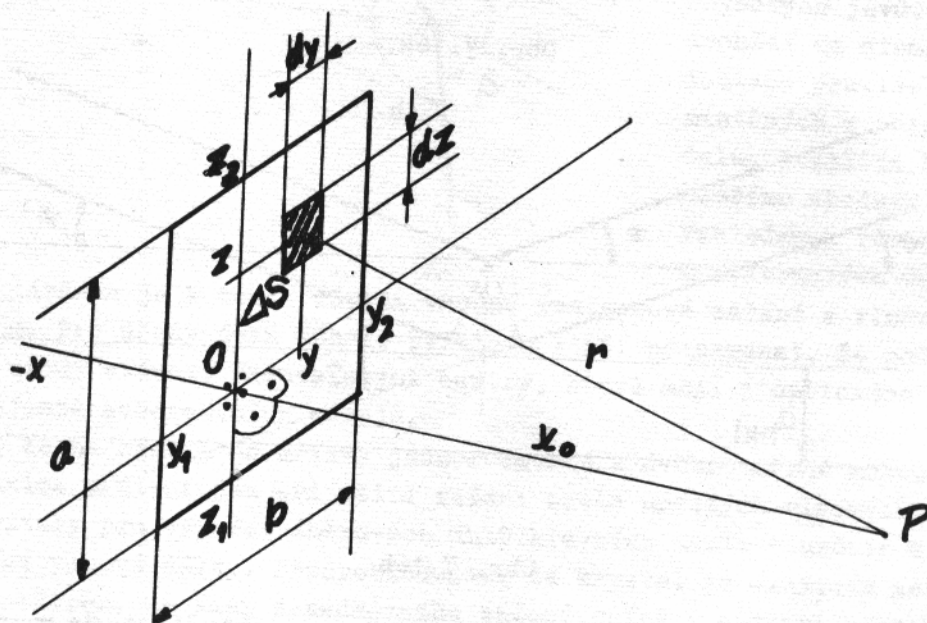
7.17. Studium povrchu krystalů lze uskutečnit na základě studia rozptýlených elektronů vznikajících po dopadu elektronového svazku na povrch krystalu. Stanovte obor energií těchto elektronů, jemuž odpovídají vlnové délky de Broglieových vln od $0,1$ do 1 nm .

7.18. Ke studiu magnetických struktur, t.j. velikostí a orientace magnetizací magnetických podmříží je možno využít ohybu neutronů, jímž přísluší magnetický dipolový moment. Stanovte obor energií těchto neutronů tak, aby obor vlnových délek de Broglieových vln ležel mezi hodnotami $0,1$ a 1 nm .

7.19. Na štěrbinu ve tvaru obdélníka o stranách a a b dopadá rovinná monochromatická vlna ve směru normály k rovině štěrbin. Stanovte rozdělení osvětlení na stínítku, které je umístěno ve vzdálenosti x_0 za rovinou štěrbin. Rozměry štěrbin jsou velmi malé ve srovnání s její vzdáleností od stínítka.



Obr. 7.19a



Obr. 7.19b

7.20. Cornuova spirála je vyjádřena parametricky těmito Fresnelovými integrály:

$$x = C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} t^2 \cdot dt \quad , \quad y = S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} t^2 \cdot dt \quad .$$

Pomocí těchto rovnic

- ukážte, že parametr u znamená délku oblouku spirály mezi počátkem a bodem $x = C(u)$, $y = S(u)$,
- najděte vztah mezi úhlem, který svírá tečna v bodě $x = C(u)$, $y = S(u)$ s osou x a hodnotou parametru u v tomto bodě,
- najděte vztah mezi parametrem u a poloměrem křivosti spirály v bodě

$$x = C(u), y = S(u),$$

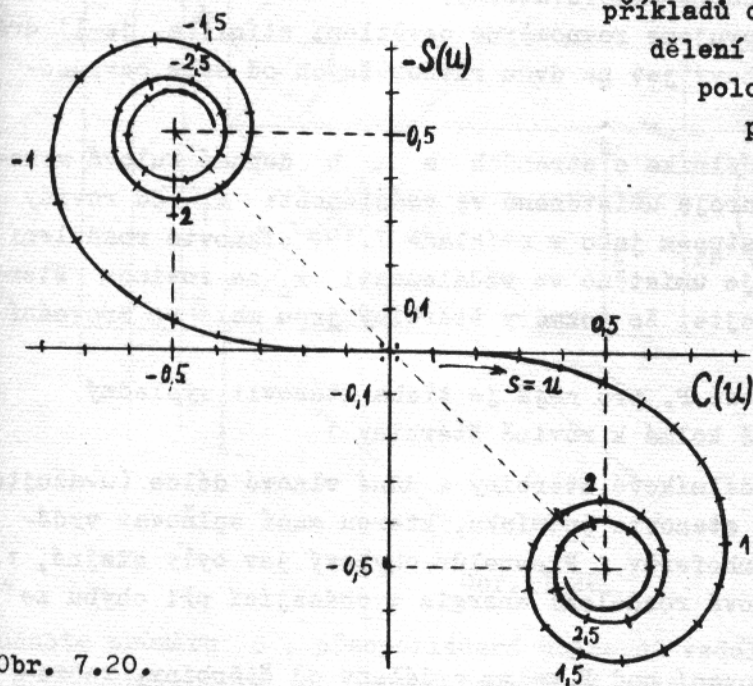
- d) stanovte přibližné hodnoty parametru u , pro které funkce $F(u) = C^2(u) + S^2(u)$ nabývá maximálních a minimálních hodnot.

7.21. Užitím výsledků obou předchozích příkladů odvoďte vztah popisující rozdělení osvětlení při ohybu na hraně poloroviny. Stanovte přibližné polohy maxim a minim pozorovaných na stínítku vzdáleném od hrany o délku

$$x_0 = 4 \text{ m. Vlnová délka použitého světla je } \lambda = 550 \text{ nm.}$$

7.22. Obdélníkový otvor, na němž vzniká ohybový jev za podmínek popsaných v příkladě 7.19, má tvar dlouhé úzké štěrbin. Z výsledku tohoto příkladu vyvoďte vztah vy-

Obr. 7.20.



7.25. Užitím výsledků příkladu 7.19. stanovte rozdělení osvětlení na stínítku při ohybu na tenkém drátu. Podmínky experimentu jsou tytéž jako v uvedeném příkladě. Na základě odvozeného výrazu určete podmínku, kterou musí splňovat průměr drátu d , vlnová délka λ a vzdálenost x_0 mezi drátem a stínítkem, aby ohybový jev na drátu byl dobře pozorovatelný.

(Je-li drát příliš tenký, pozorujeme rovnoměrné osvětlení stínítka, je-li drát příliš tlustý, pozorujeme ohybový jev na dvou rovnoběžných od sebe odvrácených hranách.)

7.26. Na šterbinu ve tvaru obdélníka o stranách a a b dopadá kulová monochromatická vlna z bodového zdroje umístěného ve vzdálenosti x_1 od roviny šterbiny. Stejným početním postupem jako v příkladě 7.19. stanovte rozdělení osvětlení na stínítku, které je umístěno ve vzdálenosti x_0 za rovinou šterbiny (obr. 7.19b). Předpokládejte, že rozměry šterbiny jsou malé ve srovnání se vzdálenostmi x_0 a x_1 .

(Spojnice bodového zdroje a bodu P, pro nějž je třeba stanovit výsledný elektrický vektor, není obecně kolmá k rovině šterbiny.)

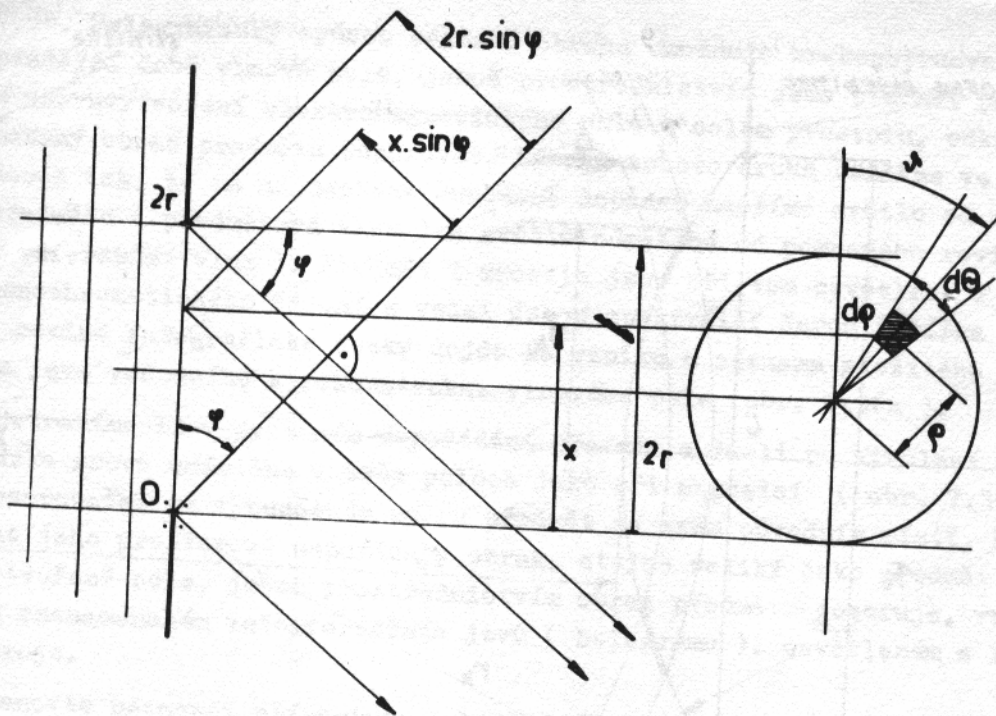
7.27. Při daných rozměrech obdélníkové šterbiny a dané vlnové délce (uvažujte situaci předchozího příkladu) stanovte podmínku, kterou musí splňovat vzdálenosti x_0 a x_1 , aby Fraunhoferův i Fresnelův ohybový jev byly stejné, t.j. aby jim odpovídala tatáž směrová rozdělení energie vycházející při ohybu ze šterbiny.

(Jsou-li bodový zdroj i pozorovací bod P velmi vzdáleny od šterbiny, teoreticky v nekonečnu, vznikají ohybové jevy Fraunhoferovy. V opačném případě, kdy alespoň jeden z uvedených bodů je v konečné, dostatečně malé vzdálenosti od šterbiny, vznikají ohybové jevy Fresnelovy).

7.28. Rovinná monochromatická vlna dopadá ve směru normály na tenkou neprůhlednou desku, v níž je vytvořen kruhový otvor o poloměru r . Odvoďte funkci, která vyjadřuje směrovou závislost energie, vyzařované při tomto Fraunhoferově ohybu z kruhové šterbiny, t.j. rozdělení osvětlení na velmi vzdáleném stínítku. Jak budou rozložena maxima a minima odvozené funkce a jak velké jsou odpovídající hodnoty osvětlení? Jak velká musí být vzdálenost stínítka a šterbiny, abychom mohli tvrdit, že pozorujeme Fraunhoferův ohybový jev. Průměr kruhové šterbiny je 0,5 mm, vlnová délka 500 nm.

7.29. K určení rozlišovací schopnosti optických zobrazovacích soustav se užívá výsledků teorie Fraunhoferova ohybu na kruhovém otvoru. Jak velká může být úhlová vzdálenost dvou blízkých hvězd téže svítivosti, abychom mohli rozhodnout, zda jde o jednu nebo dvě hvězdy. Objektiv dalekohledu, jehož rozlišovací schopnost máme stanovit, využívá svazku dopadajících paprsků o průměru 5 m. Počítejte pro vlnovou délku 500 nm.

7.30. Temná komora o hloubce 30 cm zobrazuje předměty vzdálené nejméně 2,7 m. Proveďte odhad velikosti průměru kruhového vstupního otvoru tak, aby obraz pozorovaný na zadní stěně komory, byl co nejostřejší. Příklad řešte pro vlnovou délku 500 nm tak, že položíte rovnost mezi průměrem světlé kruhové stopy vznikající z hlediska geometrické optiky (jako v příkladě 2.2.) a průměrem kružnice, která představuje první minimum ohybového jevu. Ověřte, zda vypočte-



Obr. 7.28.

ná hodnota průměru d , předpokládaná nejmenší vzdálenost zobrazovaných předmětů a hloubka komory jsou při dané vlnové délce dostatečně velké, abychom mohli hovořit v této situaci o Fraunhoferově ohybovém jevu. Na kolik Fresnelových půlvlnových zón je možno rozdělit vlnoplochu nacházející se ve vstupním otvoru, pozorujeme-li otvor ze vzdálenosti rovné hloubce komory?

7.31. Dalekohledem pozorujeme v noci ze vzdálenosti 1 km dva stejné bodové zdroje světla, které jsou od sebe vzdáleny 2 cm. Rozlišovací schopnost dalekohledu je taková, že je možno konstatovat existenci dvou zdrojů, aniž by pozorovatel o pozorovaném předmětu něco věděl. Jak velký může být teoreticky nejmenší průměr objektivu a jak velké musí být zvětšení takového dalekohledu, je-li rozlišovací mez lidského oka jedna úhlová minuta? Počítejte pro vlnovou délku 500 nm.

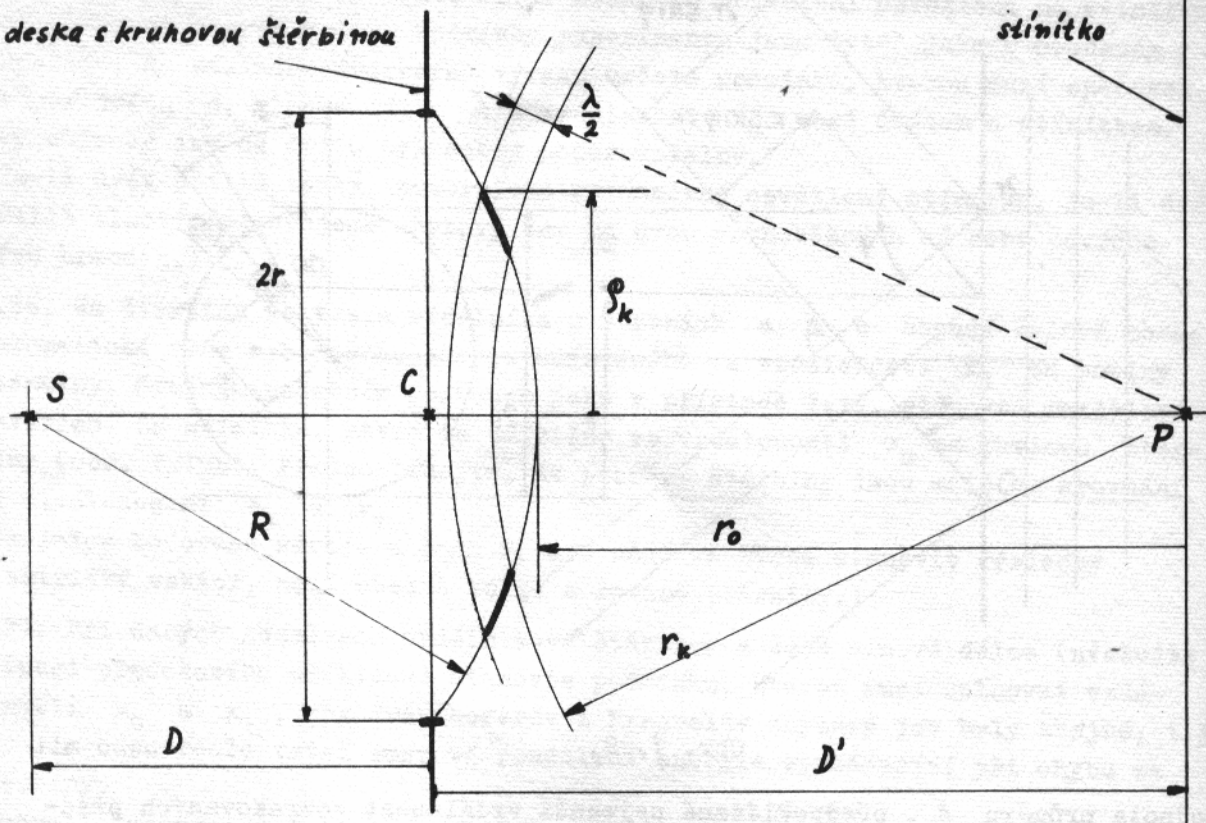
7.32. Kruhovú šterbina o průměru $2r$ je osvětlena z bodového zdroje S monochromatickým světlem vlnové délky λ . Zdroj S , střed šterbiny C , vrchol V vlnoplochy proložené okrajem šterbiny a bod P na stínítku leží na jedné přímce kolmé k rovině šterbiny i k rovině stínítka. Při realizaci tohoto ohybu je $R \neq D$ a $r_0 \neq D'$. Pomocí R a r_0 najděte

- výraz pro poloměr ρ_k k -té Fresnelovy zóny,
- výraz pro plošnou velikost ΔS_k k -té zóny,
- počet zón, které se vejdou do kruhovú šterbiny (n).

7.33. Na základě Fresnel-Kirchhoffova vzorce pro výpočet ohybového jevu ukažte, že malé natočení kruhovú šterbiny podél některého jejího průměru (obráz. 7.32 na další straně) nezpůsobí změnu výsledné amplitudy elektrického pole v bodě P .

deska s kruhovou štěrbinou

stínítka



Obr. 7.32.

7.34. Navrhněte zonální desku, která by působila jako tenká čočka o ohniskové dálce 1 m . Desku navrhněte tak, že Fresnelovy zony jsou pro světlo střídavě zcela propustné a zcela nepropustné. Výpočet proveďte pro vlnovou délku 500 nm a předpokládejte průměr největší nezakryté zony 2 cm. Vypočtete poloměr nejmenší zony a stanovte počet nezakrytých zon (pásem).

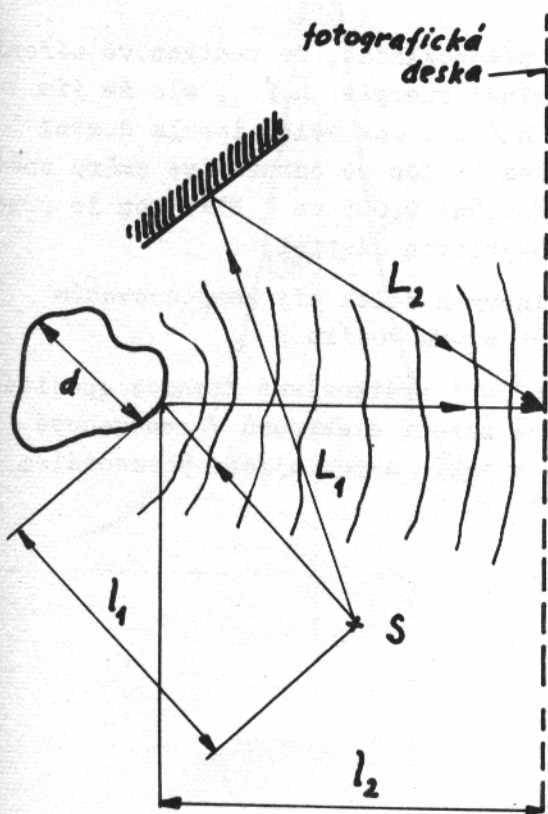
7.35. Lidské oko má předmětovou ohniskovou dálku $f = 1,71$ cm, obrazovou ohniskovou dálku $f' = -2,28$ cm a průměr zornice 3 mm. Střední rozměry buněk citlivých na světlo (čípků) a jejich střední vzdálenost l (t.j. střední vzdálenost sousedících buněk) jsou rovny ve žluté skvrně 24 μ m . Vypočtete hodnotu fyziologického mezního úhlu, t.j. rozlišovací meze oka, z hlediska geometrické optiky a porovnejte ji s rozlišovací schopností oka stanovenou z hlediska ohybu na kruhovém otvoru zornice (na podkladě Rayleighova kritéria). Porovnejte také rozměry čípků s rozměry ohybového jevu vznikajícího na sítnici. (Návod : Předpokládejte , že

- pro rozlišení dvou svítících bodových zdrojů je třeba, aby mezi jejich obrazy na sítnici byla alespoň jedna neosvětlená buňka,
- maxima a minima ohybového jevu na sítnici se vytvoří v těchže místech , jako by šlo o Fraunhoferův ohyb,
- použité světlo má vlnovou délku 550 nm .)

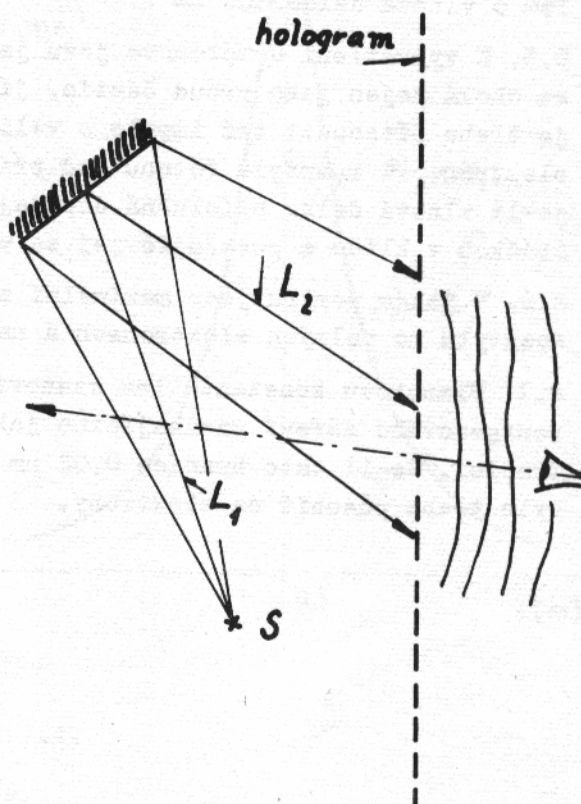
7.36. Holografický způsob záznamu obrazu umožňuje zrekonstruovat v libovolné pozdější době vlnové pole, jehož prostřednictvím jsme předmět pozorovali. Jde o znovuvytvoření elektromagnetického pole v celém prostoru, odkud chceme zaznamenat obraz předmětu pozorovat. Záznam tohoto druhu vznikne ve fotografické desce tak, že na ni necháme současně dopadat nepřímé světlo od osvětleného předmětu (předmětová vlna) a světlo odražené od pomocného rovinného zrcadla (referenční vlna). Předmět i zrcadlo jsou při tom osvětleny z jediného zdroje monochromatického záření s velmi úzkou spektrální čarou (šířka 0,001 až 0,01 nm). V rovině fotografické desky dojde ke vzniku a záznamu složitého interferenčního jevu vedoucího k rekonstrukci vlnového pole (obr. 7.36a).

Odstraníme-li v popsaném uspořádání předmět a je-li po vyvolání fotografická deska znova umístěna v téže poloze jako při expozici (obr. 7.36b), uvidí pozorovatel ve vyznačeném směru předmět na svém původním místě. Bude nyní vnímat jeho prostorově uspořádaný obraz, stejně veliký jako předmět sám. Znova vytvořené pole, jehož prostřednictvím obraz předmětu pozoruje, vzniká ohybem na zaznamenaném interferenčním jevu (hologramu), osvětleném z laserového zdroje.

Stanovte nejmenší přípustnou koherenční délku na základě vzdáleností vyznačených v obrázku a na základě tohoto odhadu určete maximální přípustnou šířku použité spektrální čáry. Předpokládejte, že hodnoty všech uvedených vzdáleností jsou řádu 1 m a rozměry d předmětu jsou řádu 0,1 m. Uvažujte vlnovou délku 700 nm.



Obr. 7.36a



Obr. 7.36b

8.1. Vypočtete frekvenci monochromatického záření ze zdroje dávajícího energetický výkon $3 \cdot 10^{-12}$ W, který odpovídá 10^6 fotonů za vteřinu.

8.2. Určete energii, impuls a ekvivalentní hmotu fotonu, jemuž přísluší vlnová délka a) 600 nm (viditelné záření)

b) 0,1 nm (záření rentgenové)

c) 0,001 nm (záření γ).

Při které vlnové délce je energie fotonu rovna klidové energii elektronu?

8.3. Pomocí vztahu $m = m_0 / (1 - \beta^2)^{-1/2}$, kde $\beta = v/c$, ukažte, že klidný elektron nemůže zcela pohltnout energii fotonu a pohybující se elektron nemůže zcela vyžářit (t.j. najednou jedním fotonem) svou kinetickou energii. O elektronu uvažujte jako o volně pohyblivé částici.

8.4. Elementární vysvětlení fotoelektrického jevu vyžaduje učinit předpoklad, že světelná energie je rozdělena do oddělených množství (kvant) energie nazývaných fotony. Energie fotonu zcela pohlceného elektronem v kovu, je spotřebována jednak na uvolnění z kovu, jednak se projeví jako kinetická energie vystoupivšího elektronu. Červený práh fotoefektu pro draslík je 577 nm. Jaká je minimální energie světelného kvanta, při níž na draslíku dochází k fotoemisi? Jaká je maximální energie fotoelektronů, které byly z draslíku uvolněny světlem o vlnové délce 400 nm?

8.5. K vysvětlení Comptonova jevu je třeba předpokládat, že rentgenové záření se chová nejen jako proud částic, jímž přísluší energie $h\nu$, ale že jím je třeba přisoudit též impuls o velikosti $h\nu/c$. Jak velký impuls dostal elektron při rozptylu fotonu pod přímým úhlem (foton se odrazil ve směru zpět), je-li vlnová délka příslušná dopadajícímu fotonu 0,005 nm? Elektron je před srážkou v klidu a považujte jej za volně pohyblivou částici.

8.6. V jakém poměru jsou maximální změny vlnových délek při komptonovském rozptylu na volných elektronech a na jádrech atomu vodíku?

8.7. Planckovu konstantu lze stanovit ze změřené krátkovlnné hranice spojitého rentgenového záření vznikajícího jako brzdné záření elektronů v rentgenové trubici. Je-li tato hranice 0,02 nm, určete jakým urychlujícím potenciálem bylo třeba působit na elektrony.

1.1. Dosazením druhých derivací do vlnové rovnice (1).

1.2. Dosazením druhých derivací do vlnové rovnice (2).

1.3. Rovnici vlnoplochy $\vec{s} \cdot \vec{r}/v = \text{konst}$ lze upravit do tvaru

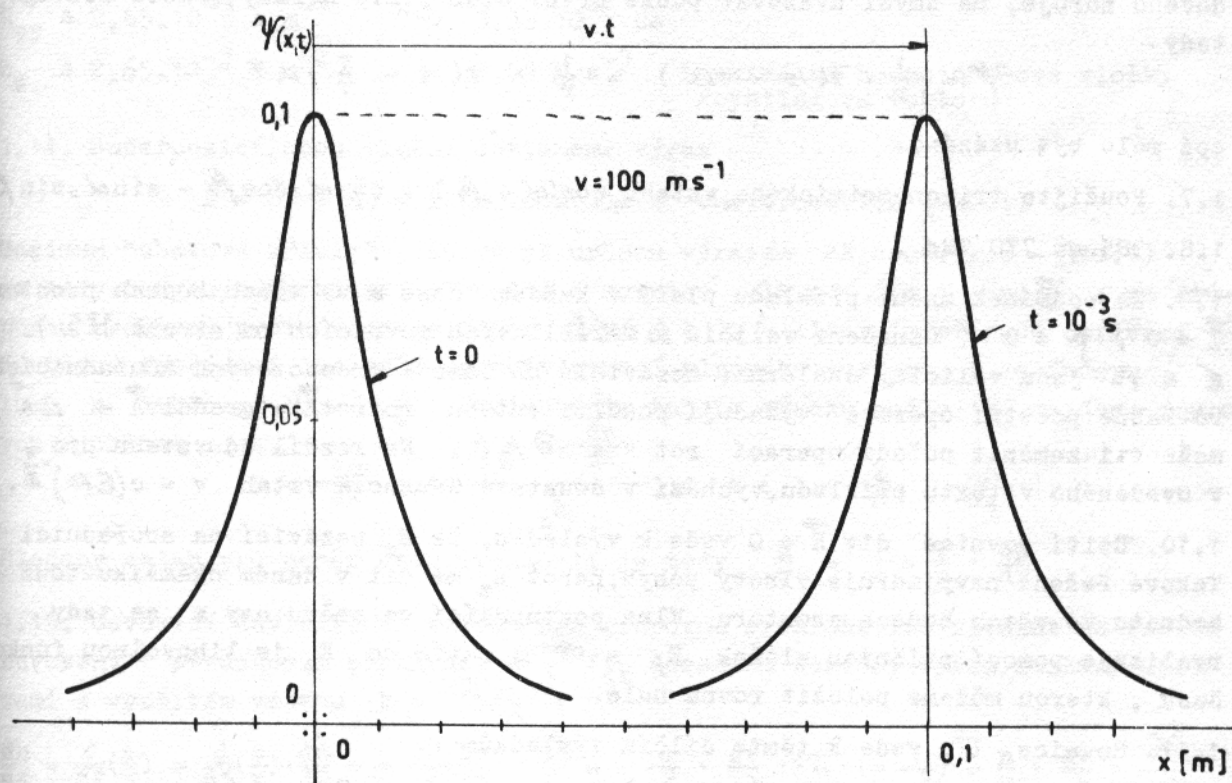
$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma = \pm v \cdot t + C,$$

což je rovnice roviny, v níž C má pro danou vlnoplochu určitou pevnou hodnotu.

Levá strana rovnice představuje průmět polohového vektoru $\vec{r}$ libovolného bodu vlnoplochy do směru jednotkového vektoru $\vec{s}$. Velikost tohoto průmětu v čase t je stejná pro všechny polohové vektory bodů dané vlnoplochy, a proto vektor $\vec{s}$ musí být kolmý k rovině vlnoplochy. Velikost průmětu roste nebo klesá s časem rovnoměrně rychlostí v , což vyjadřuje pravá strana upravené rovnice vlnoplochy.

1.4. Hledaná funkce má tvar $\Psi(x,t) = \frac{10^{-1}}{1 + 10^4(x-v \cdot t)^2}$; její průběh v čase

$t = 0$ a v čase $t = 10^{-3} \text{ sec}$ ukazuje obr. 1.4.



Obr. 1.4.

1.5. Dosazením do rovnice (2).

1.6. Z předpokladů o tvaru hledané funkce vyplývá :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial r} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

Využitím těchto vztahů a obdobných vztahů s proměnnými y a z dostaneme nejprve

$$\Delta \gamma = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \gamma)$$

a po dosazení do vlnové rovnice a jejím vynásobením r dospějeme k jedno-rozměrné rovnici pro funkci $r \gamma$:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \gamma) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \gamma)$$

D'Alembertovo řešení je dáno výrazem $r \gamma = \bar{f}(r-v \cdot t) + \bar{g}(r+v \cdot t)$, $\bar{f}$ a $\bar{g}$ jsou libovolné funkce jedné proměnné. Popisuje-li γ vlnění vycházející z bodového zdroje, má smysl uvažovat pouze první člen pravé strany tohoto řešení: tedy

$$\gamma = \frac{1}{r} \cdot \bar{f}(r - v \cdot t) = \frac{1}{r} \cdot f\left(t - \frac{r}{v}\right),$$

což mělo být ukázáno.

1.7. Použijte trigonometrického vztahu $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

1.8. 385 až 770 THz .

1.9. Za podmínek znění příkladu platí v každém čase a ve všech bodech prostoru $\vec{I} = 0$, $\oint = 0$ (Označení veličin v Maxwellových rovnicích na straně 125).

ϵ a μ jsou veličiny skalární, nezávislé na čase i prostorových souřadnicích. Potřebné početní operace vyžadují použití vztahu $\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$ a možnosti zaměnit pořadí operací rot a $\partial / \partial t$. Na rozdíl od vztahu pro $\vec{v}$ uvedeného v textu příkladu, vychází v soustavě Gaussové vztah $v = c(\epsilon \mu)^{-1/2}$.

1.10. Užití rovnice $\text{div} \vec{E} = 0$ vede k výsledku, že E_z nezávisí na souřadnici z . Takové řešení nevyjadřuje vlnový pohyb, neboť E_z má mít v daném okamžiku touž hodnotu ve všech bodech prostoru. Vlna postupující ve směru osy z se tedy realizuje pomocí příčných složek E_x a E_y , zatím co E_z je libovolnou funkcí času, kterou můžeme položit rovnu nule.

1.11. Rovnice IIa vede k těmto dílčím výsledkům :

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

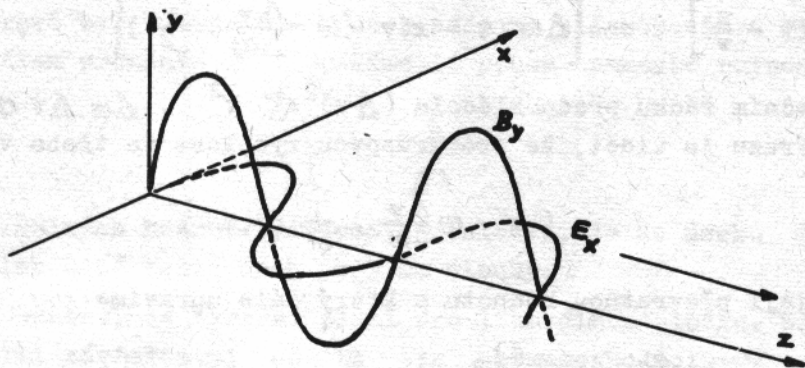
$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = - \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

Z nich plyne, že B_x a B_z nejsou funkcemi času, a proto nemohou vyjadřovat vlnový pohyb. Položíme je tedy rovny nule ve všech bodech prostoru. Proto je

$$\vec{B} = \vec{j} \cdot B_y(z, t), \text{ kde } B_y = - \int_0^t \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} dt.$$

1.12. Ve smyslu řešení předchozího příkladu je $B_y = \frac{1}{v} \cdot E_{ox} \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) + \varepsilon \right]$.
 $B_x = B_z = 0$.



Obr. 1.12.

1.13. Podle vztahů III a IV (str.125) a podle řešení 1.12 dostaneme

$$\begin{aligned} E_{ox} &= 1 \text{ V m}^{-1} &= 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \\ D_{ox} &\approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C m}^{-2} &= 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \\ B_{oy} &\approx 3,33 \cdot 10^{-9} \text{ T} &= 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ G} \\ H_{oy} &\approx 2,65 \cdot 10^{-3} \text{ A m}^{-1} &= 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ Oe} \\ S_z &\approx 2,65 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-2} &= 2,65 \text{ g s}^{-3} \quad (\text{maximální hodnota z-ové složky Poyntingova vektoru}) \end{aligned}$$

1.14. Superpozicí obou vlnění dostaneme výraz

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_0 \cdot \cos(\Delta k \cdot z - \Delta \omega \cdot t) \cos(k \cdot z - \omega \cdot t)$$

Maximum "obalové křivky", která je určena výrazem $2E_0 \cos(\Delta k \cdot z - \Delta \omega \cdot t)$ se tedy pohybuje rychlostí plynoucí z rovnice $\Delta k \cdot z - \Delta \omega \cdot t = n \cdot \pi$; za grupovou rychlost proto vezmeme poměr $\Delta \omega / \Delta k$, v limitním případě derivaci $\frac{d\omega}{dk}$. Kruhovou frekvenci lze dále upravit pomocí vlnového vektoru k a indexu lomu n takto: $\omega = c \cdot \frac{k}{n}$. Derivováním tohoto výrazu podle k najdeme grupovou rychlost:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = c \cdot \frac{n - k \cdot \frac{dn}{dk}}{n^2} = v \left(1 - \frac{k}{n} \cdot \frac{dn}{dk} \right)$$

Hledaný vztah pro poměr obou rychlostí je tedy $\frac{u}{v} = 1 - \frac{k}{n} \cdot \frac{dn}{dk}$.

1.15. Odvození Rayleighova vztahu pro grupovou rychlost lze navázat na vzorec odvozený v předchozím příkladě. Za $\frac{dn}{dk}$ dosadíme konečný výraz získaný úpravami s využitím vztahu $k = 2\pi/\lambda$:

$$\frac{dn}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{c}{v} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{c}{v} \right) \cdot \frac{d\lambda}{dk} = - \frac{c}{v^2} \cdot \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} = - \frac{c}{v^2} \cdot \frac{dv}{d\lambda} \cdot 2\pi \cdot \left(- \frac{1}{k^2} \right) = \frac{n}{v} \cdot \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi}$$

Po dosazení dostáváme ihned hledaný vztah $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$.

Vztah, k němuž dospěl Gouy, lze odvodit ze superpozice dvou vlnění velmi blízkých frekvencí $\omega \pm \Delta \omega$, jímž odpovídají fázové rychlosti $v \pm \Delta v$:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 \cdot \cos \left[(\omega + \Delta \omega) \left(t - \frac{x}{v + \Delta v} \right) \right] + E_0 \cdot \cos \left[(\omega - \Delta \omega) \left(t - \frac{x}{v - \Delta v} \right) \right] = \\ &= E_0 \left\{ \cos \left[(\omega + \Delta \omega)t - \frac{(\omega + \Delta \omega)x}{v + \Delta v} \right] + \cos \left[(\omega - \Delta \omega)t - \frac{(\omega - \Delta \omega)x}{v - \Delta v} \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2E_0 \cos \left[\omega t - \frac{x}{2} \left(\frac{\omega + \Delta\omega}{v + \Delta v} + \frac{\omega - \Delta\omega}{v - \Delta v} \right) \right] \cdot \cos \left[\Delta\omega t - \frac{x}{2} \left(\frac{\omega + \Delta\omega}{v + \Delta v} - \frac{\omega - \Delta\omega}{v - \Delta v} \right) \right] = \\
&= 2E_0 \cos \left(\omega t - x \frac{\omega v - \Delta\omega \cdot \Delta v}{v^2 - (\Delta v)^2} \right) \cdot \cos \left(\Delta\omega t - x \frac{\Delta\omega \cdot v - \omega \cdot \Delta v}{v^2 - (\Delta v)^2} \right) \pm \\
&\pm 2E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \cdot \cos \left[\Delta\omega \left(t - x \left(v - \omega \frac{\Delta v}{\Delta\omega} \right) \frac{1}{v^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Úprava na posledním řádku předpokládala $(\Delta v)^2 \ll v^2$, $\Delta\omega \cdot \Delta v \ll \omega \cdot v$. Z odvozeného výrazu je vidět, že pro grupovou rychlost je třeba vzít výraz

$$\left(v - \omega \frac{dv}{d\omega} \right) \frac{1}{v^2},$$

který znamená její převratnou hodnotu a který dále upravíme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} &= \frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2} \cdot \frac{dv}{d\omega} = \frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2} \cdot \frac{dv}{d\lambda_0} \cdot \frac{d\lambda_0}{d\omega} = \frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2} \cdot \frac{dv}{d\lambda_0} \cdot 2\pi c \left(\frac{-1}{\omega^2} \right) = \\
&= \frac{1}{v} - \frac{c}{v^2} \cdot \frac{dv}{d\lambda_0} \cdot 2\pi \cdot \frac{-\lambda_0}{2\pi c} = \frac{1}{v} - \frac{\lambda_0}{c} \cdot \frac{dn}{d\lambda_0}.
\end{aligned}$$

Poslední dvě úpravy jsou provedeny pomocí vztahů $n = \frac{c}{v}$ a $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$.

Tím dostáváme hledaný vztah $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} - \frac{\lambda_0}{c} \cdot \frac{dn}{d\lambda_0}$.

1.16. K výpočtu užijeme vztahu odvozeného Gouyem (o řádek výše), do něhož dosadíme za

$$\frac{dn}{d\lambda_0} = \frac{n_C - n_F}{\lambda_C - \lambda_F} = \frac{1 - n_D}{\lambda_C - \lambda_F} = -7,344 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1};$$

dostaneme tak $u = \left(\frac{1}{v} - \frac{\lambda_0}{c} \cdot \frac{dn}{d\lambda_0} \right)^{-1} = \frac{c}{n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}} = 1,944 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$,

při čemž $v = \frac{c}{n} = 2 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

1.17. $u = 1,77 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ $v = 2 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

1.18. Elektrické pole $E(x)$ je možno vyjádřit jako superpozici harmonických vln vztahem $E(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{-ikx} dk$. Spektrum $A(k)$ vlnového vektoru dostaneme podle následujícího vztahu a úprav :

$$\begin{aligned}
A(k) &= \int_{-L}^L E(x) \cdot e^{ikx} dx = \int_{-L}^L E_0 \cos k_0 x \cdot e^{ikx} dx = \int_{-L}^L E_0 \cdot \cos k_0 x \cdot \cos kx \cdot dx = \\
&= \frac{E_0}{2} \int_{-L}^L (\cos(k_0 + k)x + \cos(k_0 - k)x) dx = \frac{E_0}{2} \left[\frac{\sin(k_0 + k)x}{k_0 + k} + \frac{\sin(k_0 - k)x}{k_0 - k} \right]_{-L}^L = \\
&= E_0 \cdot L \left[\frac{\sin(k_0 + k)L}{(k_0 + k)L} + \frac{\sin(k_0 - k)L}{(k_0 - k)L} \right].
\end{aligned}$$

Protože předpokládáme $L \gg \lambda_0$ t.j. $L \cdot k_0 \gg 2\pi$ a protože $k > 0$, platí též $(k_0 + k)L \gg 2\pi$, a proto lze první člen v poslední hranaté závorce zanedbat ve

srovnání s členem druhým. Dostaneme tak výsledek $A(k) = E_0 \cdot L \cdot \frac{\sin((k_0 - k)L)}{(k_0 - k)L}$

1.19. Podmínka $|(k_0 - k)L| \leq 2\pi$ může být upravena pomocí vztahu $k = 2\pi/\lambda$:

$$(k_0 - k)L = \frac{d}{d\lambda}(k_0 - k) \cdot \Delta\lambda \cdot L = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda \cdot L \leq 2\pi$$

Při této úpravě byl výraz $(k_0 - k)$ pokládán za diferenciál a vyjádřen derivací a diferenciálem proměnné λ . Uvážíme-li pouze znaménko rovnosti máme výsledný vztah

$$\frac{L}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

Dosazením číselných hodnot přijdeme k výsledku, že do úseku $2L$ se vejde 10^4 vlnových délek a že tento úsek je 5 mm dlouhý.

1.20. Stačí ukázat, že tvrzení platí pro libovolnou složku. Za fázový rozdíl mezi funkčními závislostmi $\cos$ a $\sin$ vezmeme hodnotu φ vyhovující rovnici

$$\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_x - \varphi) = \sin(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_x),$$

a to tu hodnotu, která je absolutně nejmenším na čase nezávislým řešením rovnice. Z tohoto hlediska vyhovuje jediné řešení $\varphi = \pi/2$. Protože jde o hodnotu kladnou předbíhá reálná část část imaginární. Imaginární část nabývá těchto hodnot jako reálná, avšak v okamžiku o $\pi/2\omega$ pozdějším.

1.21. Výraz pro vektor elektrického pole lze upravit (za předpokladu $E_{x0} \neq 0$) do tvaru

$$\vec{E} = E_{x0} \cdot e^{i\delta_x} \cdot (\vec{i} + \vec{j} \frac{E_{y0}}{E_{x0}} e^{i(\delta_y - \delta_x)}) \cdot e^{i(\omega t - k \cdot z)}$$

Tím dostáváme v kulaté závorce u vektoru $\vec{i}$ jedničku a u vektoru $\vec{j}$ faktor $\frac{E_{y0}}{E_{x0}} e^{i(\delta_y - \delta_x)}$, který je, jak se nakonec ukáže, vhodným výrazem pro posouzení polarizace vlny.

ad 1) Má-li být vlna lineárně polarizována (s obecnou orientací polarizační roviny), je třeba, aby poměr $\text{Re } E_y / \text{Re } E_x$ byl roven reálné, na čase nezávislé konstantě. Z toho důvodu a vzhledem k výsledku předchozího příkladu je nutno položit $\text{Re } E_y = A \cdot \text{Re } E_x$ a $\text{Im } E_y = A \cdot \text{Im } E_x$, kde A je reálné číslo. To tedy znamená, že $E_y = A \cdot E_x$. Po dosazení za E_x a E_y a následném vydělení faktorem $e^{i(\omega t - k \cdot z)}$ dostaneme $E_{y0} \cdot e^{i\delta_y} = A \cdot E_{x0} \cdot e^{i\delta_x}$. Odtud vyplývá, že $(\delta_y - \delta_x) = 0 \pm \pi$.

Faktory u vektorů $\vec{i}$ a $\vec{j}$ (v upraveném výrazu) leží tedy v Gaussově rovině na ose reálných čísel; s těmito dvěma čísly můžeme spojovat představu dvou vektorů v Gaussově rovině. Jejich počáteční body leží v průsečíku osy reálných a ryze imaginárních čísel. První z obou vektorů má koncový bod umístěn na ose reálných čísel v bodě o souřadnici rovné jedničce, druhý v bodě o souřadnici rovné A na téže ose. Podle znaménka A odpovídá úhlu sevřenému oběma vektory v Gaussově rovině buď úhel 0 nebo π . Platí tedy vztah

$$\vec{E} = E_{x0} \cdot e^{i\delta_x} (\vec{i} + A \cdot \vec{j}) \cdot e^{i(\omega t - k \cdot z)}$$

ad 2) Chceme-li aby světlo bylo kruhově polarizované, je třeba položit

$$\operatorname{Re} E_y(t) = \pm \operatorname{Re} E_x(t - \frac{\pi}{2\omega}) = \pm \operatorname{Im} E_x(t)$$

$$\operatorname{Re} E_x(t) = \mp \operatorname{Re} E_y(t - \frac{\pi}{2\omega}) = \mp \operatorname{Im} E_y(t) .$$

Obě levé rovnice jsou utvořeny tak, aby horní znaménka odpovídala levotočivému a dolní pravotočivému pohybu koncového bodu vektoru elektrického pole v pevně zvoleném místě z . Předpokládáme při tom, že se díváme proti směru skutečného postupu vlny, která postupuje v kladném směru osy z , a že kartézský souřadnicový systém je systémem pravotočivým. Obě pravé rovnice opět vyjadřují výsledek předchozího příkladu 1.20. Uvedený systém rovnic lze jednoduše přepsat na $E_y = \mp i \cdot E_x$ s tímtež významem uvedených znamének. Dosadíme-li do tohoto vztahu opět za E_x a E_y dostaneme po vydělení faktorem $\exp(i\omega t - ikz)$ tyto výsledky:

$$E_{x0} = E_{y0} \quad \text{a} \quad \delta_y - \delta_x = \mp \frac{\pi}{2} .$$

Platí tedy vztah $\vec{E} = E_{x0} \cdot e^{i\delta_x} \cdot (\vec{i} \mp i \cdot \vec{j}) \cdot e^{i(\omega t - k \cdot z)}$.

Levotočivě (pravotočivě) polarizaci odpovídá horní (dolní) znaménko a příslušný úhel $\delta_y - \delta_x$ je tedy měřen od kladného směru na ose reálných čísel v Gaussově rovině k zápornému (kladnému) směru na ose čísel ryze imaginárních. Levotočivě (pravotočivě) polarizaci tedy přísluší záporné (kladné) úhly $\delta_y - \delta_x$. Kladný směr pro měření fáze $(\omega t - k \cdot z)$ i úhlu $\delta_y - \delta_x$ je tedy od kladného směru osy reálných ke kladnému směru osy ryze imaginárních čísel.

ad3) Protože jde o obecný případ, nelze hledat žádný speciální vztah mezi E_x a E_y . Souvislost mezi orientací polarizace a znaménkem úhlu $\delta_y - \delta_x$ je tatáž. Dosavadní poznatky doplníme ještě o souvislost mezi orientací polarizace a geometrickým uspořádáním elektrického pole v prostoru vztahujícím se k určitému okamžiku t . Fáze $(\omega t - k \cdot z)$ se s rostoucím z zmenšuje. Proto bude v závislosti na rostoucím z konat koncový bod vektoru elektrického pole pohyb pravotočivý při levotočivé polarizaci a naopak. Levotočivé polarizaci tedy přísluší levotočivá šroubovice a pravotočivé polarizaci šroubovice pravotočivá.

ad 4) Předpokládané geometrické uspořádání elektrického vektoru vede k tomuto požadavku: Je-li v určitém okamžiku a v daném místě složka elektrického pole do směru osy x maximální, potom v témže okamžiku a v témže místě musí být složka elektrického pole do směru osy y nulová. Vyjádříme to rovnicemi:

$$E_{x0} \cdot \cos(\omega t - kz + \delta_x) = E_{x0} \quad , \quad E_{y0} \cdot \cos(\omega t - kz + \delta_y) = 0 .$$

Odtud vyplývá $\delta_y - \delta_x = \mp \frac{\pi}{2}$. Vztah pro elektrické pole uvedený na začátku tohoto řešení tedy zní:

$$\vec{E} = E_{x0} \cdot e^{i\delta_x} \cdot (\vec{i} \mp i \cdot \frac{E_{y0}}{E_{x0}} \vec{j}) \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

Koeficient nacházející se v kulaté závorce u vektoru $\vec{j}$ tedy musí být ryze imaginárním číslem. Horní znaménko přísluší levotočivé polarizaci.

1.22. Týž způsob řešení jako v příkladě 1.20, založený na rovnici

$$\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_x - \varphi) = \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_x) ,$$

vede k téže hodnotě $\varphi = \pi/2$. Protože však fáze $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_x)$ s časem klesá, znamená to, že reálná část se o $\pi/2\omega$ opožďuje za částí imaginární.

1.23. Způsob řešení je týž jako v příkladě 1.21.

ad 1) Línéární polarizace : $\vec{E} = E_{x0} \cdot e^{i\sigma_x} (\vec{i} + A\vec{j}) \cdot e^{i(k.z - \omega t)}$.

A znamená současně tangentu úhlu sevřeného rovinou xz a rovinou polarizační, obsahující směr vektoru $\vec{E}$.

ad 2) Při kruhově polarizovaném světle požadujeme splnění rovnic uvedených na straně 60 nahoře, v nichž je využito výsledku příkladu 1.22, a které vedou ke vztahu $E_y = \pm i.E_x$. Horní (dolní) znaménko však nyní přísluší pravotočné (levotočné) polarizaci, tedy opačně než v 1.21. Pravotočné (levotočné) polarizaci přísluší stejně jako v 1.21. pravotočivá (levotočivá) šroubovice, ale rozdíl $\delta_y - \delta_x$ je nyní pro tuto orientaci záporný (kladný).

ad 3 a 4) Znaménko fázového rozdílu $\delta_y - \delta_x$ a orientace polarizace spolu souvisejí stejně jako u polarizace kruhové tohoto příkladu. Kladný směr pro určování znaménka fázového úhlu $(k.z - \omega t)$ i rozdílu $\delta_y - \delta_x$ zůstává nezměněn.

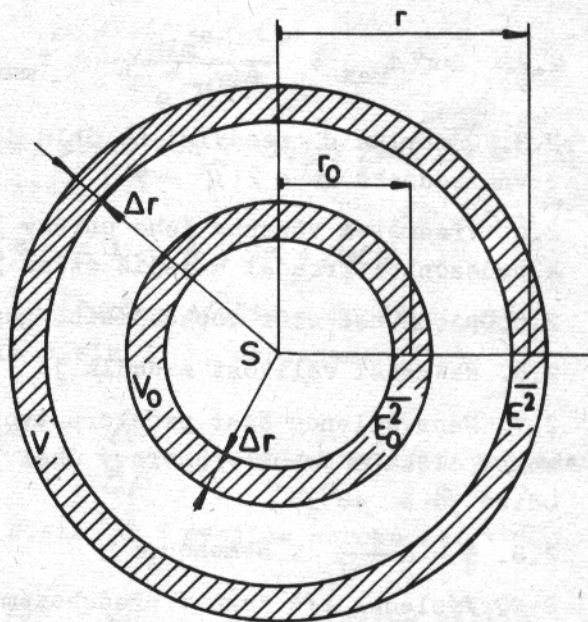
1.24. Uvažujme o zdroji, který vyzařuje izotropně v každém intervalu vlnových délek $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ a jehož energetická svítivost má v každém takovém intervalu určitou na čase nezávislou hodnotu. Skutečný bodový zdroj je složen z mnoha navzájem nezávislých zdrojů (které nemusí být izotropní) a můžeme proto předpokládat, že střední hodnota prostorové hustoty zářivé energie v prostoru okolo zdroje je rovna součtu středních hustot, tvořených jednotlivými elementárními zdroji (je využito výsledků příkladů 6.1 až 6.3). Tímto předpokladem bereme v úvahu vzájemnou nekoherentnost všech částí zdroje a vylučujeme tak z těchto úvah vznik interferenčních jevů. V situaci, která byla právě popsána, lze položit rovnost mezi energiemi obsaženými v objemech V a V_0 vyznačených v obrázku. V rovnici

$$\int_{V_0} E_0^2 \cdot dV_0 = \int_V E^2 \cdot dV \quad \text{přísluší}$$

elektrická pole E a E_0 určitému pevně zvolenému okamžiku a velmi úzkému intervalu vlnových délek $\Delta\lambda$. Pole jsou ve svých objemech V a V_0 funkcemi prostorových souřadnic. Tloušťka obou slupek je rovna téže hodnotě Δr a volíme ji rovnu celistvému násobku poloviny vlnové délky (z důvodu následujících úvah o středních hodnotách). Užitím středních kvadratických hodnot ve vyznačených objemech můžeme napsat rovnici ve tvaru

$$4\pi \cdot r_0^2 \cdot \Delta r \cdot \overline{E_0^2} = 4\pi \cdot r^2 \cdot \Delta r \cdot \overline{E^2}, \quad \text{kde}$$

$$\overline{E_0^2} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} E_0^2 \cdot dV_0 \quad \text{a} \quad \overline{E^2} = \frac{1}{V} \int_V E^2 \cdot dV.$$



Obr. 1.24.

1.25. Hledaná podmínka zní $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \gg \left(\frac{v}{2r}\right)^2 \cdot \varphi(r, t)$ a znamená, že uvedené řešení lze považovat za přibližné řešení vlnové rovnice ve velké vzdálenosti od zdrojové přímky. Předpokládá se, že vlna postupuje nedispersním prostředím.

1.26. Složením dvou kruhově polarizovaných vln téhož směru šíření a opačných smyslů polarizace (ve výrazu pro $\vec{E}$ je $\vec{a} \pm i\vec{b}$, srovn. s řešením příkladu 1.2) vznikne vlna lineárně polarizovaná. Při průchodu hmotným prostředím nastává pro $k_1 \neq k_2$ stáčení polarizační roviny. Položíme-li $k_1 = k - \Delta k$, $k_2 = k + \Delta k$, lze výraz pro vektor $\vec{E}$ upravit takto:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \left[e^{-i\Delta k \cdot z} (\vec{a} - i\vec{b}) e^{i(kz - \omega t)} + e^{i\Delta k \cdot z} (\vec{a} + i\vec{b}) e^{i(kz - \omega t)} \right] = \\ &= E_0 \left[\vec{a} (e^{i\Delta k \cdot z} + e^{-i\Delta k \cdot z}) + i\vec{b} (e^{i\Delta k \cdot z} - e^{-i\Delta k \cdot z}) \right] \cdot e^{i(kz - \omega t)} = \\ &= 2E_0 \left[\vec{a} \cdot \cos(\Delta k \cdot z) + \vec{b} \cdot \sin(\Delta k \cdot z) \right] \cdot e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}$$

Dostáváme tak lineárně polarizovanou vlnu s amplitudou $2E_0$, jejíž polarizační rovina svírá s rovinou xz úhel $\alpha = \Delta k \cdot z$. Fyzikální smysl má reálná nebo imaginární část uvedeného výrazu.

2.1. $r_1 = r - \frac{R-r}{D-d} d$, $r_2 = r + \frac{R+r}{D-d} d$. Podmínka existence oblasti s úplným zatměním je $d < \frac{r \cdot D}{R}$. Pro nejmenší vzdálenost Měsíce od Země je $r_1 \approx 79$ km, $r_2 \approx 3410$ km. Pro největší vzdálenost je $r_2 \approx 3650$ km. Pro vzdálenost $d > 373000$ km nemůže úplné zatmění vzniknout.

2.2. $d < d_{\max} = \frac{a_{\min}}{a_{\min} + b} \cdot t_{\max} = 0,9$ mm

2.3. Odchylka δ nezávisí na úhlu dopadu na první zrcadlo. Je konstantní a je rovna hodnotě $\delta = 2(\pi - \varphi)$.

2.4. Předmět a všechny jeho obrazy leží na kružnici, jejíž rovina je kolmá k průsečnici zrcadel a jejíž střed je bodem průsečnice.

2.5. Opačný než směr dopadajícího paprsku.

2.6. Nejmenší velikost zrcadla je $H/2$.

2.7. Neosvětlenou část prostoru tvoří rotační kužel, jehož základnou je plovcí deska a jehož vrcholový úhel 2β je určen podmínkou $\sin \beta = 1/N$. Odtud $\beta \approx 48^\circ 35'$.

2.8. $\frac{r}{d} = \frac{1}{N-1}$. Nemohou.

2.9. Výsledek týž jako v předchozím příkladě, d má nyní význam průměru vlákna.

2.10. $\operatorname{tg} \alpha = N_2/N_1$, $\operatorname{tg} \beta = N_1/N_2$

2.11. $r = \frac{4R \cdot l}{d}$

$$2.12. \quad a = d \cdot \sin \alpha \left[1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}} \right]; \quad \alpha \text{ je úhel dopadu na desku.}$$

2.13. Pro jednotlivá rozhraní platí rovnice

$$\begin{aligned} N_1 \cdot \sin \alpha_1 &= N_2 \cdot \sin \beta_1 \\ N_2 \cdot \sin \alpha_2 &= N_3 \cdot \sin \beta_2 \\ &\vdots \\ N_n \cdot \sin \alpha_n &= N_{n+1} \cdot \sin \beta_n. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\beta_k = \alpha_{k+1}$, platí $N_1 \cdot \sin \alpha_1 = N_{n+1} \cdot \sin \beta_n$. Tím je důkaz proveden.

$$2.14. \quad \alpha - \beta \approx (N - 1) \cdot \operatorname{tg} \beta = 0,0003 \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

2.15. Index lomu skla kyvety může nabývat libovolných hodnot $n > 1$, zatím co index N kapaliny musí být menší než $\sqrt{2}$.

$$2.16. \quad N = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi}}{\sin \varphi}$$

2.17. Rovnicí uvedenou v textu dostaneme sečtením rovnic $\sin \alpha = N \cdot \sin \beta$ a $\sin \alpha' = N \cdot \sin \beta'$. Pro symetrický chod paprsku hranolem je pak výraz

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\beta - \beta')}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha')} \quad \text{roven jedné a dostáváme tak známý vztah pro index lomu hranolu.}$$

Pro chod paprsku blízky symetrickému průchodu hranolem můžeme napsat

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 + \Delta\beta & \alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha \\ \beta' &= \beta_0 - \Delta\beta & \alpha' &= \alpha_0 - \overline{\Delta\alpha} \end{aligned} \quad \text{a obdobně, kde } \alpha_0 \text{ a}$$

β_0 přísluší symetrickému průchodu hranolem, zatím co veličiny $\Delta\alpha$, $\overline{\Delta\alpha}$ a $\Delta\beta$ vyjadřují odchylky od tohoto chodu. Platí tedy

$$\frac{1}{2} (\beta - \beta') = \Delta\beta \quad \text{a} \quad \frac{1}{2} (\alpha - \alpha') = \frac{1}{2} (\Delta\alpha + \overline{\Delta\alpha}).$$

Užijeme-li dále trigonometrických formulí pro funkce součtu a rozdílu úhlů ve vztazích $\sin \alpha = N \cdot \sin \beta$ a $\sin \alpha' = N \cdot \sin \beta'$, dostaneme dílčí výsledky

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} \approx \frac{N \cdot \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} \approx \frac{\overline{\Delta\alpha}}{\Delta\beta}; \quad \text{odtud vyplývá vzhledem}$$

k podmínce pro symetrický chod $\sin \alpha_0 = N \cdot \sin \beta_0$ dvojice nerovností

$$\begin{aligned} &\Delta\alpha > \Delta\beta \quad \text{a} \quad \overline{\Delta\alpha} > \Delta\beta & \text{Jejich užitím} \\ \text{dostáváme} \quad \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{\sin \frac{1}{2} \varphi} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta - \beta')}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha')} = \frac{\cos \Delta\beta}{\cos \frac{1}{2} (\Delta\alpha + \overline{\Delta\alpha})} > 1. \end{aligned}$$

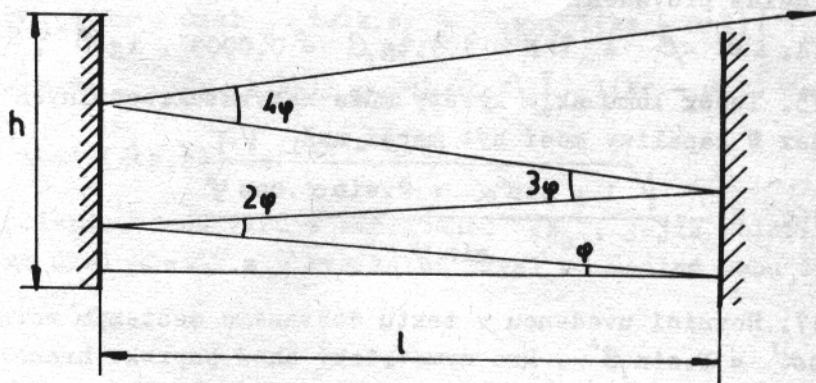
Protože $\sin \frac{1}{2}(\varphi + \delta)$ je ve skutečných podmínkách experimentu rostoucí funkcí úhlu $(\varphi + \delta)/2$, nabývá δ minimální hodnoty právě při symetrickém chodu paprsku. Pro úhlovou disperzi v oboru minimální deviace dostaneme výraz

$$\frac{d\delta_{\min}}{d\lambda} = \frac{2 \frac{dN}{d\lambda} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}$$

2.18. Paprsek musí dopadnout pod úhlem α daným podmínkou $\cos \alpha = \sqrt{\frac{N^2 - 1}{3}}$.
 $\alpha \approx 59^\circ 24'$.

2.19. Úhel zrcadel α je roven

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} = \frac{h}{12.1} \approx 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \approx 5,4''.$$



Obr. 2.19.

2.20. Způsob sestavení výchozích vztahů ze vzájemného pohybu obou planet ukazuje obrázek.

Pro přibližování (horní polovina obrázku) platí vztah

$$c \cdot T_p = c \cdot T - v \cdot T_p,$$

pro vzdalování (dole) platí vztah

$$c \cdot T_v = c \cdot T + v \cdot T_v.$$

(T_p a T_v jsou zdánlivé doby

v obou případech;

pro rychlost

Země v bylo

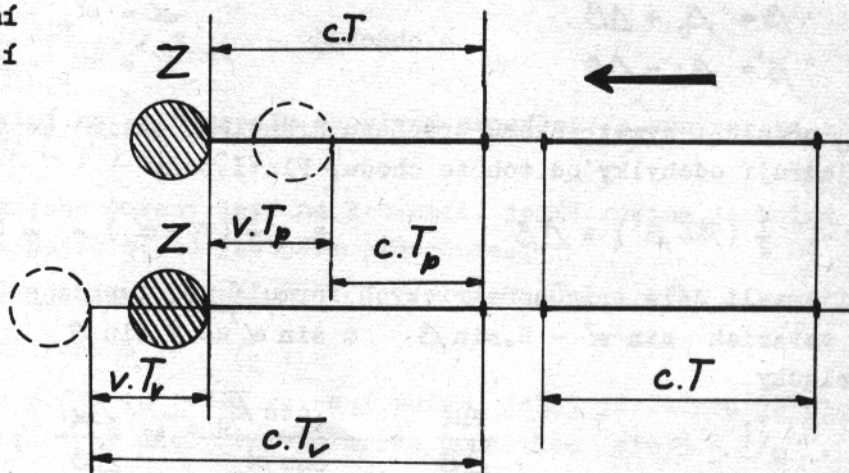
užito hodnoty

30 km/s.

Z výchozích rovnic plyne ihned $c = v \frac{T_v + T_p}{T_v - T_p}$, $T = \frac{T_v + T_p}{2} (1 - \frac{v^2}{c^2}) \approx \frac{T_v + T_p}{2}$.

Pro $T = 42,5$ h dostáváme $T_v - T_p = 30,6$ s. Měření času bylo třeba provést s relativní chybou $1,4 \cdot 10^{-5}$.

Směr postupujícího signálu (úsek délky $c \cdot T$) od Jupitera



Obr. 2.20.

2.21. Podobně jako v předchozím příkladě, posuzujeme experimentální situaci z hlediska souřadné soustavy spojené se Sluncem. Stejným postupem dostaneme tyto výchozí rovnice

$$c \cdot T_p = (c - u) \cdot T - v \cdot T_p$$

$$c \cdot T_v = (c - u) \cdot T + v \cdot T_v ,$$

v nichž u je rychlost, jíž se Jupiter přibližuje k Zemi ve zmíněné souřadné soustavě. Úpravou dostáváme též vztah pro rychlost světla $c = v \cdot (T_v + T_p) / (T_v - T_p)$,

avšak odlišný výraz pro skutečnou oběžnou dobu $T = \frac{c}{c - u} \cdot \frac{T_p + T_v}{2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$.

Stojí za poznámku, že výchozí rovnice lze napsat ve tvaru

$$\frac{1}{T_p} = \frac{c + v}{c - u} \cdot \frac{1}{T} \quad \frac{1}{T_v} = \frac{c - v}{c - u} \cdot \frac{1}{T} ,$$

což jsou vlastně výrazy pro frekvence ($f_{p,v} = 1/T_{p,v}$) pozorované při Dopplerově jevu.

2.22. Oběžnému pohybu Země okolo Slunce přísluší úhel hvězdné aberace 20,6 rotaci okolo vlastní osy odpovídá aberační úhel 0,32''.

2.23. Rychlosti otáčení v obrátkách za vteřinu jsou dány výrazem

$$f_n = \frac{c}{4z \cdot l} \cdot (2n - 1) \pm 12,11 \cdot (2n - 1) , n = 1, 2, 3, \dots$$

Nejnižší rychlost je $f_1 = 12,11 \text{ s}^{-1}$.

2.24 a 25. Pro odraz lze správnost tvrzení prokázat známým způsobem pomocí trojúhelníkové nerovnosti. Zde je naznačen společný početní postup dokazující minimum optické dráhy v obou případech. Souřadnicová soustava byla k tomu účelu zvolena tak, aby skutečná realizující se dráha paprsku představovala odraz nebo lom v místě počátku souřadnic. Z toho vyplývá, že při všech dalších úvahách o odrazu musí platit

$$\frac{y_2}{x_2} = - \frac{y_1}{x_1} , \text{ a podobně při úvahách o lomu}$$

musí platit vztah $\frac{N_1 \cdot x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = - \frac{N_2 \cdot x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$. Tak zvané "blízké"

dráhy, sousedící se skutečnou realizující se drahou světelného paprsku, k nimž se vztahuje formulace Fermatova principu, jsou uvažovány ve tvaru jednou lomených čar složených ze dvou přímkových úseků (obrázky v textu příkladů). Zavedeme-li označení pro geometrickou dráhu spojující bod A s bodem rozhraní (zrcadla)

$$L_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2 + z^2}$$

a označení geometrické dráhy spojující tento bod s bodem B

$$L_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2 + z^2} , \text{ dostaneme pro optickou}$$

dráhu a její parciální derivace tyto výrazy :

$$L = N_1 L_1 + N_2 L_2 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = z \left(\frac{N_1}{L_1} + \frac{N_2}{L_2} \right) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{N_1(x - x_1)}{L_1} + \frac{N_2(x - x_2)}{L_2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = N_1 \frac{(x - x_1)^2 + y_1^2}{L_1^3} + N_2 \frac{(x - x_2)^2 + y_2^2}{L_2^3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = N_1 \frac{y_1^2 + z^2}{L_1^3} + N_2 \frac{y_2^2 + z^2}{L_2^3}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} = -z \left(\frac{N_1(x - x_1)}{L_1^3} + \frac{N_2(x - x_2)}{L_2^3} \right)$$

(Pro případ odrazu na zrcadle je třeba ve všech výrazech položit $N_2 = N_1 = N$.)

Abychom ukázali, že jde o minimum optické dráhy, je třeba požadovat

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} \right)^2 > 0$$

Z prvé podmínky dostáváme $z = 0$. S využitím tohoto výsledku, dále vztahů uvedených na začátku tohoto řešení a s využitím té okolnosti, že pro všechna

x je $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} > 0$, dostaneme z druhé podmínky $x = 0$. Pomocí těchto výsledků

a vztahů pro druhé derivace, lze snadno ukázat, že platí i požadovaná třetí podmínka. Nalezené řešení je jediné a znamená, že skutečný paprsek prochází počátkem souřadnic.

2.26. V závislosti na poloze bodu A na spojnici vrcholu V se středem C dutého zrcadla dochází k těmto případům :

- a) Leží-li bod A ve středu křivosti (v bodě C), má optická dráha stacionární hodnotu,
- b) je-li blíže k vrcholu V než v případě a), jde o minimum optické dráhy,
- c) je-li dále od vrcholu V než v případě a), jde o maximum optické dráhy.

2.27. Zrcadlo má tvar protáhlého rotačního elipsoidu, jehož t.zv. ohniska leží ve středech původního a odraženého svazku.

2.28. Optickou dráhu je možno vyjádřit dvojím způsobem pomocí veličin zavedených v obrázku (na str.19). Mezi oběma výrazy položíme v soulase se zadáním rovnost

$$N_1 \sqrt{y^2 + (a + x - s_1)^2} + N_2 \sqrt{y^2 + (a + x - s_2)^2} = s_2 N_2 - s_1 N_1$$

Označíme-li členy s odmocninami A a B a pravou stranu rovnice C máme výchozí rovnici $A + B = C$, která je vzhledem k přítomnosti odmocnin pro výpočet nepohodlná. Je však možno provést úpravu, která odmocniny zcela odstraní : Dostaneme tak následující pro výpočet vhodný vztah

$$(A^2 - B^2)^2 = C^2 (2A^2 + 2B^2 - C^2), \text{ který po zpětném}$$

dosazení za A a B již žádný výraz s druhou odmocninou neobsahuje. Stojí za poznámku, že k téže upravené výsledné rovnici bychom dospěli od výchozí rovnice $-A + B = C$. Dosadíme-li do upravené rovnice z rovnice elipsy

za y výraz $b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}$, dostaneme po úpravách rovnici čtvrtého stupně vzhledem k proměnné x . Existují-li dva body na hlavní ose elipsoidu, které jsou středy dopadajícího svazku a svazku lomeného, musí tato rovnice platit pro všechna x z určitého intervalu $(-a, -a + \Delta)$. To je možné splnit jenom tak, že položíme koeficienty u všech mocnin x i absolutní člen rovné nule. Z těchto pěti podmínek vyplývají tyto závěry :

- a) Elipsoid musí být koulí, tedy $a = b = r$.
- b) Jde-li o kulovou lámavou plochu, má úloha dvojí řešení :
 - 1) $s_1 = s_2 = r$, což z hlediska zobrazování představuje uzlové body,
 - 2) $s_1 = r \left(1 + \frac{N_2}{N_1} \right)$, $s_2 = r \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \right)$. Toto řešení představuje dvojici sdružených bodů kulové lámavé plochy, pro něž nevzniká otvorová vada.

Situace předpokládaná obrázkem v textu příkladu nemůže tedy nastat. Možné jsou pouze ty případy, které znázorňuje obrázek tohoto řešení. Nalezeným řešením pak také přísluší výchozí rovnice ve tvaru $-A + B = C$.

2.29. Výsledek je totožný s druhým řešením předchozího příkladu.

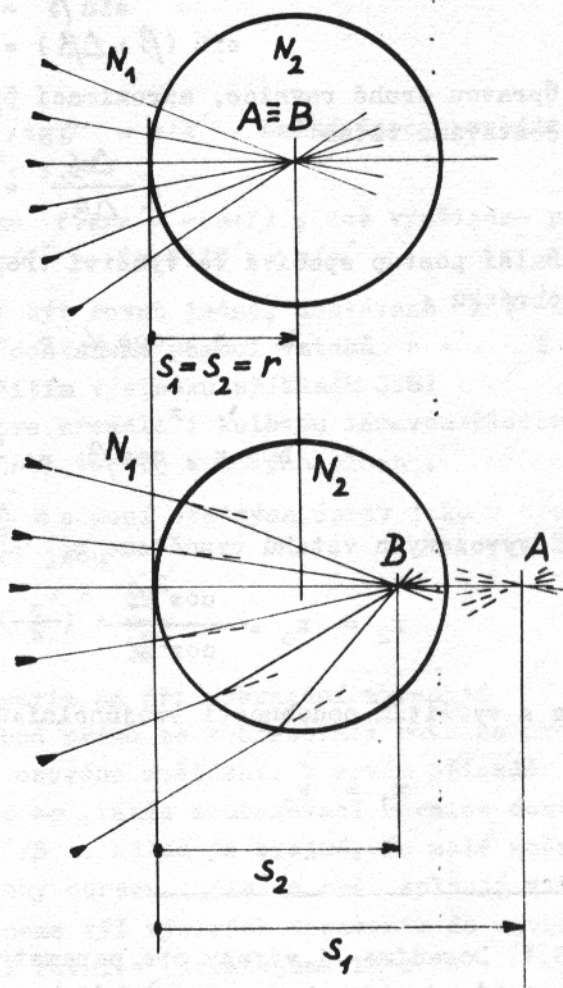
2.30. Výchozí rovnici sestavíme podobně jako v předcházejícím příkladě 2.28 : veďme rovinu kolmo k rovnoběžnému svazku paprsků, a to tak, aby to byla rovina tečná ve vrcholu elipsoidu. Optická dráha měřená po libovolném paprsku od této roviny až k bodu na hlavní ose elipsy, v němž se po lomu všechny paprsky protínají, má touž hodnotu nezávislou na volbě paprsku. Této vlastnosti, plynoucí z Fermatova principu využijeme k sestavení výchozí rovnice. Zachováme-li označování zavedená v příkladě 2.28, dospějeme k rovnici

$$N_1(a+x) + N_2 \sqrt{y^2 + (x_0 - x)^2} = N_2(x_0 + a),$$

do níž opět dosadíme $y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Nově zavedená veličina x_0 znamená souřadnici bodu B, t.j. středu

lomem vzniklého svazku na hlavní ose elipsoidu. Týmž postupem jako ve zmíněném



Obr. 2.28.

příkladě dospějeme k těmto výsledkům:

a) relativní index lomu musí splňovat vztah $\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, je tedy roven

b) $x_0 = (a^2 + b^2)^{1/2}$, svazek se tedy protíná ve vzdálenějším ohnisku elipsoidu.

2.31. Zrcadlo může být vypuklé nebo duté a má tvar jedné větve dvoudílného rotačního hyperboloidu, v jehož ohniscích leží středy dopadajícího a odraženého svazku. Všechny možné tvary v úvahu přicházejících zrcadel tvoří soustavu konfokálních hyperboloidů.

2.32. Zrcadlo může být duté i vypuklé a má tvar rotačního paraboloidu, jehož osa má směr dopadajících paprsků. Střed odraženého svazku leží v ohnisku paraboloidu. Všechny možné tvary zrcadel tvoří soustavu konfokálních rotačních paraboloidů se společnou osou.

2.33. Pro paprsky vyznačené v obrázku platí rovnice

$$\begin{aligned}\sin \beta &= N \cdot \sin \alpha \\ \sin (\beta + \Delta \beta) &= N \cdot \sin (\alpha + \Delta \alpha) .\end{aligned}$$

Úpravou druhé rovnice, aproximací pro úzký svazek a využitím první rovnice dostáváme vztah

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta \beta} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} .$$

Další postup spočívá ve využití trojího vyjádření úseček a a b podle obrázku :

$$a = s \cdot \cos \alpha = \frac{\Delta \alpha y_0}{\cos \alpha} = \frac{\Delta \alpha x_0}{\sin \alpha}$$

$$b = s \cdot \cos \beta = \frac{\Delta \beta y_2}{\cos \beta} = \frac{\Delta \beta x_2}{\sin \beta}$$

Z vyvozených vztahů vypočteme souřadnice jedné fokály

$$x_2 = x_0 \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \quad y_2 = y_0 \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha}$$

a s využitím podobnosti trojúhelníků také souřadnice druhé fokály

$$x_1 = x_0 \quad y_1 = y_0 \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} .$$

3.1. Dosadíme-li výrazy pro parametrické vyjádření přímky do zobrazovacích vztahů, dojdeme k parametrickému vyjádření přímky v obrazovém prostoru.

3.2 a 3. Způsob řešení je týž jako v předchozím příkladě.

3.4. Zobrazovací rovnici $(N'/s') - (N/s) = (N' - N)/r$ lze převést na tvar $(f'/s') + (f/s) = -1$ pomocí ohniskových dalek $f = Nr/(N' - N)$ a $f' = -N'r/(N' - N)$ předmětového a obrazového prostoru. Dosazením za s a s' podle vztahů $s = x - f$ a $s' = x' - f'$ do upravené zobrazovací rovnice najdeme hledaný tvar $x \cdot x' = f \cdot f'$.

Ze zobrazovací rovnice $(f'/s') + (f/s) = -1$ vyjádříme součet $s + f$ (vynásobením s a úpravou) a tuto veličinu, která je rovna souřadnici x dosadíme do výrazu pro příčné zvětšení. Máme tedy nejprve $x = s + f = -f' \cdot s/s'$, dále pak $y'/y = f/x = -f \cdot s'/(f' \cdot s) = N \cdot s'/(N' \cdot s)$. Poslední úprava spočívala ve využití vztahu $f/f' = -N/N'$, plynoucího z uvedených vzorců pro ohniskové dálky.

3.5. Poloha obrazu předmětu (t.j. zdánlivá poloha předmětu) se bude měnit podle vztahu

$$s' = \frac{r \cdot s}{N \cdot r + (1 - N) \cdot s}.$$

Pro $s = -30$ cm dostaneme $s' = -45$ cm, pro $s = 0$ je $s' = 0$. Žádáme-li, aby $s = s'$, vychází z uvedeného vztahu $s' = s = r = -15$ cm.

3.6. $N = d/h$. Porovnejte s výsledky příkladu 2.33.

3.7. Přítomnost desky způsobí, že předmět vidíme blíže než ve skutečnosti je. Změna vzdálenosti je $d \cdot (N - 1)/N$.

3.8. $f' + f = -r$, $f'/f = -N'/N$.

3.9. Z obrázku na str. 130 vyplývá $\text{tg } \sigma'/\text{tg } \sigma = s/s'$. Další úpravy využitím vztahů $s' = x' - f'$, $s = x - f$ a $x \cdot x' = f \cdot f'$.

3.10. Z rovnice $(f'/s') + f/s = -1$ dostaneme $f' \cdot s/s' = -(s+f)$, což využijeme při úpravě úhlového zvětšení $\text{tg } \sigma'/\text{tg } \sigma = -x/f' = -(s+f)/f' = s/s'$.

3.11. Z podmínky, že úhlové zvětšení musí být rovno jedné, dostáváme $x = -f'$, $x' = -f$. Odpovídající hodnoty s a s' dostaneme pomocí vztahů $s = x - f$ a $s' = x' - f'$. Výsledek je tedy (s využitím výsledku příkladu 3.8) $s = s' = r$. Protože užité vztahy platí pro zrcadlo^x i kulovou lámavou plochu, leží oba uzlové body vždy ve středu křivosti těchto kulových ploch.

3.12. Axiální zvětšení dostaneme jako $\frac{dx'}{dx}$ a pomocí stejných úprav jako v předchozích příkladech. Hledané tvary zvětšení jsou

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = \left(\frac{s'}{s}\right)^2 \cdot \frac{N}{N'}.$$

3.13. Rozměry předmětu kolmé ke stěně akvaria se při zobrazení zkracují v poměru $1/N$. K tomuto závěru přijdeme buď přímo ze zobrazovací rovnice pro jednu kulovou lámavou plochu nebo pomocí osového zvětšení. V prvním případě musíme vzít v úvahu limitní přechod $r \rightarrow \infty$, takže zobrazovací rovnice dostane tvar $(N'/s') - N/s = 0$ a tedy $s'/s = N'/N$. Odtud je zřejmé, že malé změně polohy předmětu Δs odpovídá změna polohy obrazu $\Delta s'$ a obě splňují vztah $\Delta s'/\Delta s = N'/N$. V druhém případě dostaneme týž výsledek dosazením do vzorce pro osové zvětšení z upravené zobrazovací rovnice (dosazujeme za s'/s). Protože v našem případě je $N' = 1$, dostáváme $\frac{dx}{dx} = \frac{1}{N}$. Dosazením do vztahu pro příčné zvětšení máme $\frac{y'}{y} = 1$. Rozměry předmětu rovnoběžné s rovinou stěny akvaria si tedy zachovávají svou velikost^{xx}. Předmět a jeho obraz si tedy nemohou být podobné.

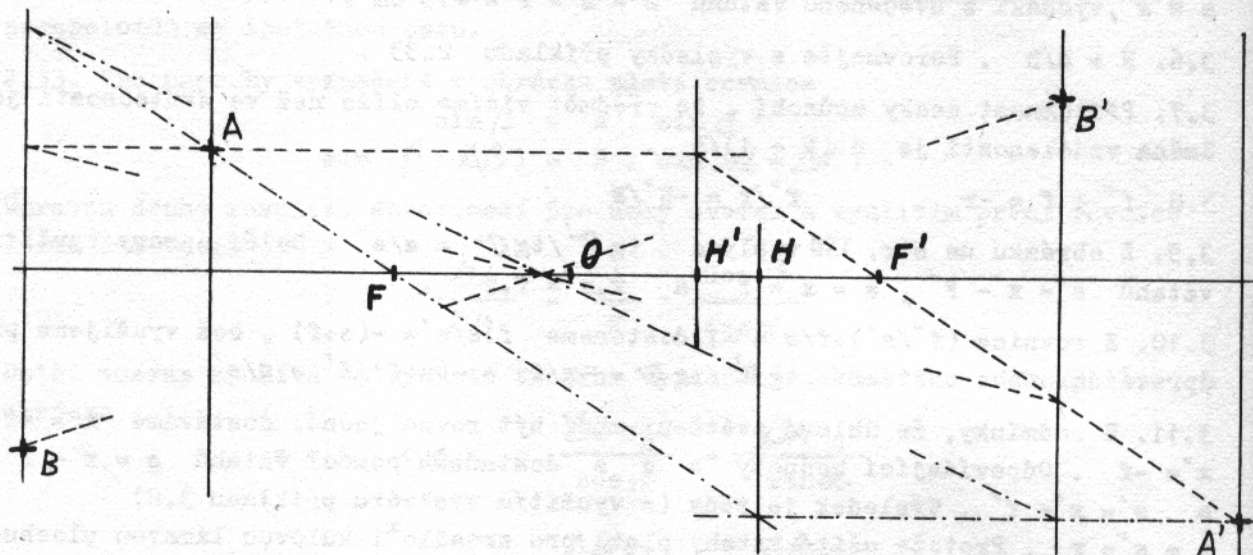
^x na kulové ploše
^{xx} při zobrazování

3.14. Průměr obrazu Slunce je roven výrazu $|y'| = r.y/(2x) = -0,00467.r$
 (V souhlase se znaménkovou dohodou na str.129 bylo dosazeno $y = 1,4 \cdot 10^6 \text{ km}$,
 $x = -1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$, r je pokládáno za veličinu zápornou) .

3.15. $f \approx 17,65 \text{ cm}$.

3.16. Skutečný obraz vzniká 120 cm před zrcadlem. Předmět musí při tom být 40 cm vzdálen od zrcadla. Neskutečný obraz vzniká 60 cm za zrcadlem. Předmět při tom leží 20 cm před zrcadlem .

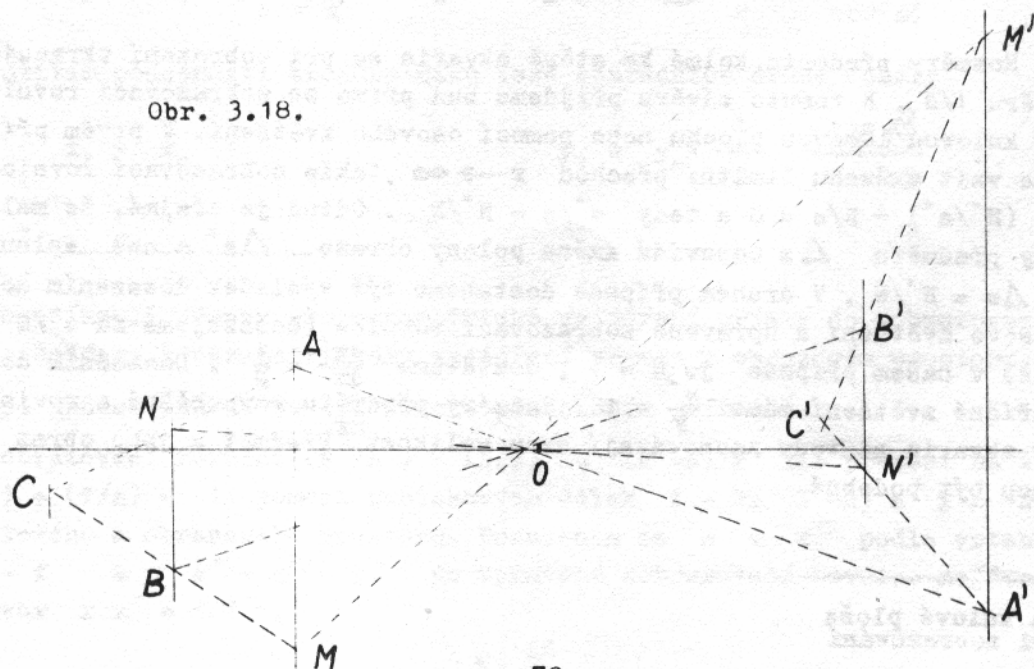
3.17. K numerickému řešení je užito zobrazovacích rovnic $x.x' = f.f'$, $\frac{y'}{y} = \frac{f}{x}$.
 Vypočtené souřadnice x a x' bodů A a A' jsou $x = -3$, $x' = 6$, ohniskové délky jsou $f = 6$, $f' = -3$. Vzdálenost hlavních rovin vychází $\overline{HH'} = -1$.



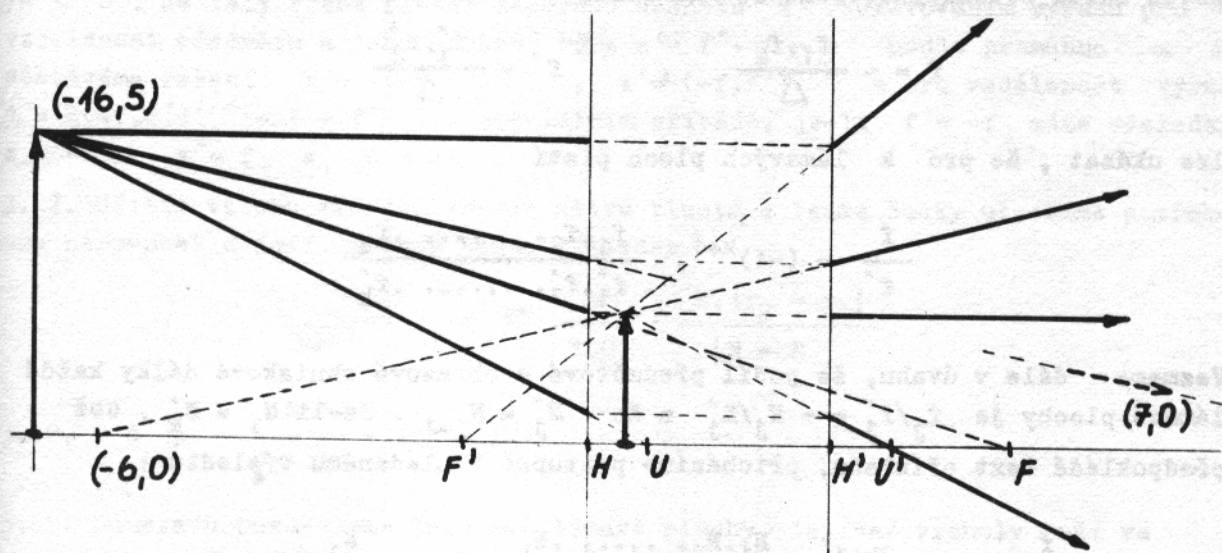
Obr. 3.17.

3.18. Pro body A a A' stejně jako pro body B a B' jsou známy hodnoty příčného zvětšení. To umožňuje snadno nalézt obrazy bodů M a N a tím i obraz bodu C .

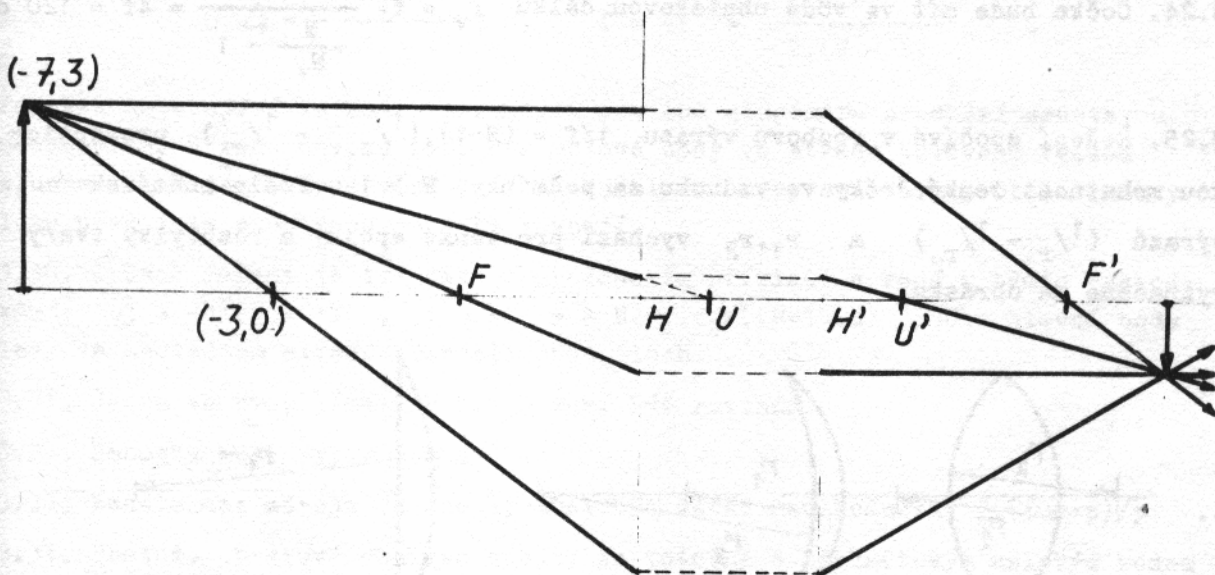
Obr. 3.18.



3.19 a 20. Konstruktivní řešení obou úloh vyplývá z uvedených obrázků.



Obr. 3.19.



Obr. 3.20.

3.21. Řešení je založeno na současném použití výrazů pro příčné a osové zvětšení soustavy. Podobnost předmětu a jeho obrazu vyžaduje, aby obě zvětšení byla stejně velká, avšak opačných znamének. Tento požadavek vede spolu se zobrazovací rovnicí k výsledkům $s = -s' = f' - f$; délkové rozměry obrazu budou v poměru N/N' k odpovídajícím rozměrům předmětu (N je index lomu předmětového a N' obrazového prostoru).

3.22. Postupným použitím vztahů pro výslednou předmětovou a obrazovou ohniskovou dálku soustavy složené ze dvou částí

$$f = - \frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta} \quad , \quad f' = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{\Delta}$$

lze ukázat, že pro k lámavých ploch platí

$$\frac{f}{f'} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k}{f'_1 \cdot f'_2 \cdot \dots \cdot f'_k}$$

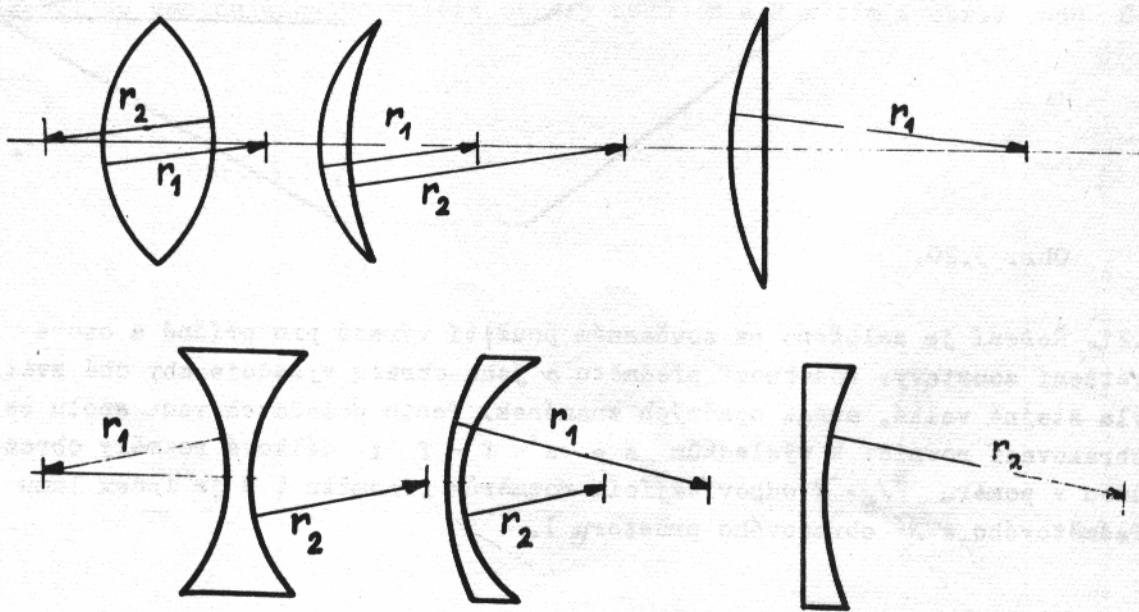
Vezmeme dále v úvahu, že podíl předmětové a obrazové ohniskové dálky každé lámavé plochy je $f_j/f'_j = -N_j/N'_j$ a že $N'_j = N_{j+1}$. Je-li $N_1 = N'_k$, což předpokládá text příkladu, přicházíme postupně k hledanému výsledku:

$$\frac{f}{f'} = (-1)^{2k+1} \cdot \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k}{N_2 \cdot N_3 \cdot \dots \cdot N_{k+1}} = - \frac{N_1}{N_{k+1}} = -1 \quad .$$

3.23. $f = 44,21 \text{ mm}$.

3.24. Čočka bude mít ve vodě ohniskovou dálku $f_v = f \cdot \frac{N - 1}{\frac{N}{N_v} - 1} = 4f = 120 \text{ cm}$.

3.25. Řešení spočívá v rozboru výrazu $1/f = (N-1) \cdot (1/r_1 - 1/r_2)$ pro optickou mohutnost tenké čočky ve vzduchu za podmínky $N > 1$. Podle znamének výrazů $(1/r_1 - 1/r_2)$ a $r_1 \cdot r_2$ vychází pro tenké spojky a rozptylky tvary vyznačené na obrázku.



Obr. 3.25.

3.26. Skutečnému obrazu vytvořenému spojnou čočkou odpovídá příčné zvětšení $\beta < 0$. Je tedy třeba hledat zápornou hodnotu x . Derivováním výrazu pro vzdálenost předmětu a jeho obrazu $d = x' - f' + f - x$ podle proměnné x dostáváme řešení $x = -(-f \cdot f')^{1/2}$, $x' = (-f \cdot f')^{1/2}$ a pro vzdálenost výraz $d = 2(-f \cdot f')^{1/2} + f - f'$. Ve speciálním případě, je-li $f' = -f$ máme výsledky $x = -f$, $x' = f$ a $d = 4f$.

3.27. Užitím vztahů pro ohniskovou dálku tlusté a tenké čočky utvoříme potřebnou nerovnost a její úpravou tento výsledek

$$d < \frac{p}{100} \cdot \frac{N \cdot |r_2 - r_1|}{|N - N'|}$$

3.28.
$$d > \frac{N}{N - 1} \cdot (r_1 - r_2)$$

3.29. Soustavu posuzujeme jako dvě lámavé plochy, jejichž vrcholy leží ve vzdálenosti $2r$ a jejichž poloměry křivosti jsou r a $-r$. Užijeme-li známých vztahů pro ohniskové dálky lámavé plochy, můžeme stanovit optický interval z podmínky $2r = -f'_1 + \Delta + f_2$ a výsledné ohniskové dálky celé soustavy. Dostáváme tak

$$\Delta = -\frac{2r}{N - 1}, \quad f = -f' = \frac{N \cdot r}{2 \cdot (N - 1)}$$

Paprsek dopadající ve směru normály k povrchu slunoměru prochází soustavou neodchýlen. Z toho důvodu leží oba uzlové body ve středu kulového tělesa slunoměru. V témže bodě však leží i oba hlavní body soustavy protože indexy lomu před i za soustavou se sobě rovnají.

3.30. Způsob řešení je týž jako v předchozím příkladě a vede k těmto výsledkům: $\Delta = -d/(N - 1)$, $f = -f' = -N \cdot r_1 \cdot r_2 / ((N - 1) \cdot d)$. Oba hlavní body leží ve společném středu křivosti obou ploch.

3.31. Jedna ze dvou lámavých ploch musí být rovinná.

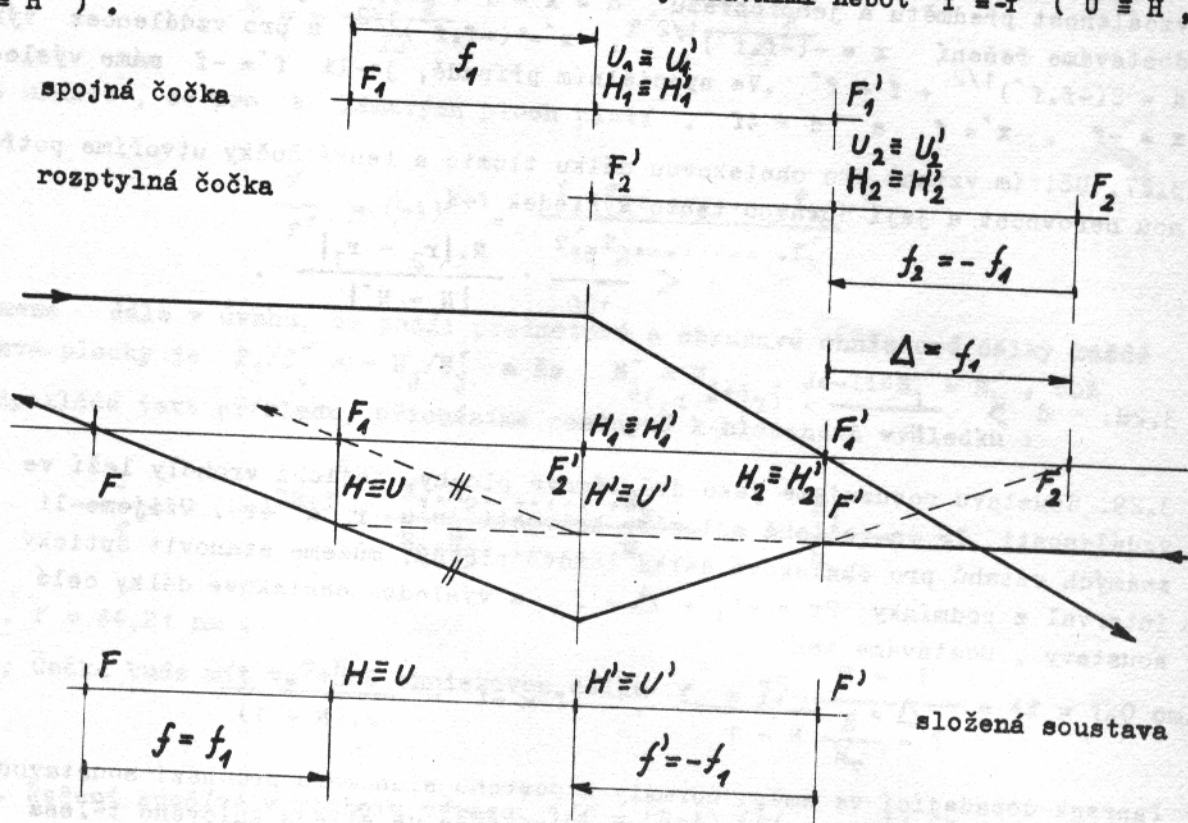
3.32. Rohovka musí rýt rovinná.

3.33. Vzdálenost zdroje od spojky musí být větší než hodnota $f \cdot (100 + p)/p$.

3.34. Protože obrazové ohnisko spojky je totožné s předmětovým uzlovým bodem rozptylky, vyplývá z toho, že v tomtéž místě leží i obrazové ohnisko celé soustavy. Vzhledem k tomu, že jde o tenkou spojku, musí být obrazový hlavní bod celé soustavy totožný s hlavními body spojky. Při opačném chodu rovnoběžných paprsků rovnoběžných s optickou osou soustavy, vznikne po průchodu rozptylkou homocentrický svazek s centrem v předmětovém ohnisku F_2 rozptylky. Předmětové ohnisko soustavy musí tedy být obrazem bodu F_2 , vytvořeným spojkou při opačném chodu paprsků. Předmětový hlavní bod soustavy pak zkonstruujeme stejným způsobem jako obrazový.

Vzhledem k tomu, že platí $f_2 = -f_1$ a k tomu, že optický interval je $\Delta = \overline{F_1 F_2} = f_1$ dostáváme výsledné ohniskové dálky $f = f_1$ a $f' = -f_1$. Polohu výsledného obrazového ohniska vypočteme jako polohu obrazu bodu F_1 vytvořeného rozptylkou při chodu paprsků zleva doprava, polohu výsledného

předmětového ohniska vypočteme jako polohu obrazu bodu F_2 vytvořeného spojkou při opačném chodu paprsků. Hlavní body určíme z poloh těchto ohnisek a z ohniskových dálek. Uzlové body jsou totožné s body hlavními neboť $f = -f'$ ($U \equiv H$, $U' \equiv H'$).



Obr. 3.34.

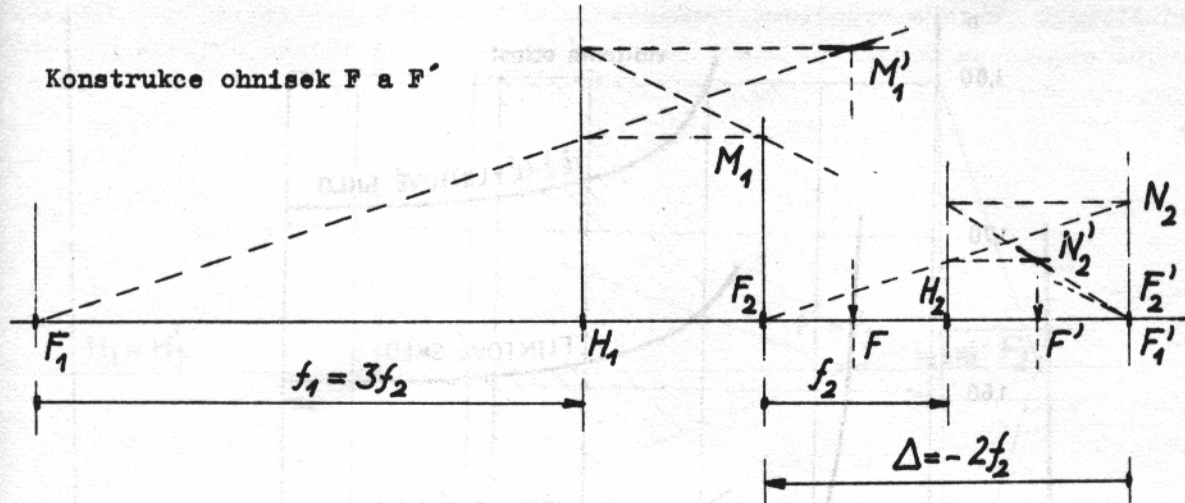
3.35. Konstrukci výsledného obrazového ohniska soustavy provedeme tak, že zobrazíme bod N_2 druhou částí soustavy, a to pomocí paprsků jdoucích zleva doprava. Bod N_2' , obraz bodu N_2 , leží ve výsledné obrazové ohniskové rovině. Výpočet z rovnice $x_2'(F') \cdot x_2(F_1') = -f_2^2$, kde $x_2(F_1') = 2f_2$, dává $x_2'(F') = -f_2/2$.

Konstrukci výsledného předmětového ohniska soustavy provedeme obdobně tak, že zobrazíme bod M_1 prvou částí soustavy, a to pomocí paprsků jdoucích opačně, t.j. zprava doleva. Bod M_1' leží nyní ve výsledné předmětové ohniskové rovině. Výpočet z rovnice $x_1(F) \cdot x_1'(F_2) = -f_1^2$, kde $x_1'(F_2) = -2f_1/3$, vede k výsledku $x_1(F) = 3f_1/2$.

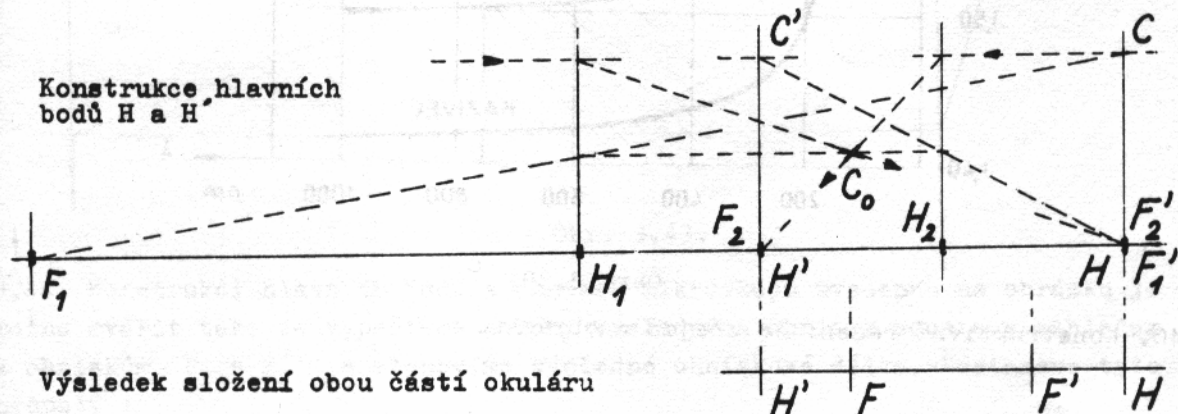
Konstrukci hlavních bodů provedeme tak, že na rovnoběžce s optickou osou najdeme dvojici sdružených bodů. Takové dvojici přísluší příčné zvětšení rovné jedné a musí proto ležet v hlavních rovinách soustavy. Zobrazíme-li bod C_0 druhou částí soustavy (bod C') paprsky jdoucími zleva doprava a zobrazíme-li též bod C_0 prvou částí soustavy paprsky jdoucími opačným směrem (bod C), nalezneme takovou dvojici sdružených bodů. Pomocí vypočtených poloh ohnisek soustavy a ohniskových dálek stanovených ze

vzorce $f = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}$, do něhož dosadíme optický interval $\Delta = -2f_2$, určíme též polohy hlavních bodů. Ohnisková délka soustavy je $f = 3f_2/2$.

Konstrukce ohnisek F a F'



Konstrukce hlavních bodů H a H'



Výsledek složení obou částí okuláru

Obr. 3.35

3.36. Derivováním výrazu pro $1/f$ podle vlnové délky a anulováním této derivace získáme výsledek $v = (f_1 + f_2)/2$.

3.37. Lámané úhly φ_1 a φ_2 jsou dány vztahy

$$\varphi_1 = \frac{\frac{dN_2}{d\lambda}}{(N_1-1) \frac{dN_2}{d\lambda} - (N_2-1) \frac{dN_1}{d\lambda}}, \quad \varphi_2 = \frac{\frac{dN_1}{d\lambda}}{(N_1-1) \frac{dN_2}{d\lambda} - (N_2-1) \frac{dN_1}{d\lambda}},$$

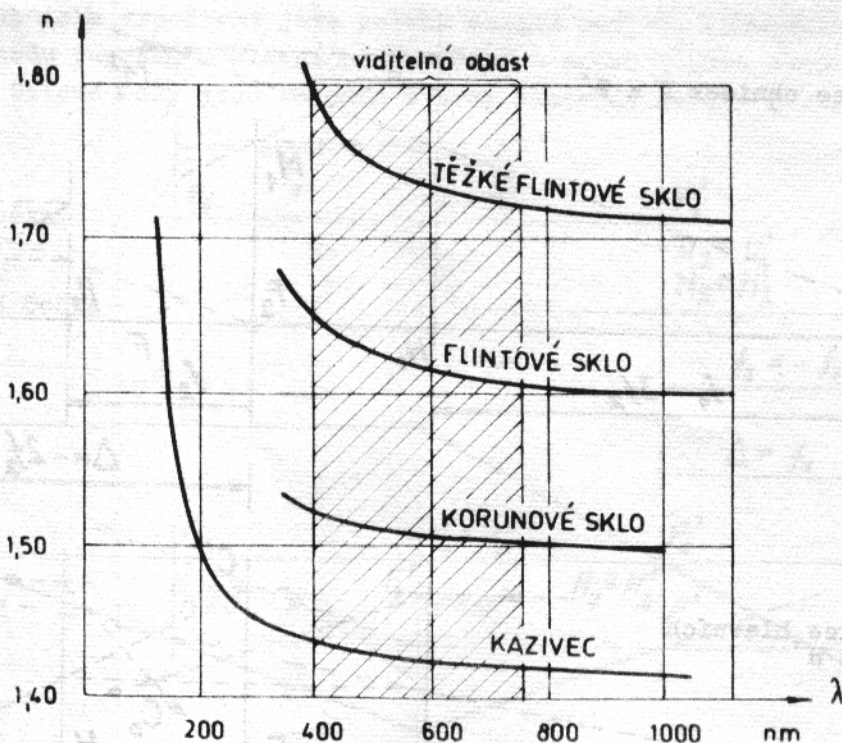
podmínka achromasie deviačního úhlu zní $\varphi_1 \frac{dN_1}{d\lambda} = \varphi_2 \frac{dN_2}{d\lambda}$.

3.38. Tloušťka čočky d a hodnoty indexu lomu N_1 a N_2 odpovídající vlnovým délkám λ_1 a λ_2 musí splňovat vztah

$$d = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot (r_1 - r_2)}{N_1 \cdot N_2 - 1}.$$

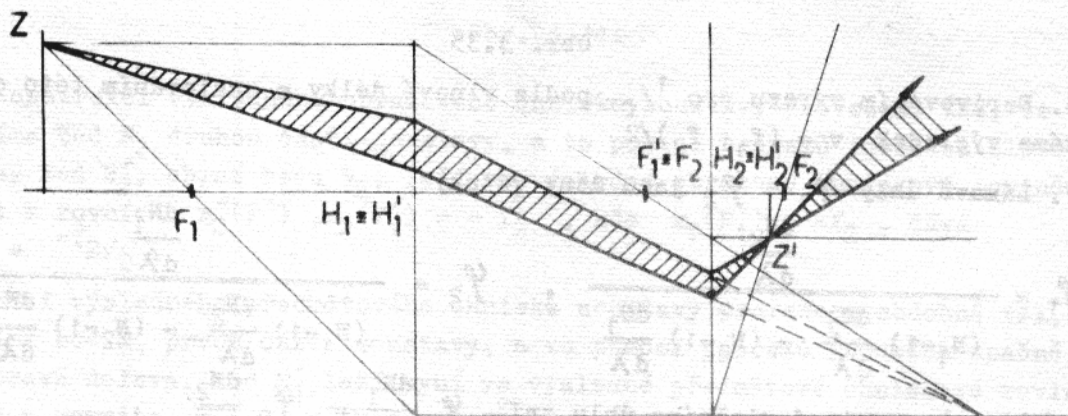
3.39. $\frac{dN_1}{d\lambda} = - \frac{dN_2}{d\lambda} \cdot \frac{f_2 \cdot (N_2 - 1)}{f_1 \cdot (N_1 - 1)}$. Z této podmínky achromasie ohniskové

dálky vyplývá, že musí jít o kombinaci spojky a rozptylky, neboť derivace indexů lomu podle vlnové délky jsou téhož znaménka (obr. 3.39 a tab. V).



Obr. 3.39.

3.40. Konstruktivní řešení je zřejmé z obrázku.



Obr. 3.40.

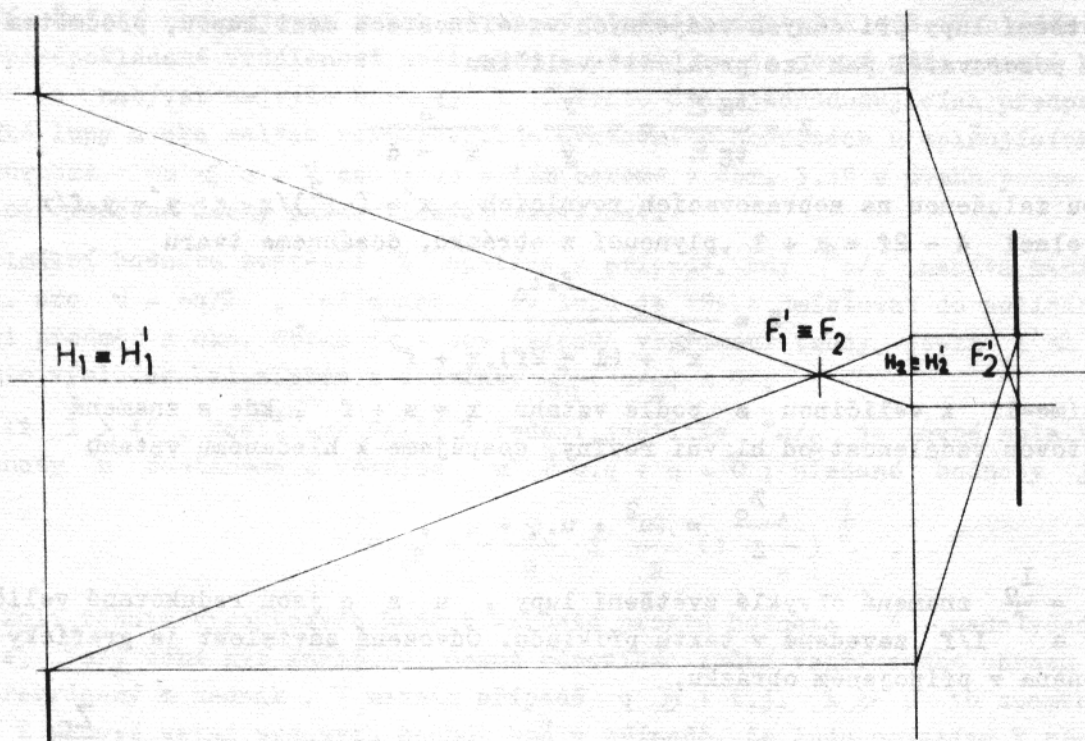
3.41. Keplerův dalekohled : $f_1 = 50 \text{ cm}$, $f_2 = 5 \text{ cm}$.

Galileův dalekohled : $f_1 \approx 61,1 \text{ cm}$, $f_2 \approx -6,1 \text{ cm}$.

3.42. Okulár je třeba vzdálit od objektivu o délku $x' = \frac{-f^2}{f + \delta} \approx 1,594 \text{ mm}$.

3.43. Průměr obruby objektivu je 2,4 cm, výstupní pupila leží 2,25 cm od okuláru.

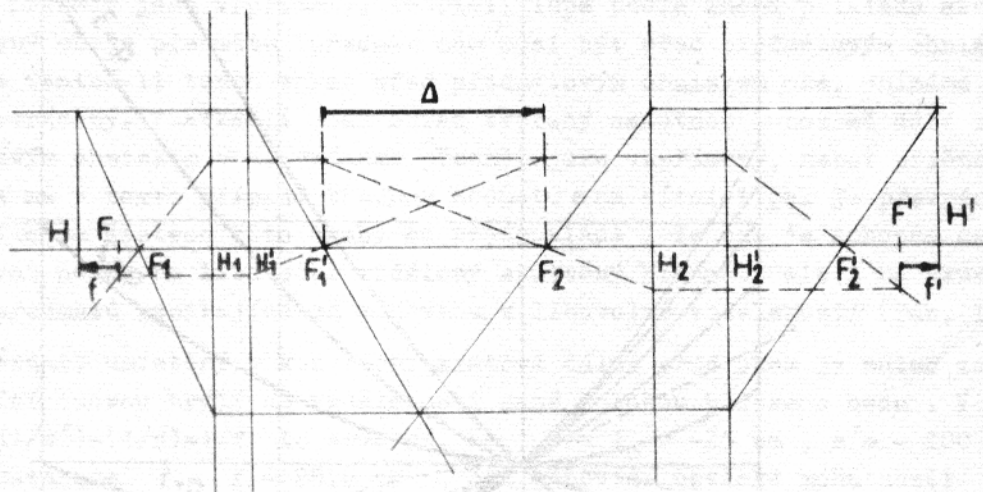
(Pro větší zřetelnost konstrukce je měřítko ve směru kolmém k optické ose 5 krát zvětšeno.)



Obr. 3.43.

3.44. Konstrukci hlavních bodů a ohnisek mikroskopu uvedenou na obrázku je možno ověřit tak, že vypočteme polohy výsledných ohnisek soustavy vzhledem k ohniskům F_1 a F_2' a stanovíme výsledné ohniskové délky. Dostaneme tyto hodnoty :

$$\overline{F_1 F} \doteq -0,66 \text{ cm} , \overline{F_2 F'} = 1,5 \text{ cm} , f = -f' = -1 \text{ cm} .$$



Obr. 3.44.

3.45. Podle významu úhlů ϵ a ϵ' zavedených v obrázku můžeme psát

$$\text{tg } \epsilon' = \frac{y'}{x' - d} \quad \text{a} \quad \text{tg } \epsilon = \frac{y}{-l_0} .$$

Za zvětšení lupy při daných vzájemných vzdálenostech mezi lupou, předmětem a okem pozorovatel pak lze prohlásit veličinu

$$Z = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{\operatorname{tg} \varepsilon} = - \frac{y'}{y} \cdot \frac{l_0}{x' - d}$$

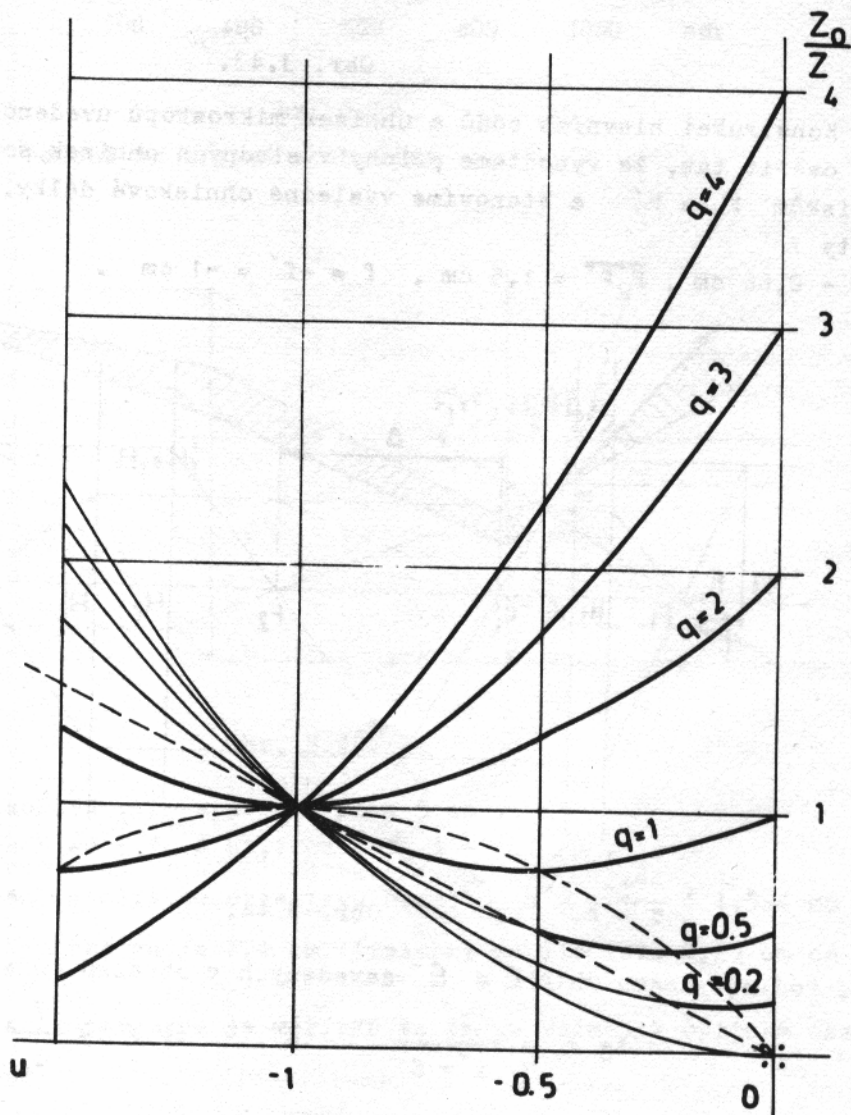
Úpravou založenou na zobrazovacích rovnicích $x' = (-f^2)/x$ a $y' = y \cdot f/x$ a na relaci $d - 2f = x + l$, plynoucí z obrázku, dosáhneme tvaru

$$Z = \frac{f \cdot l_0}{x^2 + (1 - 2f) \cdot x + f^2}$$

Nahradíme-li x veličinou s podle vztahu $x = s + f$, kde s znamená předmětovou vzdálenost od hlavní roviny, dospějeme k hledanému vztahu

$$\frac{Z_0}{Z} = u^2 + u \cdot q + q,$$

kde $Z_0 = \frac{l_0}{f}$ znamená obvyklé zvětšení lupy, u a q jsou redukované veličiny s/f a $1/f$ zavedené v textu příkladu. Odvozená závislost je graficky znázorněna v připojeném obrázku,



Obr. 3.45.

3.46. Řešení navazuje na vztah odvozený v předchozím příkladě. Vzhledem k tomu, že předpokládaná vzdálenost mezi okem a předmětem je pevná, může prostá hodnota s nabývat nejvýše hodnoty l . Proto při zjednodušujících předpokladech tenké lupy a oka malých rozměrů nutno uvažovat o hodnotách u splňujících nerovnost $-u < q$. V souhlase s tím bereme v obr. 3.45 v úvahu pouze silně vytažené úseky parabolických závislostí.

Maximální hodnota zvětšení Z nastává v případě, kdy $Z_{o/z}$ nabývá minima, t.j. pro $u = -q/2$, což znamená, že lupu je třeba umísťovat do pólícího bodu mezi předmět a oko. Obraz je v tom případě vzpřímený tehdy, je-li $l < 4f$. Tento výsledek byl získán z podmínky $\frac{d}{du}(Z_{o/z}) = 0$. Je-li $l > 4f$, dostáváme další 2 řešení, jestliže $Z_{o/z}$ je rovné nule. Příslušné hodnoty u dostaneme z rovnice $u^2 + u \cdot q + q = 0$; hledané hodnoty jsou

$$u_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \frac{q}{2} \left(1 - \frac{4}{q}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

V okolí těchto vypočtených hodnot vzrůstá prostá hodnota Z nade všechny meze, $Z_{o/z}$ mění své znaménko, čemuž odpovídá změna vzpřímeného obrazu v převrácený a naopak. V mezním případě $q \gg 1$ t.j. $l \gg f$ to znamená, že Z nabývá velmi vysokých hodnot buď v případě, že lupu umístíme k předmětu na vzdálenost přibližně rovnou ohniskové dálce ($s_1 \doteq -f$), nebo k oku přibližně na tutéž vzdálenost ($s_2 \doteq f - l$). Praktický význam má však z těchto 2 řešení pouze případ první, kdy lupu klademe blíže k předmětu, a to do vzdálenosti poněkud větší než f , kdy obraz je ještě zřetelný a současně vzpřímený. Hodnoty s_1 a s_2 vyplývají z přibližného řešení $u_1 \doteq -1$ a $u_2 \doteq 1 - q$ v mezním případě $q \gg 1$.

3.47. O vjemu rozhoduje obraz na sítnici oka. Je-li obraz předmětu převrácený, vnímáme předmět jako vzpřímený. Tvoří-li lupa podle znění příkladu skutečný převrácený obraz předmětu (předmět sám musí být před předmětovým ohniskem lupy), a vzniká-li tento obraz před předmětovým ohniskem oka, vnímáme předmět jako převrácený. Vzniká-li však obraz tvořený samotnou lupou až dále za předmětovým ohniskem oka, vnímáme předmět jako vzpřímený, neboť příčné zvětšení oka má v tomto případě kladnou hodnotu a na sítnici pak je převrácený obraz. V obou částech této úvahy se předpokládá, že oko je schopno neomezeně akomodovat nejen na libovolně vzdálený skutečný předmět, ale i na skutečné obrazy předmětů vznikající za rohovkou v libovolné vzdálenosti (Tab. I).

3.48. Předmět umístěný v konvenční zrakové dálce před okem je nutno zobrazit korigující čočkou brýlí do vzdálenosti dané polohou blízkého bodu. V čočkové rovnici $(1/s') - (1/s) = 1/f$ to znamená, že $s = l_o = -25$ cm, $s' = -200$ cm. Odtud dostaneme $f \doteq 28,6$ cm, což odpovídá optické mohutnosti $3,5$ D.

3.49. Předměty v nekonečnu je nutno zobrazit korigující čočkou brýlí do místa daného polohou vzdáleného bodu. V čočkové rovnici to znamená $(1/s) = 0$, $s' = -100$ cm, což vede k výsledkům $f = -100$ cm a optické mohutnosti -1 D.

3.50. Stejným způsobem jako v předchozím příkladě určíme čočky brýlí pro pozorování vzdálených předmětů. Dostaneme tak rozptylné čočky s $f = -90$ cm, tedy s mohutností asi $-1,11$ D. V dalším postupu pak hledáme vzdálenost předmětu před čočkou brýlí takovou, aby obraz vytvořený korigující čočkou vznikl

v poloze blízkého bodu oka. V čočkové rovnici tedy máme $f = -90$ cm, $s' = -15$ cm, a tedy dostaneme $s = -18$ cm. Navržených brýlí lze tedy užívat k oběma účelům. Z hlediska návrhu brýlí pro čtení je třeba, aby předmět v konvenční zrakové vzdálenosti se zobrazoval do místa blízkého bodu. Pro $s = -25$ cm, $s' = -15$ cm vychází ohnisková dálka $f = -37,5$ cm a optická mohutnost $-2,66$ D. Předměty velmi vzdálené se těmito brýlemi zobrazují do vzdálenosti 37,5 cm, tedy menší než je odlehlost vzdáleného bodu.

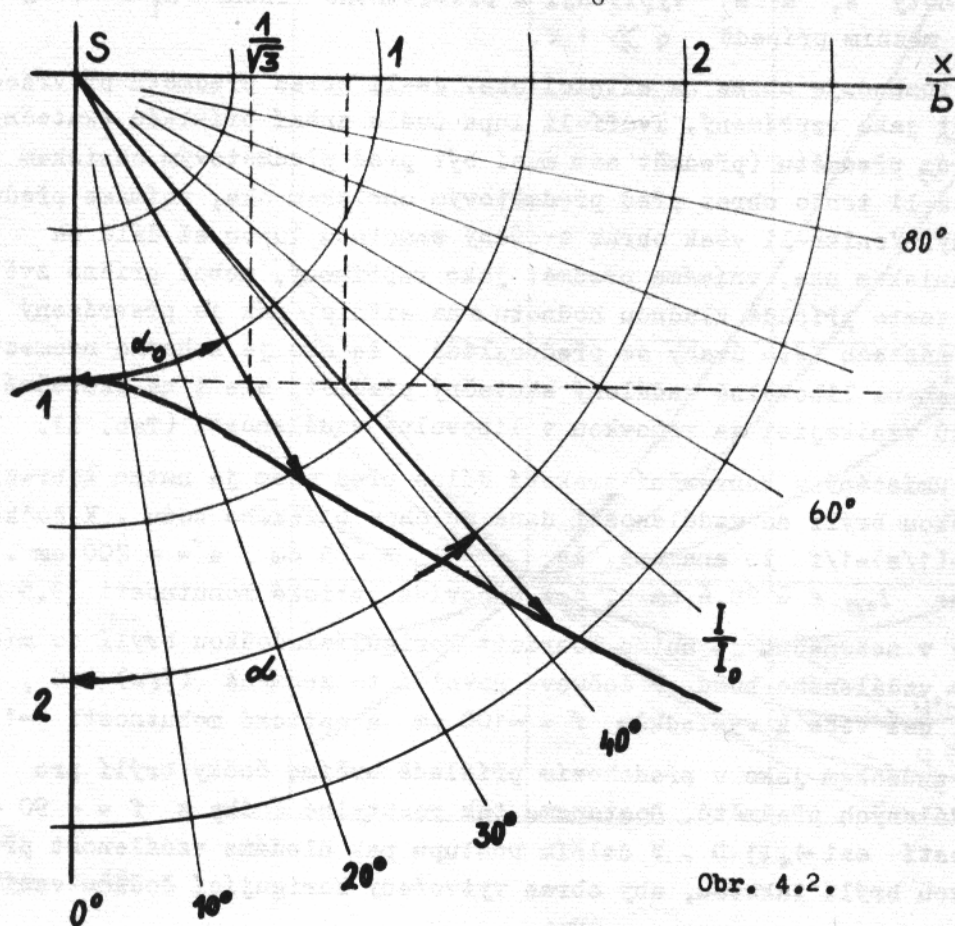
Závěr: Brýle s optickou mohutností od $-1,11$ do $-2,66$ D vyhovují současně oběma účelům.

3.51. Předmět v konvenční zrakové vzdálenosti zobrazíme čočkou brýlí do blízkého bodu ($s = -25$, $s' = -150$). Dostaneme tak $f = 30$ cm ($3,33$ D). Těmito brýlemi se do vzdáleného bodu ($s' = 150$) zobrazují předměty ze vzdálenosti 37,5 cm (t.j. $s = -37,5$ cm). Vzdálené předměty je proto nutno pozorovat bez brýlí.

3.52. Opravení krátkozrakosti se docílí brýlemi s optickou mohutností $-1,66$ D. Blízký bod oka s brýlemi (t.j. blízký bod po nasazení brýlí) se posune do vzdálenosti 20 cm před okem. Brýle vyhovují pro čtení i pro pozorování na dálku.

4.1. Lampu je třeba umístit do výšky $h = a \cdot (2)^{-\frac{1}{2}}$ nad stolem.

4.2. Úhlová závislost svítivosti je $I = I_0 \cdot \cos^3 \alpha$. Inflexní bod křivky fotometrického diagramu přísluší úhlu $\alpha_0 = \pi/6$.



Obr. 4.2.

4.3. Podle označení užitého v obrázku je $dS = 2\pi x \cdot dx$, $\Delta\omega = \frac{\sigma \cos i}{x^2 + d^2}$,
 $\cos i = \frac{d}{(x^2 + d^2)^{1/2}}$. Normálová svítivost plošného zdroje ve tvaru kruhu
je rovna $B \cdot \pi R^2$. Příspěvek k osvětlení stínítka fotometru plošným zdrojem
se tedy dá vyjádřit takto:

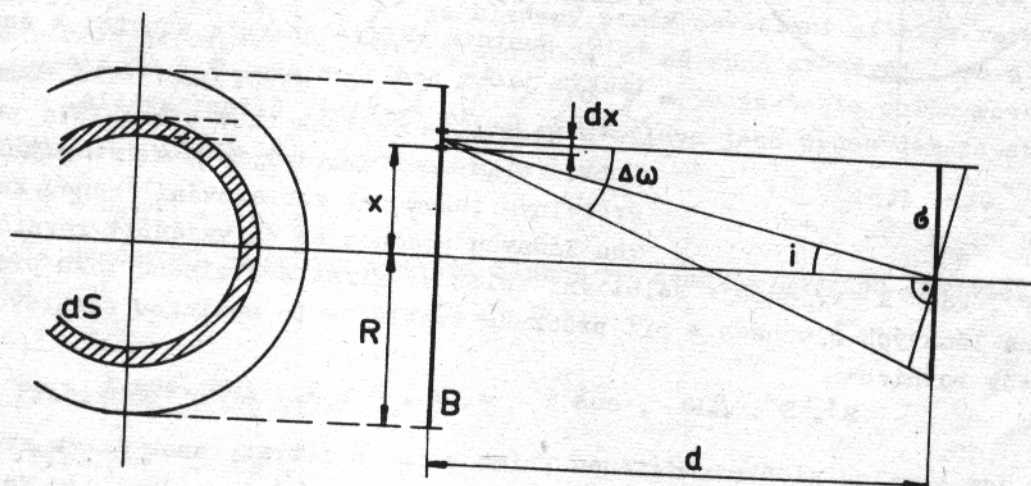
$$dA = \frac{dF}{\sigma} = \frac{B \cdot dS \cdot \cos i \cdot \Delta\omega}{\sigma} = B \cdot 2\pi x \cdot dx \cdot (\cos i) \cdot \frac{\cos i}{x^2 + d^2} = \pi B \cdot d^2 \frac{2x \cdot dx}{(x^2 + d^2)^2}.$$

Integrací dostaneme

$$A = \pi B d^2 \cdot \int_0^R \frac{2x \cdot dx}{(x^2 + d^2)^2} = \frac{B \cdot \pi R^2}{R^2 + d^2}.$$

Osvětlení, které působí bodový zdroj téže svítivosti jako zdroj plošný je

$$A_1 = \frac{B \pi R^2}{d^2}, \text{ takže hledaný poměr obou osvětlení je } \frac{A}{A_1} = \frac{d^2}{R^2 + d^2}.$$



Obr. 4.3.

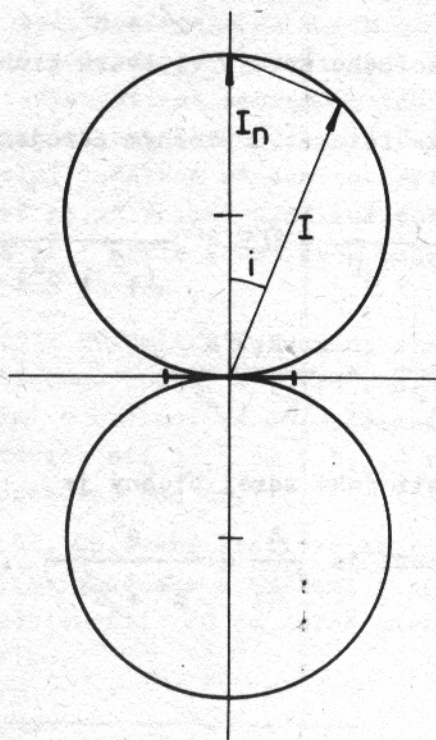
4.4. Přítomnost zrcadla v bodě B způsobí, že osvětlení v bodě A vzroste na hodnotu

$$E = I \left[\frac{1}{a^2} + \frac{a}{(b + (a^2 + b^2)^{1/2})^2 \cdot (a^2 + b^2)^{1/2}} \right].$$

Osvětlení není možno zdvojnásobit, protože dráha paprsku odraženého v zrcadle je vždy větší než přímá vzdálenost místa A od zdroje.

4.5. Svítivost plošného zdroje ve směru odkloněném o úhel i od normály k rovině zdroje je rovna $I = I_n \cdot \cos i$; I_n je svítivost ve směru normály. Z této závislosti vyplývá, že fotometrický diagram má tvar dvou kulových ploch, které se dotýkají v jednom bodě rovinné plošky zdroje. Tento výsledek je přesněji vyjádřen obrázkem na následující straně.

4.6. Poměr světelných toků je roven poměru jasů těchto zdrojů.



Obr. 4.5.

4.7. Užitím výsledku předchozího příkladu je možno učinit závěr, že osvětlení uvažované části roviny je rovno zářivosti plošného zdroje o jasu B . Tato zářivost je rovna výrazu $\pi \cdot B$.

4.8. Střední sférická svítivost zdroje se dá vypočítat ze vztahu

$$I_{\text{stř}} = \frac{1 - k}{k} \cdot R^2 \cdot A.$$

Velikost A znamená osvětlení vnitřního povrchu fotometru, které pochází pouze od rozptýleného světla.

4.9. Povrch koule bude mít všude stejný jas rovný hodnotě $B = B_0 \sigma / (4\pi r^2)$.

B_0 je jas plošky σ osvětlené rovnoběžným svazkem paprsků, r je poloměr koule.

4.10. Hustota zářivé energie souvisí s energetickým jasnem podle vztahu $\rho = 4\pi B/c$, v němž c je rychlost šíření světla.

4.11. Vztah mezi vystupujícím a vstupujícím světelným tokem při zobrazování jednou kulovou lámavou plochou se dá vyjádřit rovnicí

$F' = k \cdot F$, kde k vyjadřuje relativní velikost ztrát světelného toku při odrazu na lámavých plochách a při průchodu světla touto optickou soustavou. Platí tedy rovnice

$$B' \cdot S' \cdot \Delta\omega' \cdot \cos i' = k \cdot B \cdot S \cdot \Delta\omega \cdot \cos i.$$

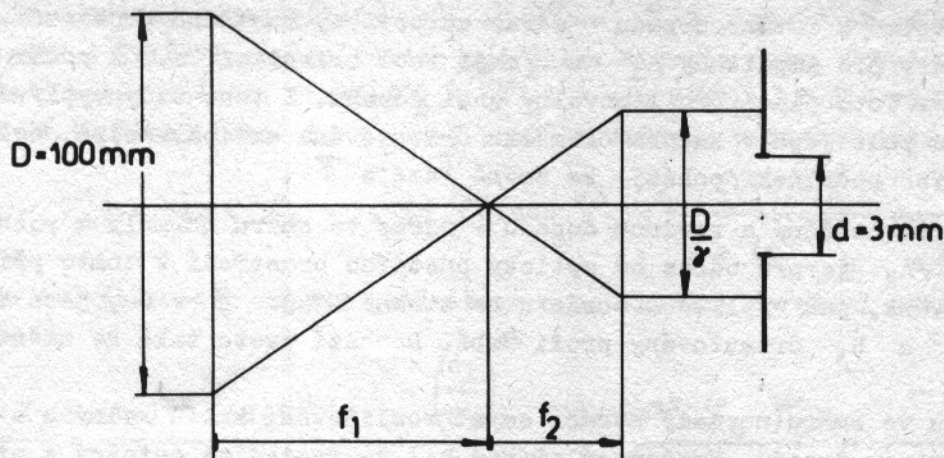
Protože jde o malou plošku umístěnou kolmo k ose a zobrazovanou úzkým svazkem paraxiálních paprsků, můžeme položit $\cos i' = \cos i = 1$. Jestliže vezmeme v úvahu také vztahy pro příčné a úhlové zvětšení, je možné provést následující úpravy uvedené rovnice

$$\frac{B'}{B} = k \frac{S}{S'} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} = k \left(\frac{s}{s'} \cdot \frac{N'}{N} \right)^2 \cdot \left(\frac{s'}{s} \right)^2 = k \cdot \left(\frac{N'}{N} \right)^2.$$

K podobnému výsledku je možno dojít při libovolně složité optické soustavě. V tomto obecném případě jsou N' a N indexy lomu posledního a prvního prostředí a k vyjadřuje celkové poměrné ztráty světelného toku.

4.12. Imerse v popisovaném uspořádání odstraňuje nepříznivý vliv úplného odrazu na horním povrchu krycího skla. Prostorový úhel využitých paprsků je menší. Při použití imerse se osvětlení v místě obrazu zvýší asi 3,4 krát.

4.13. Poměr osvětlení bude roven $A_1/A_2 = \frac{16}{9}$.



Obr. 4.14.

4.14. V obrázku znamená D průměr objektivu, d průměr zornice; γ je úhlové zvětšení dalekohledu rovné (až na znaménko) poměru ohniskových dalek f_1/f_2 . Pro $d < D/\gamma$ je hledaný poměr osvětlení sítnice roven jedné. Tato nerovnost je splněna pro 20 a 30 násobné zvětšení. Pro $d > D/\gamma$ je poměr osvětlení roven $D^2/(\gamma \cdot d)^2$. Pro $\gamma = 50$ je tento poměr roven $0,4$. Ztráty světelného toku spojené s odrazem světla a jeho průchodem soustavou dalekohledu nebyly brány při výpočtu v úvahu.

4.15. $k = 0,086$.

4.16. Za uvedených podmínek vytváří Slunce na zemském povrchu osvětlení asi 110 000 luxů.

4.17. 118°C .

4.18. Přibližně $1,68 \text{ kW/m}^2$.

4.19. Přibližně 21°C .

4.20. 2055°C .

4.21. $14,1 \text{ lm/W}$.

4.22. 5220 K .

4.23. 84 s .

5.1. Oba obrázky v textu příkladu představují jednu možnou volbu směrů, v nichž amplitudy elektrických polí mají kladné hodnoty. Této volbě přísluší tvar Fresnelových vzorců na straně 126 s připojenými grafickými závislostmi na úhlu dopadu γ .

Pro rozhodnutí otázky, zda dochází ke změně fáze o π , jsou podstatné dvě okolnosti:

- 1) jaké znaménko poměru amplitud určuje příslušný Fresnelův vzorec,
- 2) jaká je vzájemná orientace kladných směrů pro zúčastněné amplitudy (paralelní nebo antiparalelní).

a) Kmity kolmé k rovině dopadu - odraz od opticky hustšího prostředí. Kladné směry pro amplitudy $A_{\perp}$ a $R_{\perp}$ mají touž orientaci, avšak poměr $R_{\perp}/A_{\perp}$ je záporný. Toto platí pro libovolný úhel dopadu. Z toho tedy vyplývá, že elektrická pole jsou v každém okamžiku orientována antiparalelně, což znamená, že za daných podmínek dochází, ke změně fáze o π .

b1) Kmity rovnoběžné s rovinou dopadu - odraz ve směru normály k rozhraní. Poměr $R_{\parallel}/A_{\parallel}$ je pro odraz od opticky hustšího prostředí v tomto případě kladný, avšak, jak vyplývá z obrázku na straně 127 pro $\varphi \rightarrow 0$, jsou kladné směry $A_{\parallel}$ a $R_{\parallel}$ orientovány proti sobě. Dochází proto také ke změně fáze o π .

Při dopadu ve směru normály ztrácí smysl rozlišování kmitů kolmých a rovnoběžných s rovinou dopadu. Uvažovaný případ b1) je fyzikálně totožný s případem a) pro $\varphi \rightarrow 0$ a učiněné závěry nejsou v rozporu.

b2) Kmity rovnoběžné s rovinou dopadu - odraz ve směru rovnoběžném s rozhraním. Pro $\varphi \rightarrow \pi/2$ dostaneme, že $R_{\parallel}/A_{\parallel}$ je záporné, při čemž kladné směry $A_{\parallel}$ a $R_{\parallel}$ jsou téže orientace. Ke změně fáze tedy dochází i v tomto posledním případě.

5.2. Správnost všech tvrzení lze prokázat týmiž úvahami jako v předešlém příkladě.

5.3. Pro kolmý odraz a kolmý průchod rovinným rozhraním za uvedených podmínek platí :

$$\frac{I_{\text{odr}}}{I_{\text{dop}}} = \left(\frac{N_2 - N_1}{N_2 + N_1} \right)^2 \quad \text{a} \quad \frac{I_{\text{lom}}}{I_{\text{dop}}} = \frac{4N_1 \cdot N_2}{(N_2 + N_1)^2}.$$

Nezáleží na tom, z kterého prostředí světlo na rozhraní dopadá. N_1 a N_2 jsou indexy lomu obou prostředí.

5.4. Tvrzení je možno prokázat dvojím přímým odvozováním pro dopad z prostředí prvního pod úhlem φ a pro dopad z druhého prostředí pod úhlem γ . Oba úhly v obou případech splňují zákon lomu $N_1 \cdot \sin \varphi = N_2 \cdot \sin \gamma$, pouze svou příslušnost k lomu a dopadu si vzájemně vyměňují. Obě odvození vedou k týmž následujícím vzorcům :

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{\sin^2(\varphi - \gamma)}{\sin^2(\varphi + \gamma)}, & d_{\perp} &= \frac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\gamma}{\sin^2(\varphi + \gamma)}, \\ r_{\parallel} &= \frac{\text{tg}^2(\varphi - \gamma)}{\text{tg}^2(\varphi + \gamma)}, & d_{\parallel} &= \frac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\gamma}{\sin^2(\varphi + \gamma) \cdot \cos^2(\varphi - \gamma)}. \end{aligned}$$

Formálně provedená vzájemná záměna φ a γ nevede k žádné změně tvaru uvedených vztahů pro odrazivost a propustnost.

5.5. Použijte vztahů uvedených v předešlém příkladě.

5.6. Intenzity $I_{\parallel}$ a $I_{\perp}$ je možno vyjádřit pomocí intenzity I vstupujícího nepolarizovaného světla a propustnostmi $d_{\parallel}$ a $d_{\perp}$ uvedenými v řešení příkladu 5.4. Platí tedy

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} I \cdot (d_{\parallel})^{2k} \quad \text{a} \quad I_{\perp} = \frac{1}{2} I \cdot (d_{\perp})^{2k}.$$

Při výpočtu uijeme ještě vztahu $\varphi_B + \gamma_B = \pi/2$, který platí mezi úhlem dopadu a úhlem lomu při odrazu pod úhlem Brewsterovým. Odtud plyne jednoduše pomocná rovnost $\cos(\varphi_B - \gamma_B) = \sin 2\varphi_B$. Podle výsledku příkladu 2.10 platí také $\operatorname{tg} \varphi_B = N$, což využijeme v následující úpravě:

$$\cos(\varphi_B - \gamma_B) = \sin 2\varphi_B = 2 \cdot \sin \varphi_B \cdot \cos \varphi_B = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_B}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_B} = \frac{2N}{1 + N^2}.$$

Dosazením do výrazu pro stupeň polarizace a postupnými úpravami dostáváme

$$Q = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} = \frac{(d_{\parallel})^{2k} - (d_{\perp})^{2k}}{(d_{\parallel})^{2k} + (d_{\perp})^{2k}} = \frac{1 - \left(\frac{d_{\perp}}{d_{\parallel}}\right)^{2k}}{1 + \left(\frac{d_{\perp}}{d_{\parallel}}\right)^{2k}} = \frac{1 - \cos^{4k}(\varphi_B - \gamma_B)}{1 + \cos^{4k}(\varphi_B - \gamma_B)} = \frac{1 - \frac{2N^{4k}}{1+N^2}}{1 + \frac{2N^{4k}}{1+N^2}}.$$

Pro podíl elektrických polí získáme podobně vztah

$$\begin{aligned} \frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} &= \sqrt{\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}}} = \left(\frac{d_{\parallel}}{d_{\perp}}\right)^k = \frac{1}{\cos^{2k}(\varphi_B - \gamma_B)} = \frac{1}{\sin^{2k} 2\varphi_B} \\ &= \frac{1 + N^2}{2N} \doteq 22,9 \end{aligned}$$

Číselná hodnota stupně polarizace je $Q \doteq 0,996$.

5.7. Pro odraz zvenčí je Brewsterův úhel 49 a pro odraz zevnitř 41 stupňů.

5.8. Použitím trigonometrické formule

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{dostáváme jednoduchými}$$

úpravami hledaný výsledek:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}}{2} = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2}}{\sin^2}$$

Za předpokládaných podmínek vzniká elipticky polarizovaná vlna.

5.9. Z podmínky $\frac{d}{d\varphi} \operatorname{tg}\left(\frac{\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}}{2}\right) = 0$ dostáváme tyto výsledky:

$$\sin^2 \varphi_m = \frac{2N_2^2}{N_1^2 + N_2^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \frac{(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp})_{\max}}{2} = \frac{N_1^2 - N_2^2}{2N_1 N_2}.$$

φ_m znamená úhel, pro nějž je fázový posuv maximální.

5.10. Výpočet je založen na tom, že fázový posuv mezi složkami odraženého vlnění polarizovanými kolmo k rovině dopadu a rovnoběžně s ní, musí být 90° .

Úžitím vztahů odvozených při řešení předchozího příkladu dostáváme

$$N_1 = 1 + (2)^{\frac{1}{2}} \doteq 2,4142 \quad \text{a} \quad \varphi_{m1} \doteq 32^\circ 46'.$$

5.11. Na podkladě vztahů z řešení příkladu 5.9 dostáváme výsledky

$$N_1 = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2(2 - \sqrt{2})} \approx 1,4966 \quad \text{a} \quad \varphi_{m2} \approx 51^\circ 46'$$

5.12. Požadavek, aby se výbrus choval jako čtvrtvlnová deska vede ke vztahu pro tloušťku

$$d = \frac{(2k - 1)\lambda}{4|N_e - N_o|} \quad , \quad k \text{ je přirozené číslo} .$$

Nejmenší možné tloušťky křemenné a vápencové desky vycházejí $16 \mu\text{m}$ a $0,86 \mu\text{m}$.

5.13. Zavedeme-li označení D_k a D_v pro rozdíly $(N_e - N_o)$ mimořádného a řádného indexu lomu u křemene a vápence, můžeme při řešení úlohy vyjít z rovnice

$$d_k \cdot D_k + d_v \cdot D_v = (2k - 1) \frac{\lambda}{4} \quad , \quad \text{v níž } d_k \text{ a } d_v \text{ jsou hledané}$$

tloušťky desek a λ vlnová délka, pro níž se soustava chová jako čtvrtvlnová deska. Žádáme-li, aby se deska chovala stejně i v jistém okolí této vlnové délky, musí platit ještě rovnice, kterou dostaneme z předchozí derivováním :

$$\text{tedy} \quad d_k \frac{dD_k}{d\lambda} + d_v \frac{dD_v}{d\lambda} = (2k - 1)/4 \quad . \quad \text{Odtud vyvodíme výsledné vztahy}$$

$$d_k = \frac{\frac{2k - 1}{4} \left[\lambda \frac{dD_v}{d\lambda} - D_v \right]}{D_k \frac{dD_v}{d\lambda} - D_v \frac{dD_k}{d\lambda}} \quad \text{a} \quad d_v = \frac{\frac{2k - 1}{4} \left[D_k - \lambda \frac{dD_k}{d\lambda} \right]}{D_k \frac{dD_v}{d\lambda} - D_v \frac{dD_k}{d\lambda}} .$$

Experimentální údaje z tabulky IV umožňují udělat závěr, že obě závorky v čitatelích výsledných výrazů i jmenovatel těchto výrazů jsou kladné, takže předpokládaný způsob řešení problému je uskutečnitelný.

5.14. V popsané situaci je intenzita světla vystupujícího z analyzátoru rovna

$$I_{\text{výst}} = \frac{I}{2} \left[\cos^2(\alpha - \beta) - (\sin 2\alpha) \cdot (\sin 2\beta) \cdot \sin^2 \frac{\pi d (N_e - N_o)}{\lambda} \right] .$$

Pro případ nikolů ve zkřížené poloze ($\alpha - \beta = \pi/2$) dostáváme

$$I_+ = \frac{I}{2} (\sin^2 2\alpha) \cdot \sin^2 \left[\frac{\pi d}{\lambda} (N_e - N_o) \right] \quad \text{a podobně pro nikoly}$$

v rovnoběžné poloze ($\alpha = \beta$)

$$I_{||} = \frac{I}{2} \left[1 - (\sin^2 2\alpha) \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} (N_e - N_o) \right) \right] .$$

5.15. Zkříženým nikolům z předešlého příkladu přísluší intenzita I_+ . Dosa-díme-li $\alpha = 45^\circ$, máme speciální vztah

$$I_+ = \frac{I}{2} \sin^2 \left[\frac{\pi d}{\lambda} (N_e - N_o) \right] , \quad \text{který ukazuje, že}$$

procházející intenzita skutečně musí pro určité vlnové délky vyhasínat. Jde o to, kolikrát k tomu dojde v předpokládaném vlnovém oboru při zvoleném

materiálu a tloušťce destičky. Speciální vztah ukazuje, že hledaný počet n určíme z rovnice

$$n = d \left| \frac{D_k(\lambda_1)}{\lambda_1} - \frac{D_k(\lambda_2)}{\lambda_2} \right|, \text{ kde } D_k = N_e - N_o.$$

Užijeme-li číselné hodnoty z tabulky IV, dostaneme $n \approx 15$.

5.16. Intenzita světla vystupujícího z analyzátoru je za uvedených předpokladů rovna

$$I_{\text{výst}} = \frac{I}{2} \left[1 + (\sin 2\alpha) \cdot \sin \frac{2\pi d(N_e - N_o)}{\lambda} \right].$$

Při dané tloušťce desky a dané vlnové délce nastávají extrémy výstupní intenzity pro tyto hodnoty úhlu α :

$$\alpha = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}, \text{ k je přirozené číslo.}$$

5.17. Destička křemene musí být 5 mm silná.

5.18. Paprsek vstupující do dvojlomného materiálu desky se rozdělí ve dva paprsky, které jsou povýstupu z desky rovnoběžné. Jejich vzájemná odlehlost je přibližně rovna vzájemné vzdálenosti obou obrazů pozorovaného předmětu. Tato vzdálenost, projevující se jako stranový posuv jednoho obrazu vůči druhému, nezávisí na tom zda pozorujeme deskou předměty blízké či vzdálené. Jde-li o velké předměty ve velké vzdálenosti, je stranové posunutí velmi malé ve srovnání s rozměry předmětů (obraz je stejně velký jako předmět) a oba obrazy prakticky splývají v obraz jediný. Pozorujeme-li však podrobnosti na blízkém předmětu, jsou jejich rozměry srovnatelné se stranovým posunutím a vzájemnou vzdáleností obou obrazů pozorovaného předmětu, a proto zůstává vjem obou obrazů zachován.

5.19. 250 kg/m^3

5.20. 53° .

6.1. Intenzitu elektrického pole ve zvoleném bodě můžeme vyjádřit výrazem

$$\vec{E} = \vec{E}_{o1} \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{E}_{o2} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

v němž $\vec{E}_{o1}$ a $\vec{E}_{o2}$ jsou vektory amplitud elektrického pole, které svírají spolu úhel α . Tento výraz postupně upravíme:

$$\begin{aligned} E^2 &= E_{o1}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + E_{o2}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ 2(\vec{E}_{o1} \cdot \vec{E}_{o2}) \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) = \\ &= E_{o1}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + E_{o2}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ E_{o1} \cdot E_{o2} \cos \alpha [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

Nalezením časové střední hodnoty tohoto výrazu dostaneme

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} E_{o1}^2 + \frac{1}{2} E_{o2}^2 + E_{o1} \cdot E_{o2} \cos \alpha \overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{a zavedením}$$

hustoty záření $\bar{I}$ do tohoto výrazu podle vztahů

$$\bar{I} \sim \bar{E}^2 = E_0^2 \overline{\cos^2(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2} E_0^2 \quad \text{přicházíme}$$

k pomocnému výsledku

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + 2\sqrt{\bar{I}_1 \bar{I}_2} \cos \alpha \overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} .$$

a) Je-li fázový rozdíl konstantní, je $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ a odvozený vztah dává

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + 2\sqrt{\bar{I}_1 \bar{I}_2} \cos \alpha \cos(\varphi_1 - \varphi_2) .$$

b) Je-li podle textu příkladu $\varphi_1 - \varphi_2 = \Omega t$ a odpovídající perioda $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ je řádově rovna době pozorování, je $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \cos \Omega t$

a odvozený vztah poskytuje výsledek

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + 2\sqrt{\bar{I}_1 \bar{I}_2} \cos \alpha \cos \Omega t .$$

c) Mění-li se fázový rozdíl nepravidelně s časem, je $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = 0$

a dojdeme k výsledku $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$.

6.2. Stejný postup a tytéž úvahy jako v předchozím příkladě vedou k výsledku

$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$, který nezávisí na orientaci kmitových rovin obou vlnění.

6.3. Vztah mezi světelnými intenzitami může být vyjádřen stejně jako vztah mezi hustotami záření v předchozích dvou příkladech :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos \alpha \cos(\varphi_1 - \varphi_2) .$$

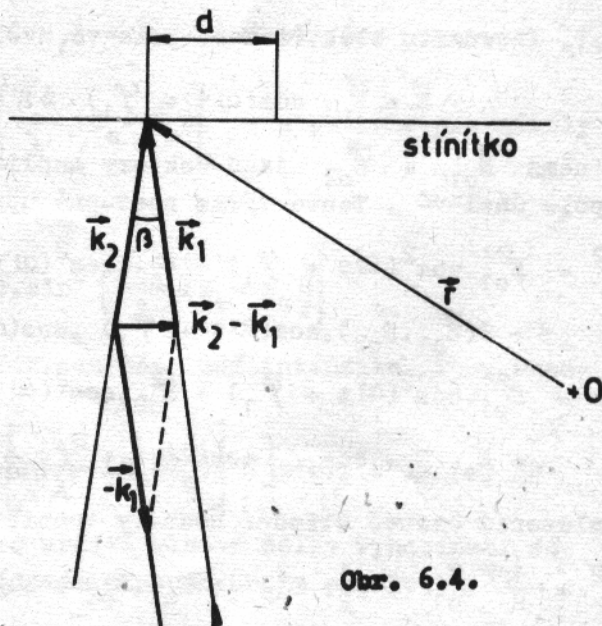
Je-li podle podmínek příkladu $I = I_1 + I_2$ pro libovolnou hodnotu $\varphi_1 - \varphi_2$, pak musí být $\cos \alpha = 0$, což v tomto případě znamená, že obě kmitové roviny musí být na sebe kolmé .

6.4. Řešení se zakládá na stejných úvahách jako v předchozích příkladech. Dostaneme tak obdobný vztah pro výsledné osvětlení stínítka, jako byl vztah pro střední hustotu záření :

$$A = A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2} \cos \alpha \cos[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2]$$

Při odvození je však třeba vycházet (na rozdíl od výchozího vztahu v příkladě 6.1) ze vztahu pro elektrické pole v tomto tvaru :

$$\vec{E} = \vec{E}_{01} \cdot \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) + \vec{E}_{02} \cdot \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) ,$$



Obr. 6.4.

v němž $\vec{k}_1$ a $\vec{k}_2$ jsou vlnové vektory téže velikosti $2\pi/\lambda$ a $\vec{r}$ je polohový vektor bodu v rovině stínítka. Vektor $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$ je podle podmínek příkladu rovnoběžný s rovinou stínítka a jeho velikost se dá vyjádřit úhlem β , sevřeným oběma vektory. Platí podle obrázku $|\vec{k}_2 - \vec{k}_1| = \beta \cdot 2\pi/\lambda$. Posune-li se koncový bod vektoru $\vec{r}$ v rovině stínítka ve směru kolmém k interferenčním proužkům o délku d rovnou vzdálenosti mezi interferenčními maximy, změní se hodnota výrazu $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}$ o 2π . Platí tedy $|\vec{k}_2 - \vec{k}_1| \cdot d = 2\pi$. Dosazením do předchozího vztahu za $|\vec{k}_2 - \vec{k}_1|$ dostaneme výsledek

$$\beta = \frac{\lambda}{d}$$

6.5. Výsledné elektrické pole v místě x na stínítku je součtem elektrických polí, která odpovídají vlnám, přicházejícím od štěrbin. Protože se obě štěrby chovají jako koherentní zdroje ve fázi, dá se výsledné elektrické pole vyjádřit takto :

$$E = E_0 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{L_1}{c} \right) + E_0 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{L_2}{c} \right)$$

K závislosti amplitudy E_0 na vzdálenosti od stínítka nemusí být při výpočtu přihlédnuto, protože jde o oblast stínítka, jejíž lineární rozměry jsou mnohem menší než vzdálenost stínítka od obou štěrbin. Úpravou napsaného výrazu dostáváme

$$E = 2E_0 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{L_1 + L_2}{2c} \right) \cdot \cos \omega \frac{L_1 - L_2}{2c}, \text{ kde}$$

$$L_1 = \sqrt{L_0^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} \quad \text{a} \quad L_2 = \sqrt{L_0^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}$$

Platí-li, jak již bylo řečeno, $|x \pm d/2| \ll L_0$, můžeme pomocí posledních výrazů najít přibližné vyjádření pro $L_1 - L_2$. Dostáváme tak pro elektrické pole E výraz

$$E = 2E_0 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{L_1 + L_2}{2c} \right) \cdot \cos \left(\omega \frac{x \cdot d}{L_0} \cdot \frac{1}{2c} \right)$$

Rozdělení osvětlení na stínítku najdeme na základě jeho souvislosti s druhou mocninou elektrického pole a její časovou střední hodnotou ; k tomu účelu též upravíme argument funkce $\cos$:

$$A = A_{\max} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot x \cdot d}{L_0 \cdot \lambda}$$

Místa s maximální intenzitou mají osvětlení rovné $A_{\max}$ a jejich polohy $x_{\max}$ určuje výraz

$$x_{\max} = \pm \frac{L_0}{d} \cdot 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, \text{ podobně místa s nulovou intenzitou mají souřadnice}$$

$$x_0 = \pm \frac{L_0}{d} \cdot (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}; \text{ k je přirozené číslo}$$

nebo nula .

6.6. Příspěvky k výslednému elektrickému poli na stínítku budou mít různé amplitudy. Pole v místě x stínítka tedy vyjádříme takto :

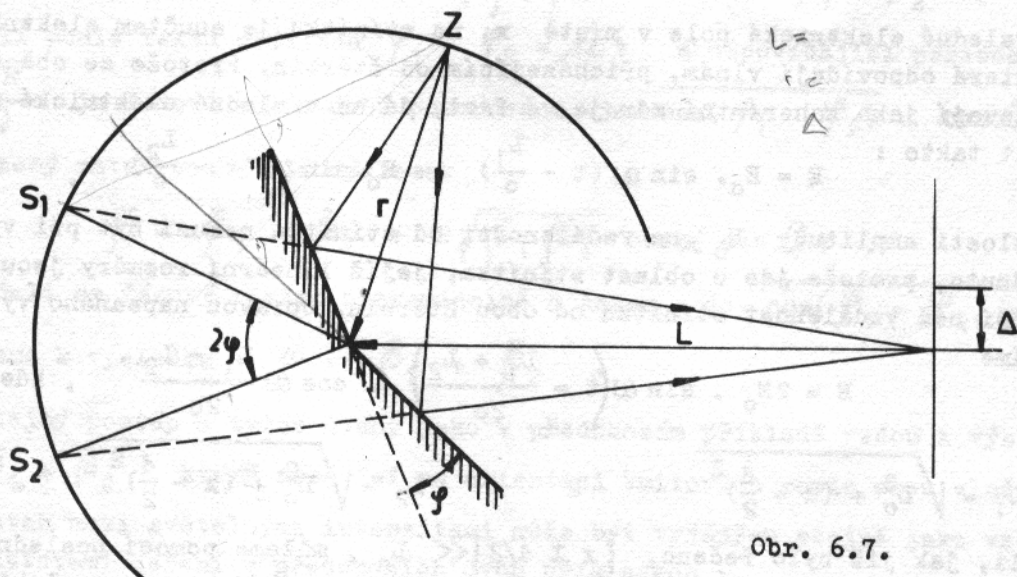
$$E = E_1 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{L_1}{c} \right) + E_2 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{L_2}{c} \right)$$

Osvětlení přímo úměrné časové střední hodnotě E^2 dostaneme v tomto tvaru :

$$A = A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2} \cos \frac{2\pi x \cdot d}{L_0 \cdot \lambda}$$

A je osvětlení výsledné, A_1 a A_2 jsou osvětlení působená samostatně jednotlivými štěrbinami. Ve speciálním případě $A_1 = A_2$ dostaneme též výraz pro osvětlení, který je uveden v předešlém příkladě. Podmínky pro výskyt maxim a minim osvětlení jsou stejné, osvětlení však nikde neklesá k nule.

$$6.7. \varphi = \frac{\lambda (L + r)}{2\Delta r} \approx 48'.$$



Obr. 6.7.

6.8. Zdroje musí být ve vzájemných vzdálenostech s vyhovujících vztahu

$$s = \frac{(2k + 1)\lambda}{2 \cdot d}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

6.9. Interferenční jev vymizí při vzájemných vzdálenostech zrcadel

$$D = \frac{(2k + 1)\lambda}{2\varphi}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{Vzdálenost mezi}$$

sousedními interferenčními maximy v ohniskové rovině objektivu je rovna $\frac{r \cdot \lambda}{d}$.

6.10. Uvažujme o lineárně polarizované vlně, jejíž kmitová rovina je buď totožná s rovinou dopadu nebo je k ní kolmá. Zvolenému úhlu dopadu α , dané orientaci kmitové roviny a indexu lomu desky odpovídají určité hodnoty odrazivosti r a propustnosti d . Budeme se zabývat zvláště vlněním odraženým a zvláště vlněním, které deskou prochází. Amplitudové vztahy mezi vzniklými koherentními vlnami určíme pomocí odrazivosti a propustnosti, fázové vztahy stanovíme pomocí dráhového rozdílu $\Delta = 2NH \cdot \cos \beta$, který odpovídá dvěma po sobě vznikajícím vlnám. Současně přihlédneme ke změně fáze o π při odrazu od opticky hustšího prostředí.

Odražené vlnění.

Výsledné elektrické pole po odrazu od desky můžeme vyjádřit jako součet těchto výrazů pro elektrická pole jednotlivých koherentních vln :

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{r} \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi)} \\ R_2 &= \sqrt{r} \cdot d \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \\ R_3 &= r \cdot \sqrt{r} \cdot d \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - 2\varphi)} \\ &\vdots \\ R_{p+1} &= r^{p-1} \cdot \sqrt{r} \cdot d \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - p\varphi)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

V těchto výrazech je A_0 amplituda elektrického pole v dopadající vlně a fázový rozdíl φ je roven výrazu

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi nH \cdot \cos \beta}{\lambda}$$

Sečtením těchto příspěvků jednotlivých vln dostáváme po úpravách výsledné elektrické pole

$$R = \sqrt{r} \left[\frac{1 - e^{-1\varphi}}{1 - r \cdot e^{-1\varphi}} \right] A_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi)}$$

Ke světelné intenzitě přejdeme prostřednictvím přímé úměrnosti s R^2 .

Využitím R^* (komplexně sdružená veličina) utvoříme výraz pro R^2 :

$$R^2 = R \cdot R^* = A_0^2 \frac{4r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{d^2 + 4r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad . \text{ Máme tedy pro}$$

poměr intenzit odraženého a dopadajícího vlnění vztah

$$\frac{I_{\text{odr}}}{I_{\text{dop}}} = \frac{4r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{d^2 + 4r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Vlnění procházející deskou.

Postupujeme stejným způsobem a najdeme vyjádření elektrických polí pro všechny vlny procházející deskou :

$$\begin{aligned} D_1 &= d \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} \\ D_2 &= r \cdot d \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \\ D_3 &= r^2 \cdot d \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - 2\varphi)} \\ &\vdots \\ D_{p+1} &= r^p \cdot d \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - p\varphi)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

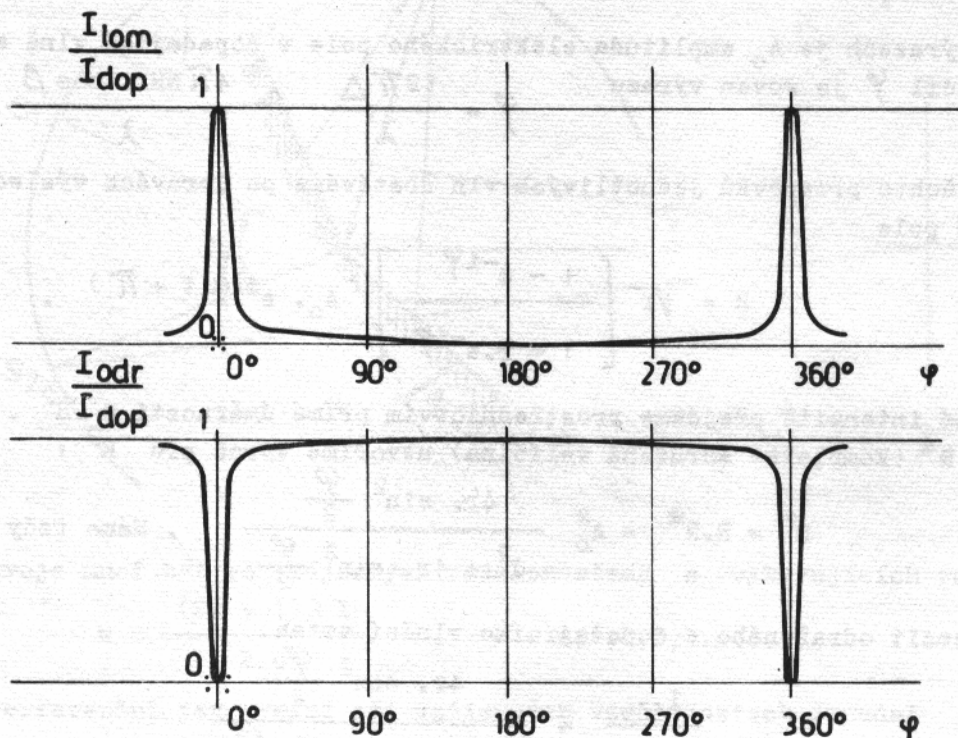
Sečtením dostáváme $D = \frac{d}{1 - r \cdot e^{-i\varphi}} A_0 e^{i\omega t}$ a stejnými úvahami dospějeme k výrazu pro podíl intenzit procházejícího a dopadajícího vlnění

$$\frac{I_{\text{lom}}}{I_{\text{dop}}} = \frac{d^2}{d^2 + 4r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Je-li r blízké jedničce a $p \rightarrow \infty$ mají odvozené závislosti průběh vyznačený na obrázku. Z tvaru odvozených výrazů je vidět, že rovnice

$$I_{\text{odr}} + I_{\text{lom}} = I_{\text{dop}}$$

je splněna .



Obr. 6.10.

6.11. Přezkoumejte výrazy pro elektrická pole R_1 a D_1 (uvedená v řešení předchozího příkladu) z hlediska platnosti v podmínkách příkladu právě řešeného. Všimněte si zvláště amplitud a zvláště fází všech vln. Jak se uplatní případné změny při odvozování poměrů světelných intenzit ?

6.12. Poměr šířky proužku ke vzájemné odlehlosti mezi maximy dvou sousedních proužků je $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{d_1 \cdot d_2}{r}}$, kde r je odrazivost pokovených ploch a d_1 a d_2 jsou jejich propustnosti. Odvození užívá téhož výchozího vztahu jako následující příklad 6.14.

6.13. Stejně jako v příkladě 6.10 byly sestaveny výrazy pro elektrická pole R_j všech koherentních vln vznikajících při odrazu od tenké vrstvy. Jejich sečtením dostáváme výsledné elektrické pole

$$R = \left\{ -\sqrt{r_1} + \left[\sqrt{r_1} \cdot r_2 \cdot d_1 \cdot e^{-1.2\varphi} - \sqrt{r_2} \cdot d_1 \cdot e^{-1\varphi} \right] \frac{1}{1 - r_1 r_2 \cdot e^{-1.2\varphi}} \right\} A_0 e^{i\omega t},$$

kde r_1, r_2 jsou odrazivosti prvního a druhého rozhraní, d_1 propustnost prvního rozhraní, A_0 amplituda elektrického pole v dopadajícím rovnoběžném svazku. Pro úplnost uveďme příspěvky několika prvních vln

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{r_1} \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi)} \\ R_2 &= \sqrt{r_2} \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi - \varphi)} \\ R_3 &= \sqrt{r_1} \cdot r_2 \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - 2\varphi)} \\ R_4 &= r_1 \cdot \sqrt{r_2} \cdot r_2 \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi - 3\varphi)} \\ R_5 &= \sqrt{r_1} \cdot r_1 \cdot r_2^2 \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - 4\varphi)} \\ R_6 &= r_1^2 \cdot \sqrt{r_2} \cdot r_2^2 \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi - 5\varphi)} \\ R_7 &= \sqrt{r_1} \cdot r_1^2 \cdot r_2^3 \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - 6\varphi)} \\ R_8 &= r_1^3 \cdot \sqrt{r_2} \cdot r_2^3 \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi - 7\varphi)} \\ &\vdots \\ R_{2p-1} &= \sqrt{r_1} \cdot r_1^{p-2} \cdot r_2^{p-1} \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - (2p-2)\varphi)} \\ R_{2p} &= r_1^{p-1} \cdot \sqrt{r_2} \cdot r_2^{p-1} \cdot d_1 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi - (2p-1)\varphi)} \end{aligned}$$

které ukazují, že sčítání je vhodné provést zvlášť pro liché a zvlášť pro sudé členy. Řešení problému antireflexní vrstvy vyžaduje položit $R = 0$, což vede k rovnici

$$-1 + r_2 \cdot e^{-1.2\varphi} - \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} d_1 \cdot e^{-1\varphi} = 0$$

Uvážíme-li, že $d_1 = 1 - r_1$ dává tato rovnice výsledky

$$r_1 = r_2 \quad \text{a} \quad \varphi = (2k-1)\pi, \text{ kde } k \text{ je přirozené}$$

číslo. Dosadíme-li nyní za r_1, r_2 a φ podle vztahů

$$r_1 = \left(\frac{N_2 - N_1}{N_2 + N_1} \right)^2, \quad r_2 = \left(\frac{N_3 - N_2}{N_3 + N_2} \right)^2, \quad \varphi = \frac{4\pi N_2 \cdot H}{\lambda},$$

dostáváme konečné výsledky pro tloušťku vrstvy a její index lomu:

$$H = \frac{1}{N_2} \cdot \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad \text{a} \quad N_2 = \sqrt{N_1 \cdot N_3}. \quad \text{Zadané číselné}$$

údaje vedou k hodnotám $N_2 = 1,342$, $H = 102,5$; $307,5$; $512,5 \dots \text{nm}$.

6.14. Povšimneme-li si podrobně otázky jednotlivých odrazů a lomů na částečně propouštějících kovových vrstvách nanesených na vrstvě kryolitu, dojdeme k závěru, že pro intenzitu světla kolmo procházejícího vrstvou interferenčního filtru platí obdobný vztah jako je uveden v řešení 6.10 .V tomto případě platí

$$\frac{I_{\text{lom}}}{I_{\text{dop}}} = \frac{d_1 d_2}{(1 - \sqrt{r_1 r_2})^2 + 4 \sqrt{r_1 r_2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \text{ kde } r_1 \text{ a } r_2 \text{ jsou}$$

odrazivosti horního a spodního povrchu kryolitové vrstvy z obou stran pokovené, d_1 a d_2 jsou propustnosti obou povrchů ve směru filtrem propuštěného světla. Předpokládejme, že fázový rozdíl je určen v našem případě obvyklým výrazem

$$\varphi = \frac{4\pi N.H}{\lambda}$$

a že vlivem odrazů uvnitř kryolitové vrstvy nedochází k dalším změnám fáze, které by bylo třeba brát v úvahu . V souhlase s textem příkladu určíme pološířku vlnového pásma interferenčního filtru z řešení rovnice

$$(1 - \sqrt{r_1 r_2})^2 = 4 \sqrt{r_1 r_2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Protože lze vždy počítat s tím, že odrazivosti jsou blízké hodnotě 1 , bude hodnota $\sin^2(\varphi/2)$ blízká nule , a proto je možno vyjádřit přibližné řešení rovnice takto

$$\frac{\varphi}{2} = k\pi + \frac{1 - \sqrt{r_1 r_2}}{2 \sqrt[4]{r_1 r_2}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dosadíme-li za φ výše napsaný výraz, dostaneme (při pevném k) dvě vlnové délky , jejichž rozdíl určuje hledanou pološířku . Máme tedy dvě rovnice

$$\frac{2\pi NH}{\lambda_1} = k\pi + \frac{1 - \sqrt{r_1 r_2}}{2 \sqrt[4]{r_1 r_2}}, \quad \frac{2\pi NH}{\lambda_2} = k\pi - \frac{1 - \sqrt{r_1 r_2}}{2 \sqrt[4]{r_1 r_2}},$$

z nichž plyne výsledek

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1 - \sqrt{r_1 r_2}}{k\pi \sqrt[4]{r_1 r_2}}; \text{ vlnová délka v tomto}$$

vztahu uvedená vyhovuje vztahu $2NH = k\lambda$ a leží ve středu propuštěného pásma. Jsou-li obě odrazivosti sobě rovny dostaneme obvyklý výraz

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1 - r}{k\pi \sqrt{r}}.$$

$$6.15. \quad \lambda_1 = \frac{2d}{k}, \quad \lambda_2 = \frac{2d}{k+1}, \quad \Delta\lambda = \frac{2d}{k(k+1)}.$$

6.16. Velikost dráhového rozdílu mezi dvěma po sobě vznikajícími svazky, jež interferují v etalonu, je dána výrazem $\Delta = 2NH \cdot \cos \beta$. Dráhový rozdíl je dán tloušťkou prstence a spolu s vlnovou délkou vede k určení interferenčního řádu k podle vztahu $2d = k\lambda$; odtud $k = 2 \cdot 10^4$.

Aby v tomtéž směru pozorování vzniklo interferenční maximum řádu $(k+1)$, musela by být ve zkoumaném spektru vlnová délka λ' vyhovující rovnici $(k+1)\lambda' = k\lambda$. Rozdíl $\lambda - \lambda'$ pak udává šířku vlnového pásma v okolí dané vlnové délky, kde si můžeme být jisti, že nedochází k překrytí se spektrem z jiného vlnového oboru. Pásmo je vymezeno hodnotami $\lambda(1 \pm \frac{1}{k})$.

6.17. V příkladě 6.10. byl uveden výraz pro součet nekonečného počtu koherentních vln. Součet konečného počtu m členů je v případě vlnění procházejícího deskou

$$D(m) = d \frac{1 - r^m \cdot e^{-im\varphi}}{1 - r \cdot e^{-i\varphi}} A_0 e^{i\omega t}.$$

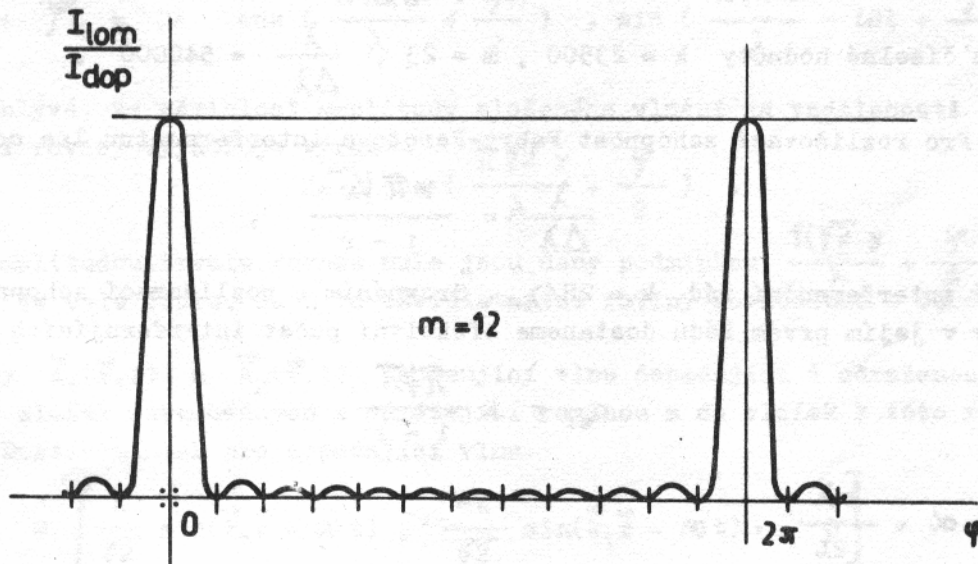
Pomocí tohoto vztahu se dá odvodit stejně jako v příkladě 6.10 výraz pro poměr intenzit

$$\frac{I_{\text{lom}}}{I_{\text{dop}}} = \frac{(1 - r^m)^2 + 4r^m \cdot \sin^2(m \cdot \frac{\varphi}{2})}{(1 - r)^2 + 4r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d^2.$$

Mnohonásobný odraz uvnitř desky nastává pod úhlem blízkým úhlu meznímu, takže odrazivost má hodnotu velmi blízkou jedné. Kromě toho jsou délka a tloušťka desky voleny tak, že může vzniknout jen nevelký počet koherentních vln. Tyto okolnosti umožňují upravit poslední vztah do tvaru

$$\frac{I_{\text{lom}}}{I_{\text{dop}}} = d^2 \cdot r^{m-1} \frac{\sin^2(m \cdot \frac{\varphi}{2})}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Konkretní příklad průběhu této závislosti je kvalitativně vyznačen v obrázku.



Obr. 6.17.

Z posledního vztahu lze vyvodit pro polohy hlavních maxim podmínku

$$\frac{\varphi}{2} = k\pi, \text{ kde } k \text{ je celé číslo,}$$

podmínku pro polohy vedlejších maxim

$$\frac{\varphi}{2} = k\pi + \frac{1 + \frac{1}{2}}{m}\pi, \text{ kde } l = 1, 2, 3, \dots, m-2, \text{ } k \text{ je celé číslo}$$

a podmínku pro minima

$$\frac{\varphi}{2} = k\pi + \frac{1}{m}\pi, \text{ kde } l = 1, 2, 3, \dots, m-1, \text{ } k \text{ je celé číslo.}$$

Rozlišovací schopnost je možno vyvodit z této úvahy: deska rozliší dvě blízké vlnové délky tehdy, padne-li hlavní maximum jedné vlnové délky na první minimum ($l = 1$) druhé vlnové délky. Protože zmíněné hlavní maximum i minimum pozorujeme v dalekohledu v téže směru (β je totéž pro obě vlnové délky), platí tyto podmínky:

$$\frac{2\pi \cdot N \cdot H \cdot \cos \beta}{\lambda + \Delta\lambda} = k\pi \quad \text{a} \quad \frac{2\pi \cdot N \cdot H \cdot \cos \beta}{\lambda} = k\pi + \frac{1}{m}\pi.$$

Odtud pak plyne vztah pro rozlišovací schopnost Lummer-Gehrckeovy desky

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k \cdot m.$$

Dosažením číselných hodnot vypočteme řád spektra k ze vztahů

$$\sin \beta = \frac{1}{N}, \quad k = \frac{2N \cdot H \cdot \cos \beta}{\lambda}$$

a pomocí obrázku na straně 39 stanovíme počet interferujících vln

$$m = \frac{L}{2H \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Vyjdou číselné hodnoty $k = 23500$, $m = 23$, $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 540000$.

6.18. Pro rozlišovací schopnost Fabry-Perotova interferometru lze odvodit výraz

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{k\pi\sqrt{r}}{1-r},$$

v němž interferenční řád $k = 2H/\lambda$. Srovnáním s rozlišovací schopností mřížky v jejím prvním řádu dostaneme efektivní počet interferujících svazků

$$n_{\text{ef}} = k \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}.$$

$$6.19. \quad \alpha = \frac{k\lambda}{2L}.$$

6.20. Úsečky délky x odpovídá změna tloušťky vzduchového klínu rovná $\lambda/2$. Prohnutí interferenčních proužků vyjádřené velikostí Δx odpovídá skutečná tloušťka napařené vrstvy. Mezi těmito veličinami a vlnovou délkou λ platí úměra, jejíž pomocí dostáváme vztah pro tloušťku d vrstvy:

$$d = \Delta x \frac{\lambda}{2x}.$$

6.21. Uvažovaná veličina ani odražející rovina nejsou blíže určeny, proto nejsou známy ani příslušné okrajové podmínky. Fázové vztahy mezi dopadající a odraženou vlnou musíme tedy vzít v úvahu zavedením vhodného počtu fázových konstant. V souhlase se zněním příkladu budeme předpokládat, že charakter vlny zůstane po odrazu zachován a že tedy například podélné vlnění zůstane po odrazu vlněním podélným jako v případě b). Tímto způsobem jsou v textu příkladu vybrány speciální případy, jimiž se budeme dále zabývat. Vlně dopadající pod úhlem 45° bude vždy příslušet vlnový vektor

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{s}_1, \text{ kde } \vec{s}_1 \text{ má složky } (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),$$

a podobně odražené vlně bude odpovídat vlnový vektor

$$\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{s}_2, \text{ kde složky } \vec{s}_2 \text{ jsou } (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0).$$

Předpokládaný úhel odrazu je tedy rovněž 45° , rovina dopadu a současně rovina odrazu je rovina xy a odražející rovina je rovina xz .

a) Dopadající a odraženou vlnu skalární veličiny popíšeme pomocí výrazů

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_1(\vec{r}, t) = A \cdot \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \text{a} \\ \gamma_2 &= \gamma_2(\vec{r}, t) = A \cdot \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi), \text{ kde } \varphi \text{ je} \end{aligned}$$

fázová konstanta. Jejich sečtením dostaneme výraz pro složené skalární pole:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 2A \cdot \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi\sqrt{2}x}{\lambda} - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Z něho vyplývá, že závislost amplitudy složeného vlnění na vzdálenosti y od odražející roviny vyjadřuje výraz

$$2A \cdot \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Místa s amplitudou trvale rovnou nule jsou dány podmínkou $\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$, v níž n je celé číslo. Jsou to ekvidistantní roviny rovnoběžné s odražející rovinou.

b) Vektory $\vec{A}_1(\vec{r}, t)$ a $\vec{A}_2(\vec{r}, t)$ popisující vlnu dopadající i odraženou rozložíme do složek rovnoběžných s odražející rovinou a do složek k této rovině kolmých. Dostáváme tak pro dopadající vlnu

$$\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \left[\frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t), \frac{-A}{\sqrt{2}} \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t), 0 \right]$$

a pro odraženou vlnu

$$\vec{A}_2(\vec{r}, t) = \left[\frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t + \varphi), \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t + \varphi), 0 \right]$$

Sečtením vzniknou složky výsledného vektoru $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_1(\vec{r}, t) + \vec{A}_2(\vec{r}, t)$:

$$A_x = A\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi\sqrt{2}x}{\lambda} - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$A_y = A\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}x}{\lambda} - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$A_z = 0$$

Z tvaru odvozených složek vyplývá, že nemohou být všechny tři trvale rovný nulě v žádném bodě prostoru. Vzhledem k tomu, že v každém bodě prostoru se skládají dva různoběžné harmonické kmity téže frekvence, opisuje koncový bod vektoru $\vec{A}$ v obecném případě eliptickou dráhu. Rovina této dráhy je totožná s rovinou dopadu.

c) V tomto případě vyjdeme z následujících výrazů pro složky vektorů $\vec{A}_1$ a $\vec{A}_2$ v dopadající a odražené vlně (kmity kolmé k rovině dopadu a ke směru šíření vlny)

$$\vec{A}_1 = [0, 0, A \cdot \sin(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)]$$

$$\vec{A}_2 = [0, 0, A \cdot \sin(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t + \varphi)]$$

takže jejich složením dostaneme pro vektor $\vec{A}$

$$\vec{A} = \left[0, 0, 2A \cdot \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi\sqrt{2}x}{\lambda} - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

Odtud je vidět, že roviny dané podmínkou

$$\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$$

jsou, podobně jako v případě a), uzlovými rovinami.

d) Vektory $\vec{A}_1$ a $\vec{A}_2$ v dopadající a odražené vlně musíme zvolit ve tvaru

$$\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \left[\frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t), \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t), 0 \right]$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}, t) = \left[\frac{-A}{\sqrt{2}} \sin(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t + \varphi), \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t + \varphi), 0 \right]$$

(kmity v rovině dopadu a současně kolmé ke směru šíření vlny). Výsledný vektor $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ bude mít složky

$$A_x = -\sqrt{2} A \cdot \sin\left(\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}x}{\lambda} - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$A_y = \sqrt{2} A \cdot \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}y}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi\sqrt{2}x}{\lambda} - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$A_z = 0$$

Zmíněné Wienerovy pokusy prokázaly, že jako světelný vektor $\vec{A}$ působí v elektromagnetické vlně vektor elektrického pole. V případě c) vznikají ve vyvolaných emulsích zcela světlé a tmavé proužky v širokém oboru úhlů dopadu. Tato okolnost potvrzuje předpokládanou orientaci elektrického vektoru.

Hledaný výsledek je $N = 1 + \frac{k\lambda}{L} = 1,000275$. (k je počet proužků prošlých zorným polem, L je délka trubice^L.)

Interferenční proužky stejného sklonu vznikají tehdy, jsou-li obě zrcadla na sebe kolmá. Mají tvar soustředných světlých a tmavých kruhů. Interferenční proužky stejné tloušťky vznikají při porušení zmíněné kolmosti. Mají tvar soustavy ekvidistantních světlých a tmavých rovnoběžek.

6.25. Užijeme-li téhož způsobu výpočtu jako v příkladě 6.5 s tím, že bereme



99

navíc v úvahu optické dráhy $\overline{SM}_1$ a $\overline{SM}_2$, dospějeme nejprve k tomuto výsledku: Element přímkového zdroje světla tvaru úsečky dy přispívá k osvětlení v místě x stínítka příspěvkem

$$dA = \frac{A_0}{s} \cos^2 \left[\left(\frac{x}{L_0} + \frac{y}{l_0} \right) \frac{\pi d}{\lambda} \right] dy ,$$

v němž A_0 je osvětlení, které by působil bodový zdroj téže svítivosti jako svítící zdroj tvaru úsečky $\overline{S_1S_2}$ umístěný v poloze $y = 0$. Integrací podle proměnné y dostaneme osvětlení, které na stínítku působí celý zdroj :

$$A = \int_{-s/2}^{s/2} dA = \frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{2} \cos \left(\frac{2\pi d \cdot x}{L_0 \lambda} \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi d \cdot s}{l_0 \lambda} \right)}{\frac{\pi d \cdot s}{l_0 \lambda}}$$

Z nalezeného výrazu pro osvětlení A stínítka je zřejmé, že o zřetelnosti interferenčního jevu rozhoduje výraz $\pi d \cdot s / (l_0 \lambda)$. Vezmeme-li za jeho mezní ještě přípustnou hodnotu $\pi/2$, pak podmínka omezující velikost zdroje zní

$$s < \frac{l_0 \lambda}{2d} .$$

Pro obvyklé hodnoty z demonstračních uspořádání Youngova pokusu, například $l_0 = 0,5 \text{ m}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$, $d = 0,5 \text{ mm}$, dostáváme

$$s < 0,25 \text{ mm} .$$

Obě štěrby M_1 a M_2 byly při výpočtu pokládány za velmi úzké a jednotlivé elementy zdroje $\overline{S_1S_2}$ za navzájem nekoherentní zdroje světla.

6.26. Poloměry kružnic s maximální intenzitou mají hodnoty

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{R \cdot \lambda}{2} \cdot (2k + 1)} ,$$

minimální intenzitě přísluší hodnoty poloměrů

$$r_{\min} = \sqrt{R \cdot \lambda \cdot k} .$$

(k je přirozené číslo nebo nula .)

6.27. Tmavá. Při odrazu je třeba vzít v úvahu změnu fáze o π .

6.28. V odraženém světle tmavý, v procházejícím světly.

6.29. 100 nm .

7.1. Fraunhoferův ohyb je možno chápat jako mezní případ ohybu Fresnelova, kdy bodový zdroj S i bod P, v němž pozorujeme ohybový jev, jsou umístěny ve velkých vzdálenostech od obou stran štěrby. Na základě Fresnel-Kirchoffovy skalární teorie ohybu sestavíme pro situaci tohoto příkladu tento příspěvek

k výslednému elektrickému poli ve vzdáleném bodě P stínítka :

$$dE = K \cdot dz \cdot e^{i\omega(t - \frac{z \cdot \sin \varphi}{c})} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi)$$

Výraz $(1 + \cos \varphi)/2$ je speciální tvar t.zv. činitele sklonu, jehož vyjádření v obecném případě je uvedeno v textu příkladu 7.2. Příspěvek dE je podle zmíněné teorie přímo úměrný šířce plošného elementu štěrby a nepřímo úměrný vzdálenosti mezi tímto elementem dz a bodem P. Protože tato vzdálenost je v obvyklých uspořádáních asi o tři řády větší než šířka štěrby, není třeba k této nepřímé úměrnosti při výpočtu přihlížet; při tom je však důležité také to, že i rozměry ohybového jevu v rovině stínítka jsou malé ve srovnání s jeho vzdáleností od štěrby. Exponenciální činitel obsahuje čas t a bere v úvahu časová zpoždění $(z \cdot \sin \varphi)/c$, s nimiž přicházejí do bodu P vlnění příslušející jednotlivým elementům dz štěrby.

Po úpravě spočívající v zavedení veličiny $u = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$ je možno přistoupit k integraci :

$$E = K \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) \int_0^b e^{-i \frac{2uz}{b}} dz = K \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) \cdot \frac{b}{2ui} (1 - e^{-2ui})$$

Chceme-li stanovit osvětlení v bodě P, do něhož vložíme stínítko kolmo k dopadajícím paprskům, je třeba stanovit nejprve součin E s komplexně sdruženou veličinou E^* . Dostáváme postupně

$$\begin{aligned} E \cdot E^* &= K \cdot K^* \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \frac{1}{4} (1 + \cos \varphi)^2 \cdot \frac{b}{2ui} \cdot \frac{-b}{2ui} (1 - e^{-2ui}) \cdot (1 - e^{2ui}) = \\ &= K \cdot K^* \cdot b^2 \cdot \cos^4 \frac{\varphi}{2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \end{aligned}$$

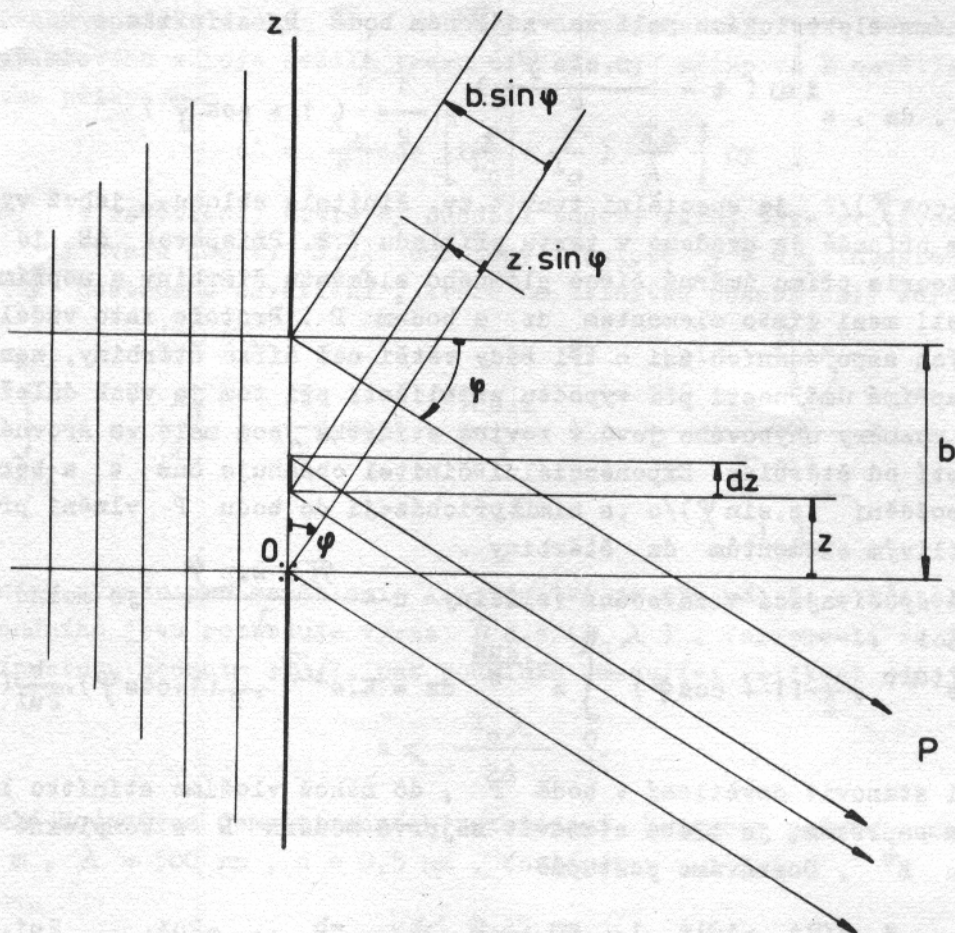
dospějeme k hledanému vztahu

$$A = A_0 \cdot \cos^4 \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2,$$

v němž A_0 je osvětlení stínítka ve směru $\varphi = 0$ a $u = (\pi b \cdot \sin \varphi)/\lambda$ (K dosavadnímu výkladu se vztahuje obr. 7.1a na následující straně.)

Při zkoumání průběhu odvozené závislosti vezmeme v úvahu, že v obvyklém uspořádání demonstračního pokusu je šířka štěrby řádu 1 mm až 10^{-1} mm, takže poměr b/λ nabývá hodnot 10^2 až 10^3 (ve viditelném oboru). Veličina u se tedy v závislosti na φ musí měnit mnohem rychleji než samotný úhel φ . Proto se činitel $\cos^4 \frac{\varphi}{2}$ (vzniklý z činitele sklonu) mění v okolí $\varphi = 0$ jen velmi zvolna, zatímco funkce $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ má v okolí této hodnoty nejpodstatnější část svého průběhu z hlediska ohybového jevu. Můžeme proto zkoumat zjednodušenou funkční závislost

$$A = A_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2.$$



Obr. 7.1a.

Položíme-li prvou derivaci této funkce rovnu nule, dostaneme rovnici

$$\left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \right)' = \frac{2u(\sin u) \cdot (u \cos u - \sin u)}{u^4} = 0$$

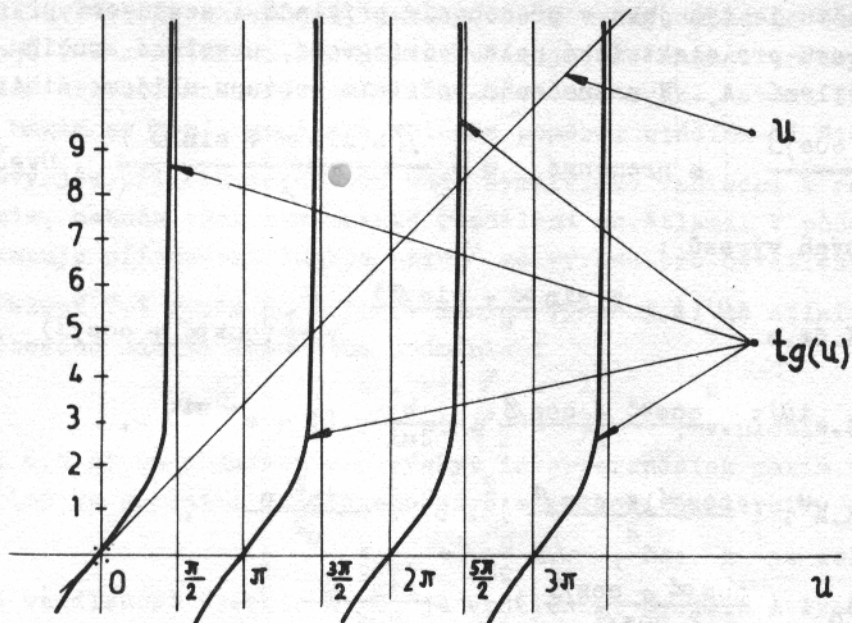
Vyšetřovaná funkce a její derivace jsou všude spojité. Pro $u \rightarrow 0$ dostáváme

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \right) = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \right)' = 0 ;$$

Ze srovnání s následujícími výsledky vyplývá, že jde o t.zv. hlavní maximum. Pro $u \neq 0$ dává výchozí rovnice tato další řešení :

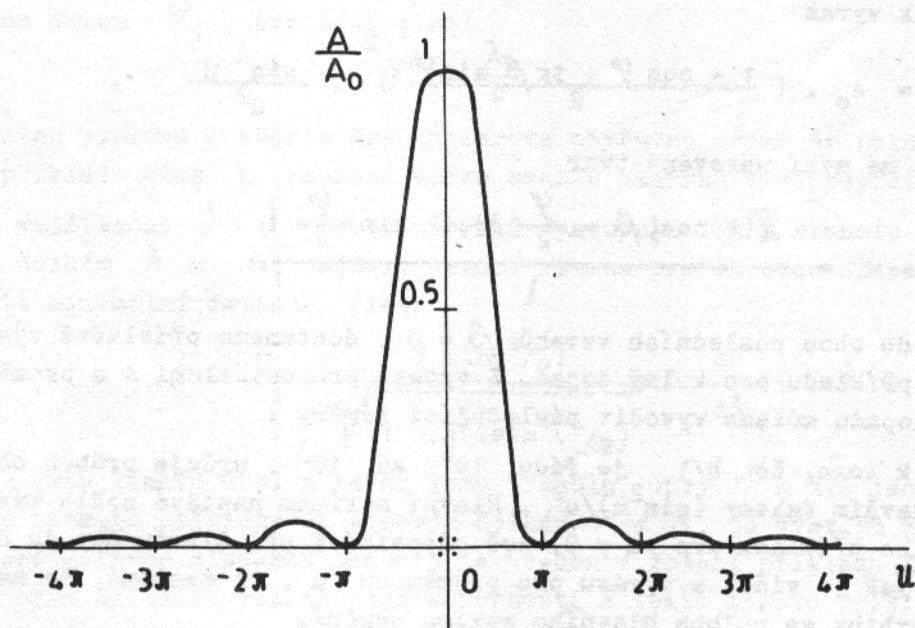
- $u = \pm k\pi$, kde k je přirozené číslo. Řešení je nalezeno z rovnice $\sin u = 0$ a určuje polohy všech bodů stínítka, v nichž je osvětlení A rovno nule. Uvedené řešení lze vyjádřit také vztahem $b \sin \varphi = \pm k \lambda$, který má názorný geometrický význam.
- $u \approx \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}$, kde k je přirozené číslo. Jde o přibližné řešení rovnice $\tan u = u$, které lze nalézt graficky (obr. 7.1b). Přibližné řešení určuje polohy všech vedlejších maxim, jejichž velikost je vyjádřena vztahem

$$A \approx \frac{4A_0}{\pi^2 (2k+1)^2} .$$



Obr. 7.1b.

Obdobně jako v předešlém případě lze řešení vyjádřit vztahem $b \cdot \sin \varphi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$. Nalezení tohoto řešení grafickou cestou objasňuje obrázek 7.1b, celkový průběh osvětlení ukazuje obr. 7.1c.



Obr. 7.1c.

7.2. Postup výpočtu je týž jako v předchozím příkladě : sestavení příspěvku dE , nalezení výrazu pro elektrické pole E integrací, utvoření součinu $E \cdot E^*$ a přechod k osvětlení A . V naznačeném početním postupu uijeme činitele

sklonu $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}$ a proměnné $u = \frac{\pi b (\sin \alpha + \sin \beta)}{\lambda}$. Uvedme nyní

přehled jmenovaných výrazů :

$$dE = K \cdot dz \cdot e^{i\omega(t - \frac{z(\sin \alpha + \sin \beta)}{c})} \cdot \frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta),$$

$$E = K \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} \cdot \frac{b}{2ui} \cdot (1 - e^{-2ui}),$$

$$E \cdot E^* = K \cdot K^* \cdot \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} \right)^2 \cdot b^2 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2},$$

$$A = A_0 \cdot \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2 \cos \beta} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}.$$

Integrace byla provedena v rovině proložené hranami přímé štěrby, což je z hlediska výpočtu nejjednodušší. Jako plocha, na níž se provádí integrace, může být zvolena jakákoli pro výpočet jednoduchá zakřivená plocha.

A_0 je osvětlení, které na stínítku vytváří světlo vystupující ze štěrby v původním směru dopadající vlny. Význam i orientaci úhlů α , β i odchylky φ objasňuje obrázek 7.2.

Výraz pro osvětlení upravíme nyní vyloučením úhlu α podle vztahu $\alpha + \beta = \varphi$. Dostaneme tak výraz

$$A = A_0 \cdot \left(\frac{1 + \cos \varphi + \operatorname{tg} \beta \sin \varphi}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}.$$

Proměnná u má nyní upravený tvar

$$u = \frac{\pi(b \cos(\beta - \frac{\varphi}{2})) \cdot (2 \sin \frac{\varphi}{2})}{\lambda}.$$

Dosadíme-li do obou posledních vztahů $\beta = 0$, dostaneme příslušné výsledky předchozího příkladu pro kolmý dopad. Z výrazů pro osvětlení A a proměnnou u při šikmém dopadu můžeme vyvodit následující závěry :

- Vzhledem k tomu, že b/λ je řádu 10^2 až 10^3 , určuje průběh ohybového jevu především faktor $(\sin^2 u)/u^2$. Hlavní maximum nastává podle výsledků předchozího příkladu pro $u = 0$, což odpovídá i při šikmém dopadu odchylce $\varphi = 0$, jak je vidět z výrazu pro proměnnou u . To znamená, že natočením přímé štěrby se poloha hlavního maxima nemění.
- Osvětlení A_0 v neodchýleném směru závisí na natočení štěrby. Početní postup vedoucí od součinu $E \cdot E^*$ ukazuje že A_0 je přímo úměrné funkci $\cos^2 \beta$.
- Při vhodné šířce štěrby můžeme pozorovat ohybový jev v rozmezí malých hodnot úhlu φ (v porovnání s $\pi/2$). Odvozené vztahy v tom případě ukazu-

Jí, že světlo se chová tak, jakoby šlo o kolmý dopad na šterbinu o šířce $b \cdot \cos \beta$. Demonstrační experiment ukazuje, že charakter ohybového jevu vyjádřený křivkou na obrázku 7.1c zůstává zachován, avšak šířka všech ohybových maxim se mění současně v témže poměru, otáčíme-li šterbinou.

d) Ohybový jev při šikmém dopadu bude symetrický vzhledem k rozložení maxim a minim, nebude však symetrické rozdělení osvětlení. V početním výsledku to ukazuje přítomnost funkce $\sin \varphi$ ve výrazu pro osvětlení.

7.3. Z řešení 7.1 vyplývá, že prvá minima vymezující na stínítku oblast hlavního ohybového maxima jsou dána podmínkami

$$b \cdot \sin \varphi_1 = \lambda \quad a$$

$$b \cdot \sin \varphi_2 = -\lambda, \quad \text{v nichž } b \text{ je šířka šterbin.}$$

Z řešení 6.5 plyne podmínka pro výskyt interferenčních maxim na stínítku postaveném kolmo ke spojnicí vzdáleného zdroje a dvojité šterbiny :

$$x_{\max} = \frac{L_0}{d} k \lambda, \quad \text{kde } k \text{ je celé číslo, } d \text{ je}$$

vzájemná vzdálenost šterbin a L_0 je vzdálenost dvojité šterbiny a stínítka. Uvědomíme-li si, že pro malé úhly φ lze položit $\sin \varphi \approx x_{\max}/L_0$, můžeme přepsat poslední podmínku takto :

$$d \cdot \sin \varphi = k \lambda.$$

Spojením této rovnice s rovnicemi uvedenými na začátku určíme oba interferenční řády příslušné úhlům φ_1 a φ_2 . Rozdíl obou vypočtených řádů určuje hledaný počet n interferenčních proužků uvnitř hlavního ohybového maxima :

$$n = k_1 - k_2 = \frac{2d}{b}.$$

7.4. Úhlová vzdálenost mezi hlavním ohybovým maximem a prvním minimem je vyjádřena úhlem φ_1 , pro nějž platí

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{b}.$$

Tento vztah vyplývá z teorie Fraunhoferova ohybu na přímé šterbině ; v situaci tohoto příkladu však b znamená šířku svazku paprsků vystupujících z hranolu.

Úhlovou vzdálenost $\delta - \delta_1$ dvou paprsků vystupujících z hranolu a příslušných vlnovým délkám λ a λ_1 najdeme pomocí vztahu pro úhlovou disperzi hranolu v oblasti minimální deviace. Platí

$$\delta - \delta_1 = \frac{2 \sin(A/2)}{\sqrt{1 - N^2 \cdot \sin^2(A/2)}} \cdot \frac{dN}{d\lambda} \cdot (\lambda - \lambda_1).$$

A a N jsou lámavý úhel a index lomu hranolu, úhly δ a δ_1 jsou směrové odchylky paprsků příslušných vlnovým délkám λ a λ_1 po výstupu z hranolu (Vztah pro úhlovou disperzi hranolu je uveden v řešení příkladu 2.17.). Užijeme-li nyní kriteria rozlišovací schopnosti z textu tohoto příkladu, musíme utvořit z výše napsaných výrazů rovnici $\varphi_1 = \delta - \delta_1$. Po úpravě tak dostaneme rozlišovací schopnost

$$\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1} = \frac{2 \cdot b \cdot \frac{dN}{d\lambda} \cdot \sin(A/2)}{\sqrt{1 - N^2 \cdot \sin^2(A/2)}}.$$

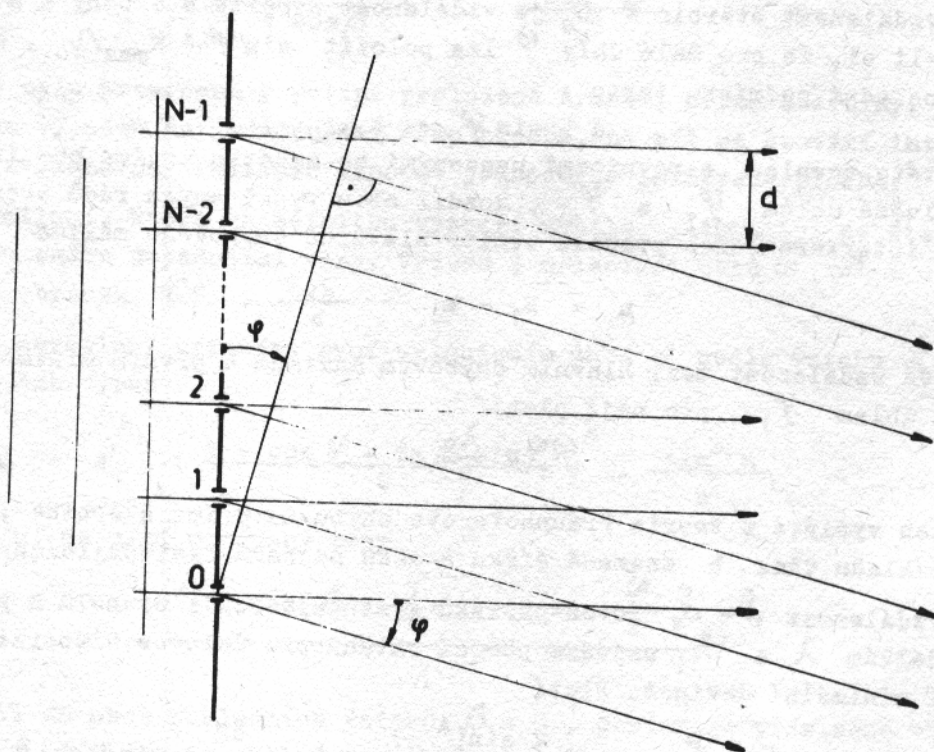
Tomuto vztahu lze dát velmi jednoduchý tvar, vyjádříme-li šířku vystupujícího svazku b pomocí základny t hranolu (obr. 2.17). Výsledný vztah pro rozlišovací schopnost hranolu je po této úpravě

$$\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1} = t \cdot \frac{dN}{d\lambda}.$$

7.5. Fraunhoferův ohyb na optické průchozí mřížce je možno popsat s pomocí výsledků příkladu 7.1. Očíslujeme-li jednotlivé štěrby způsobem naznačeným v obrázku, přispívá n -tá štěrbina k výslednému elektrickému poli v ohniskové rovině objektivu dalekohledu tímto příspěvkem :

$$E_n = K \frac{1 + \cos \varphi}{2} \cdot \frac{b}{2ui} (1 - e^{-2ui}) e^{i\omega(t - \frac{n \cdot d \sin \varphi}{c})},$$

Proměnná u a veličina b mají tytéž významy jako ve zmíněném příkladě.



Obr. 7.5.

Zavedeme-li obdobné označení $v = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$, lze výraz pro E_n napsat takto:

$$E_n = K \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{1 + \cos \varphi}{2} \cdot \frac{b}{2ui} (1 - e^{-2ui}) \cdot e^{-2nvi}.$$

Výsledné elektrické pole, které se vytvoří ve směru φ v ohniskové rovině objektivu, najdeme sečtením příspěvků od všech štěrbin :

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_n = K \frac{1 + \cos \varphi}{2} \cdot \frac{b}{2ui} (1 - e^{-2ui}) e^{i\omega t} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2nvi} =$$

$$= K \frac{1 + \cos \varphi}{2} \cdot \frac{b}{2ui} (1 - e^{-2ui}) e^{i\omega t} \cdot \frac{1 - e^{-2Nvi}}{1 - e^{-2vi}} .$$

Obvyklým početním postupem dostaneme nejprve

$$E \cdot E^* = K \cdot K^* \cdot b^2 \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin Nv}{\sin v} \right)^2$$

a pro osvětlení v ohniskové rovině objektivu

$$A = A_0 \frac{1}{N^2} \cdot \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin Nv}{\sin v} \right)^2 .$$

A_0 je osvětlení, které působí světlo vystupující z mřížky ve směru $\varphi = 0$. Při vyšetřování průběhu odvozené závislosti si budeme všímat pouze posledního činitele, který je pro ohyb na mřížce podstatný. Matematický tvar tohoto činitele je týž jako měla funkce, jejíž průběh byl vyšetřován v řešení příkladu 6.17. Stejným způsobem dostaneme podmínku pro hlavní maxima

$$d \cdot \sin \varphi = k \lambda ,$$

přibližnou podmínku pro vedlejší maxima

$$d \cdot \sin \varphi = \left(k + \frac{1 + 1/2}{N} \right) \lambda , \text{ kde } l = 1, 2, \dots, N-2$$

a podmínku pro minima

$$d \cdot \sin \varphi = \left(k + \frac{1}{N} \right) \lambda , \text{ kde } l = 1, 2, \dots, N-1 .$$

U všech těchto podmínek znamená k celé číslo .

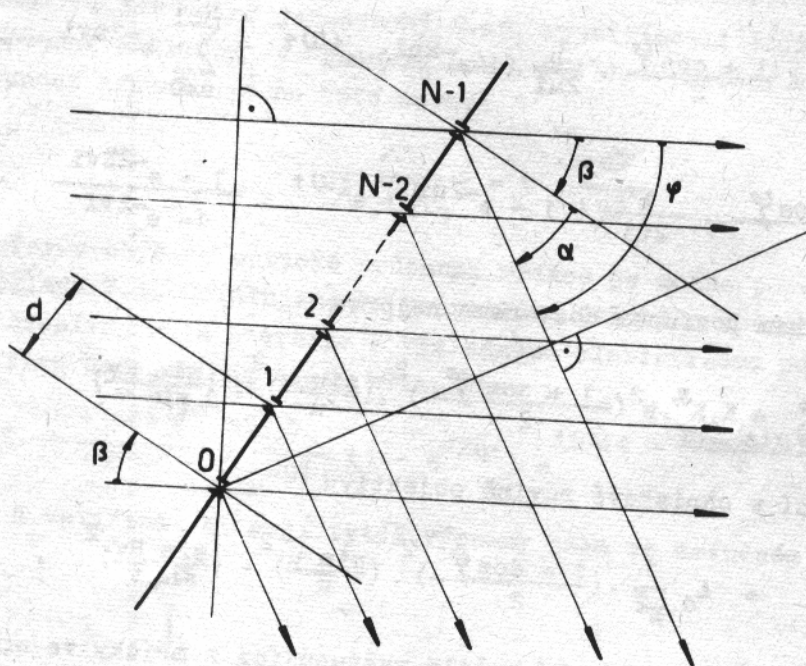
7.6. Postup řešení navazuje na příklady 7.2 a 7.5. Zavedeme-li označení veličin podle obrázku, je příspěvek n -té šterbiny vyjádřen takto :

$$E_n = K \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} \cdot \frac{b}{2ui} (1 - e^{-2ui}) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-2nvi} .$$

Proměnné u a v mají v tomto výrazu tvar

$$u = \frac{\pi b (\sin \alpha + \sin \beta)}{\lambda} \quad \text{a} \quad v = \frac{\pi d (\sin \alpha + \sin \beta)}{\lambda} .$$

Sečtením všech příspěvků dostáváme výraz pro výsledné elektrické pole



Obr. 7.6.

$$E = K \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} \cdot \frac{b}{2u} (1 - e^{-2ui}) \frac{1 - e^{-2Nv}}{1 - e^{-2v}} \cdot e^{i\omega t}$$

a pro osvětlení

$$A = \frac{A_0}{N^2} \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2 \cos \beta} \right)^2 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$$

Vyloučíme-li úhel z výrazů u , v a A , dojdeme k hledaným výsledkům

$$A = \frac{A_0}{N^2} \left(\frac{1 + \cos \varphi + \tan \beta \sin \varphi}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin Nv}{\sin v} \right)^2,$$

$$u = \frac{\pi b \cos(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\lambda}, \quad v = \frac{\pi d \cos(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\lambda}.$$

A_0 je osvětlení, které působí světlo vystupující z mřížky v neodchýleném směru t.j. ve směru $\varphi = 0$; je závislé na úhlu β vyjadřujícím natočení mřížky vůči dopadajícímu svazku paprsků.

7.7. Předpokládáme, že mřížka rozliší dvě blízké vlnové délky λ a λ' tehdy, vzniká-li hlavní ohybové maximum jedné z nich ve směru, kde nastává prvé minimum druhé vlnové délky. Pro podmínky výskytu minim v příkladech 7.5 a 6.17 to znamená, že $l = 1$. Číslo k je přitom libovolné. Z podmínky pro hlavní maximum

$$d \cdot \sin \varphi = k \lambda'$$

a z podmínky pro prvé minimum

$$d \cdot \sin \varphi = \left(k + \frac{1}{N} \right) \lambda$$

dostáváme vztah

$$\frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} = k \cdot N$$

v němž N je celkový počet vrypů a k je interferenční řád, který u běžných optických mřížek nabývá hodnot 1 až 2.

7.8. Nejvyšší pozorovatelný řád spektra je druhý, neboť poměr mřížkové konstanty a vlnové délky je větší než 2 a menší než 3. Ze vztahu pro rozlišovací schopnost pak dostaneme pro minimální počet vrypů hodnotu

$$N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda \cdot k} = 2500. \text{ Tomu odpovídá délka ryté části } 3,13 \text{ mm}.$$

7.9. Nejvyšší pozorovatelný řád je roven největšímu celému číslu, které je menší než d/λ . Teoreticky největší použitelná vlnová délka je $\lambda_{\max} = d$. Spektra 1. a 2. řádu se v uvedeném vlnovém oboru překrývat nemohou.

7.10. Při řešení prvního úkolu předpokládáme, spektra nižších řádů jsou pozorovatelná v širokém vlnovém oboru. Proto vymizení maxima 3. řádu dané vlnové délky uvedeme do souvislosti s 1. minimem ohybového jevu na štěrbinách mřížky. Současně musí platit rovnice $d \cdot \sin \varphi = 3\lambda$ (z hlediska mřížky) a rovnice $b \cdot \sin \varphi = \lambda$ (z hlediska ohybu na štěrbině). Odtud plyne hledaný vztah $d/b = 3$. V druhém úkolu jde o určení mřížkové konstanty z rovnice $d \cdot \sin \varphi = k\lambda$ při daném φ a k . Mřížková konstanta má hodnotu $d = 4\lambda$.

Na základě posledního výsledku zjistíme ve třetím úkolu, že maxima 1. a 2. řádu jsou ve směrech $\varphi_1 \pm 14^\circ 20'$ a $\varphi_2 = 30^\circ$.

7.11. Výsledky přibližného řešení úlohy :

Má-li vzniknout ohybové maximum 2. řádu ve směru φ a dopadá-li při tom rovinná vlna kolmo k rovině mřížky, je třeba při jakékoli mřížce splnit vztah $d \cdot \sin \varphi = 2\lambda$. Tím je určena mřížková konstanta.

Sklonový úhel má hodnotu $\beta = \varphi/2$. Bližší odůvodnění tohoto výsledku lze nalézt pomocí způsobu řešení, výsledků a závěrů příkladu 7.2.

7.12. Směry, v nichž vznikají hlavní maxima stanovíme pomocí úhlu φ měřeného od směru zrcadlového odrazu. Vznik maxima ve směru daném úhlem φ je podmíněn tím, že rozdíl optických drah příslušných dvěma sousedícím vrypům a úhlu α_0 je roven celistvému počtu vlnových délek. Platí tedy podmínka :

$$d (\cos \alpha_0 - \cos(\alpha_0 + \varphi)) = k\lambda,$$

v níž d je mřížková konstanta. Pro malé úhly α_0 a φ je možno podmínku upravit do tvaru

$$\varphi \left(\alpha_0 + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{k\lambda}{d}.$$

Odtud dostaneme pro φ řešení

$$\varphi = -\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + \frac{2k\lambda}{d}}.$$

Zadané číselné údaje vedou k hodnotám úhlu φ : $21,7'$ pro první a $36,5'$ pro druhý řád.

7.13. Směry, v nichž se vytvoří hlavní maxima, jsou dány podmínkou

$$d (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = k \lambda ,$$

kde k je celé číslo, α a α_0 jsou úhly zavedené stejným způsobem jako v obr. 7.14. O stínítku předpokládáme, že je umístěno rovnoběžně s řadou otvorů, otvory v desce pokládáme za dostatečně malé z hlediska ohybu. Vzhledem k tomu, že úhlem α je určena kuželová plocha, jejíž osu tvoří spojnice středů všech otvorů, odpovídá každé hodnotě k kuželová plocha s úhlem $\alpha(k)$ u vrcholu a na stínítku křivka ve tvaru hyperboly.

7.14. Jsou-li α_0 a β_0 směrové úhly dopadající vlny, α a β směrové úhly určující některé hlavní maximum, platí pro tyto směrové úhly následující podmínky :

$$d (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = k_1 \lambda$$

$$d (\cos \beta - \cos \beta_0) = k_2 \lambda ,$$

v nichž k_1 a k_2 jsou celá navzájem nezávislá čísla. V tomto příkladě jde o to, aby při daném směru dopadajících paprsků příslušel směru vystupujících paprsků dráhový rozdíl rovný celistvému násobku vlnových délek. Toto musí být splněno pro dvojici optických drah vedených libovolnými dvěma otvory ve čtvercové síti kruhových otvorů.

Výše napsané podmínky lze chápat ve smyslu příkladu 7.13. pro dvě na sebe kolmé řady otvorů orientované ve směru souřadnicových os. Splňuje-li směr vystupujícího světla současně obě podmínky, pak i dráhový rozdíl určený z drah vedených libovolnou dvojicí otvorů je roven celistvému počtu vlnových délek.

Podle výsledků předchozího řešení určují podmínky dvě soustavy koaxiálních kuželových ploch, jejichž osy jsou navzájem kolmé a mají směr souřadnicových os v rovině čtvercové sítě. V průsečíku os obou kuželových soustav leží vrcholy všech kuželových ploch. Směry vyhovující oběma podmínkám jsou společnými povrchovými přímkami kuželů. Tyto přímky protínají rovinu stínítka v bodech, v nichž pak pozorujeme ohybová maxima. V obvyklé situaci, kdy je stínítko postaveno rovnoběžně s rovinou čtvercové sítě, leží tato maxima zároveň v průsečících, které spolu tvoří obě soustavy hyperbol, o nichž se hovoří v předešlém řešení.

7.15. Podobně jako v obou předchozích příkladech lze napsat následující vztahy pro tři navzájem kolmé řady rozptylových center

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + k_1 \frac{\lambda}{a}$$

$$\cos \beta = \cos \beta_0 + k_2 \frac{\lambda}{a}$$

$$\cos \gamma = \cos \gamma_0 + k_3 \frac{\lambda}{a} .$$

Také zde musí směry vstupujícího i vystupujícího záření splňovat požadavek dráhového rozdílu rovného celistvému násobku vlnových délek pro dráhy vedené libovolnými dvěma rozptylovými centry. Na rozdíl od předchozího příkladu však k uvedeným rovnicím přistupuje navíc podmínka pro směrové kosiny vystupujícího záření

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 .$$

Tím vznikne soustava čtyř rovnic pro tři doposud uvažované neznámé úhly

α, β a γ . Pokládáme-li l vlnovou délku za neznámou veličinu, stane se soustava řešitelnou a pro vlnovou délku vychází vztah

$$\lambda = -2a \frac{k_1 \cos \alpha_0 + k_2 \cos \beta_0 + k_3 \cos \gamma_0}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

Je třeba poznamenat, že celá čísla k_1, k_2 a k_3 není možno zvolit ani libovolně, ani navzájem nezávisle. Jejich prosté hodnoty musí být vždy menší než $2a/\lambda$ a musí být zvolena tak, aby vztah pro vlnovou délku vedl k její kladné hodnotě.

7.16. $a = 0,281 \text{ nm}$.

7.17 a 18. Pro elektrony dostáváme energetický obor přibližně 1 až 100 eV, pro neutrony leží energetický obor mezi hodnotami $7 \cdot 10^{-4}$ a $7 \cdot 10^{-2}$ eV.

7.19. Úlohu je možno řešit podle představ Huygensova principu početní metodou Fresnelovou.

Zavedeme-li souřadnicový systém podle obrázku 7.19b z textu příkladu, platí

$$r^2 = (x_0 + l)^2 = x_0^2 + y^2 + z^2,$$

v níž veličina l představuje změnu optické dráhy r při přesunutí plošného elementu ΔS šterbiny z počátku 0 do bodu o souřadnicích y a z . Řešením této rovnice dostáváme pro l výraz

$$l = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}, \text{ který je vhodný pro}$$

další účely upravit takto

$$\frac{l}{x_0} = -1 + \sqrt{1 + \bar{\alpha}}, \text{ kde } \bar{\alpha} = \frac{y^2 + z^2}{x_0^2}.$$

Je-li $l \ll x_0$, je možno dostat ještě aproximativní řešení ve tvaru

$$\frac{l}{x_0} \approx \frac{l_a}{x_0} = \frac{\bar{\alpha}}{2}, \text{ tedy } l_a = \frac{y^2 + z^2}{2x_0}.$$

Veličina l hraje hlavní úlohu v určování fáze kmitů, které v bodě P vznikají působením vln přicházejících od různých elementů ΔS šterbiny. Nahradíme-li ve výpočtu výsledného elektrického pole veličinu l veličinou l_a , dosáhneme toho, že výpočet bude jednoduše proveditelný. Současně je třeba přezkoumat, zda rozdíl $l - l_a$ je podstatně menší než vlnová délka použitého světla. Pro účely tohoto rozboru uvažujeme tyto hodnoty známé z běžných demonstračních experimentů:

$$z_{\max}, y_{\max} \sim 5 \text{ cm},$$

$$x_0 \sim 5 \text{ m}$$

$$\lambda = 500 \text{ nm}.$$

Maximální hodnoty obdélníkové šterbiny a, b předpokládáme řádu 1 cm.

Podle těchto údajů vychází $\bar{\alpha}_{\max} = 2 \cdot 10^{-4}$. Nyní odvodíme výraz pro

$\frac{1 - l_a}{x_0}$ a vyjádříme při tom $\sqrt{1 + \alpha}$ nekonečnou řadou. Dostaneme tak

$$\frac{1 - l_a}{x_0} = -1 + \sqrt{1 + \alpha} - \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{16}\alpha^3 - \frac{5}{128}\alpha^4 + \dots,$$

kde můžeme uvažovat pouze první člen. Tím dostaneme maximální hodnotu rozdílu

$$(1 - l_a)_{\max} = \frac{-x_0 \cdot \alpha^2}{8} = -2,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = -0,05 \lambda.$$

Tento číselný výsledek opravňuje provést aproximativní výpočet založený na použití veličiny l_a . Výslednou hodnotu elektrického pole v bodě P najdeme sečtením okamžitých hodnot elektrických polí, které v tomto bodě přísluší vlnám vysílaným jednotlivými elementy dS štěrbiny. Příspěvek od plošného elementu dS štěrbiny lze vyjádřit a upravit takto :

$$\begin{aligned} dE &= K \cdot dS \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0 + l_a}{c})} = K \cdot dS \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0}{c})} \cdot e^{-i\omega \frac{l_a}{c}} \\ &= K \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0}{c})} \cdot e^{-i\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{y^2 + z^2}{x_0}} \cdot dy \cdot dz. \end{aligned}$$

Při tvoření tohoto výrazu se předpokládá, že ohybový jev vzniká pouze v malé části stínítka, která má rozměry malé ve srovnání s x_0 . V takové situaci můžeme položit činitele sklonu rovným jedné a amplitudy vln přicházejících od jednotlivých elementů štěrbiny považovat pouze za přímo úměrné velikosti jejich plochy dS . Nepřímá úměrnost vzdálenosti r mezi bodem P a elementem dS se při výpočtu neuplatní. Pokládáme tedy $|dE| = |K \cdot dS|$, kde koeficient úměrnosti K nabývá stejné hodnoty pro všechny plošné elementy, avšak zůstává funkcí vzdálenosti x_0 . Integrací a jednoduchou úpravou máme nejprve

$$E = K \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0}{c})} \cdot \int_{y_1}^{y_2} e^{-i\frac{\pi}{\lambda x_0} y^2} dy \cdot \int_{z_1}^{z_2} e^{-i\frac{\pi}{\lambda x_0} z^2} dz$$

a po zavedení substitucí $u = y\sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}}$, $v = z\sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}}$ a dalších úpravách toto konečné vyjádření elektrického pole :

$$E = K \frac{\lambda x_0}{2} \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0}{c})} \cdot [C(u_2) - C(u_1) - iS(u_2) + iS(u_1)] [C(v_2) - C(v_1) - iS(v_2) + iS(v_1)],$$

$$\text{v němž } C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} u^2 \cdot du \quad \text{a} \quad S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} u^2 \cdot du \quad \text{jsou}$$

Fresnelovy integrály. Způsobem známým z několika příkladů řešených v této kapitole vyvodíme výraz pro osvětlení stínítka. Dospějeme k vyjádření

$$A = \frac{A_0}{4} \left\{ \left[C(u_2) - C(u_1) \right]^2 + \left[S(u_2) - S(u_1) \right]^2 \right\} \left\{ \left[C(v_2) - C(v_1) \right]^2 + \left[S(v_2) - S(v_1) \right]^2 \right\} ,$$

v němž A_0 je osvětlení, které vytváří volně procházející vlna (při odstranění desky se šterbinou). Souvislost zavedených proměnných s geometrickými rozměry popisovaného uspořádání je dána vztahy

$$u_1 = y_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}} , \quad u_2 = y_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}} , \quad v_1 = z_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}} , \quad v_2 = z_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}} ,$$

$$y_2 - y_1 = b$$

$$z_2 - z_1 = a .$$

Názornou představu o průběhu osvětlení dává grafické znázornění Cornuovy spirály (str. 115). Ke snažšímu pochopení tohoto příkladu je třeba uvést, že proměnná u (a podobně i proměnná v) má v grafickém znázornění této křivky význam oblouku měřeného od počátku souřadnic. Činitel

$$\left\{ \left[C(u_2) - C(u_1) \right]^2 + \left[S(u_2) - S(u_1) \right]^2 \right\} ,$$

jemuž je přímo úměrné osvětlení A stínítka, má význam druhé mocniny vzdálenosti dvou bodů Cornuovy spirály. Na těchto okolnostech se zakládá výklad smyslu odvozených formulí pro osvětlení v tomto a následujících příkladech.

7.20. Z parametrických rovnic Cornuovy spirály daných vztahy z textu příkladu dostáváme

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \right) (du)^2 = (du)^2 ,$$

což ukazuje platnost tvrzení a).

Směrnice tečny je $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)$. Hledaný úhel je tedy $\alpha = \frac{\pi}{2} u^2$.

Poloměr křivosti dostaneme jako veličinu $\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{du}{\frac{\pi}{2} 2u \cdot du} = \frac{1}{\pi u}$.

Funkce $C^2(u) + S^2(u)$ nabývá maximálních hodnot pro

$$u_{\max} = y_{\max} \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}} = \sqrt{4k^{-5}/2} ,$$

a minimálních hodnot pro

$$u_{\min} = y_{\min} \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}} = \sqrt{4k^{-1}/2} .$$

Číslo k je přirozené .

7.21. Přibližné řešení nalezneme tak, že upravíme výraz pro intenzitu E elektrického pole odvozený v příkladu 7.19. Úprava spočívá v limitních přechodech $v_1 \rightarrow -\infty$, $v_2 \rightarrow +\infty$ a $u_2 \rightarrow +\infty$. Dostaneme tak výrazy

$$E = K \frac{\lambda x_0}{2} \cdot e^{i\omega(t - x_0/c)} \cdot (1-i) \cdot \left(\frac{1}{2} - C(u_1) - \frac{1}{2} + iS(u_1) \right)$$

pro elektrické pole a dalšími úpravami též výraz pro osvětlení A stínítka

$$A = \frac{A_0}{2} \left[\left(C(u_1) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(u_1) - \frac{1}{2} \right)^2 \right], \text{ v němž } u_1 = y_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}}$$

a A_0 je osvětlení působené volně procházející vlnou. Tvar posledního výrazu ukazuje, že osvětlení je přímo úměrné kvadrátu délky úsečky, která spojuje bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ s bodem Cornuovy spirály $(C(u_1), S(u_1))$. Maximální a minimální hodnoty osvětlení najdeme pro

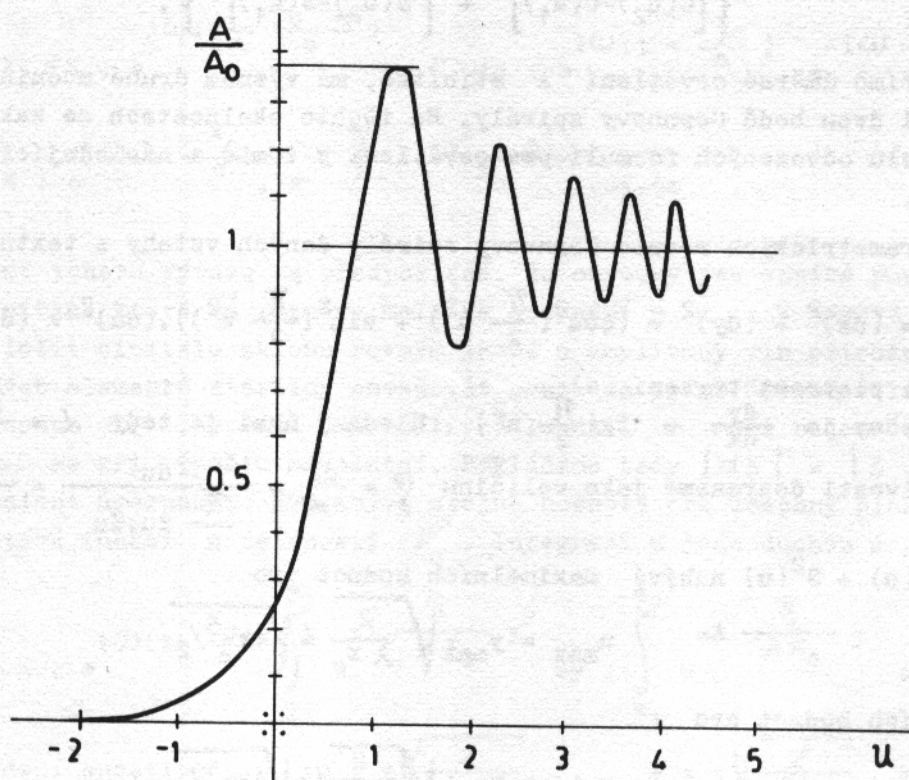
$$y_{\max} = \sqrt{(4k - \frac{5}{4}) \frac{\lambda x_0}{2}} \quad \text{a} \quad y_{\min} = \sqrt{(4k - \frac{1}{2}) \frac{\lambda x_0}{2}}$$

kde k je přirozené číslo. Pro $x_0 = 4 \text{ m}$ a $\lambda = 550 \text{ nm}$ dostáváme

$$y_{\max} \doteq 1,29 : 2,46 : 3,23 : 3,86 : 4,38 : 4,86 ,$$

$$y_{\min} \doteq 1,96 : 2,87 : 3,56 : 4,13 : 4,62 : 5,08 ,$$

vše v jednotkách mm. Průběh ohybového jevu znázorňuje připojený obrázek.

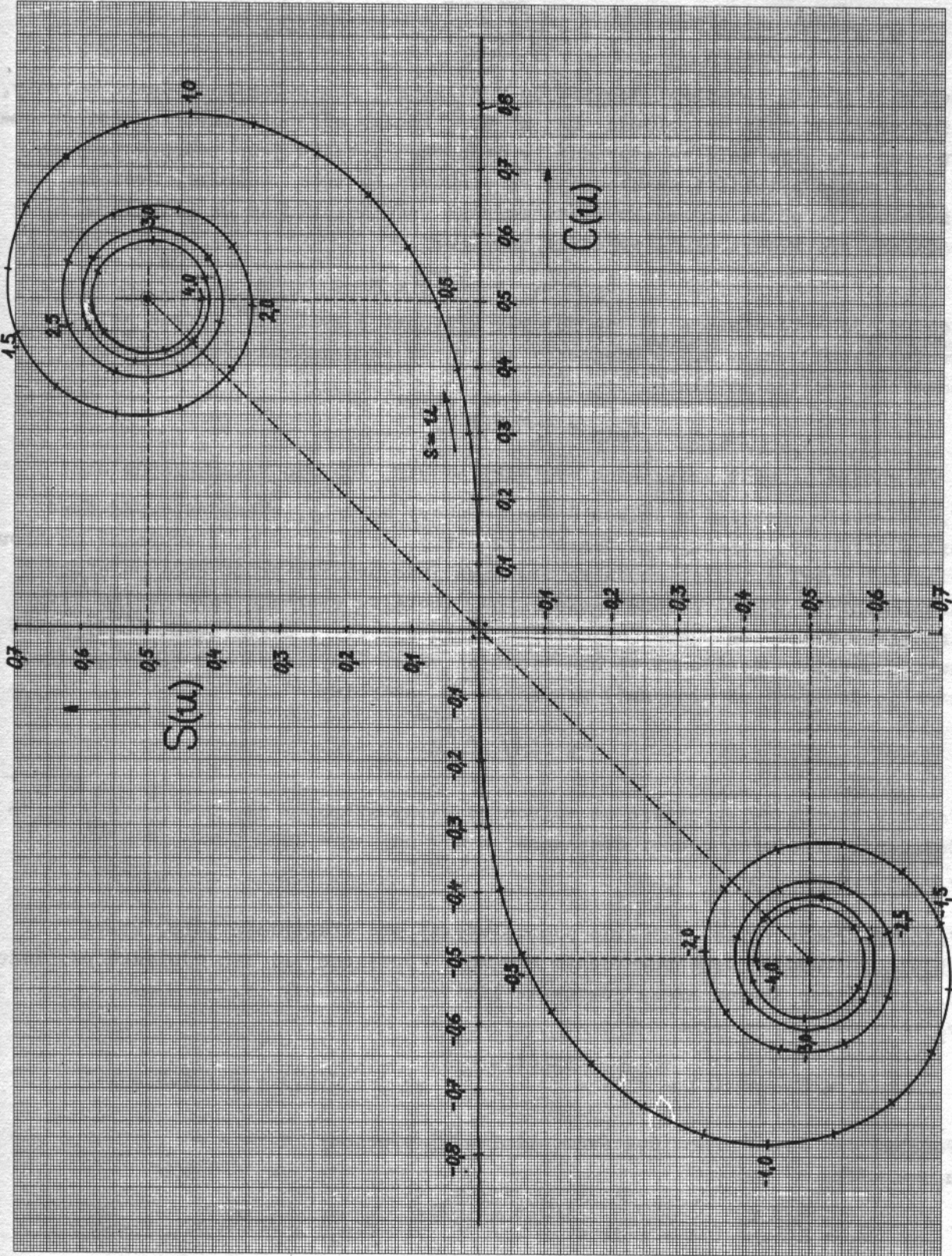


Obr. 7.21.

7.22. Využitím výsledků a řešení předchozích příkladů můžeme odvodit tento přibližný výraz pro osvětlení stínítka :

$$A = \frac{A_0}{2} \left[\left(C(u_2) - C(u_1) \right)^2 + \left(S(u_2) - S(u_1) \right)^2 \right] .$$

A_0 je opět osvětlení působené volně procházející vlnou, souvislost proměnných se souřadnicemi a šířkou štěrby je dána vztahy



Обр. 7.19.

$$u_2 = y_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}} \quad , \quad u_1 = y_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}} \quad , \quad y_2 - y_1 = b \quad .$$

Maxima a minima osvětlení souvisí se vzdáleností koncových bodů úseku spirály, jímž přísluší hodnoty oblouku u_2 a u_1 . Budeme předpokládat, že část oblouku $u_2 - u_1$ je malá ve srovnání s jednotkou, takže jeho koncové body se k sobě mohou přiblížit až hlouběji ve vinutých částech spirály. Protože osvětlení je přímo úměrné kvadrátu zmíněné vzdálenosti, dá se přibližná podmínka pro výskyt minim vyjádřit takto :

$$u_2 - u_1 = 2\pi \varphi \cdot k \quad ,$$

kde k je celé číslo a φ je poloměr křivosti v uvažovaném místě spirály uvnitř úseku $u_2 - u_1$. Dosazením za φ a za proměnné získáme známou podmínku pro výskyt minim

$$y_{\min} = \frac{x_0}{b} k \lambda \quad .$$

(Je vhodné provést srovnání s výsledky na str. 102 pro Fraunhoferův ohyb)

7.23. Problém souvisí s délkou úseku Cornuovy spirály, který odpovídá dané šířce štěrby. Zasahuje-li tento úsek (t.j. úsek $u_2 - u_1$) současně do obou vinutých větví spirály, chová se štěrbina jako dvojice proti sobě položených hran. Není-li taková poloha úseku možná, chová se štěrbina jako jediný útvar. Kriterium stanovíme pomocí nejdelšího úseku spirály, který svými konci ještě nemůže současně dosáhnout do obou vinutých větví tedy $u_2 - u_1 \sim 1$, odkud máme (po dosazení za proměnné) pro šířku b štěrby

$$b = \sqrt{\frac{\lambda x_0}{2}} \quad .$$

Počet vlnových délek, které se vejdou do šířky štěrby je $n = \frac{b}{\lambda} = \sqrt{\frac{x_0}{2\lambda}}$. Dosazením číselných hodnot dostaneme $b = 1 \text{ mm}$, $n = 2000$.

$$7.24. \quad b^2 \ll \lambda \cdot x_0 \quad .$$

7.25. Potřebný výraz sestavíme pomocí výrazů pro elektrická pole, která přísluší dvěma od sebe odvráceným hranám. Využijeme při tom výsledků příkladu č. 7.19. Pro pravou hranu dostáváme limitními přechody $v_1 \rightarrow -\infty$, $v_2 \rightarrow +\infty$, $u_2 \rightarrow +\infty$

$$E_p = K \frac{\lambda x_0}{2} (1 - 1) \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0}{c})} \cdot \left(\frac{1}{2} - C(u_1) - \frac{1}{2} + i.S(u_1) \right)$$

Podobně pro levou hranu dostáváme limitními přechody $v_1 \rightarrow -\infty$, $v_2 \rightarrow +\infty$, $u_1 \rightarrow -\infty$

$$E_l = K \frac{\lambda x_0}{2} (1 - 1) \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0}{c})} \cdot \left(C(u_2) + \frac{1}{2} - i.S(u_2) - \frac{1}{2} \right) \quad .$$

Pro elektrické pole příslušející ohybu na drátu je možné vzít součet obou právě uvedených polí, přičemž je třeba vzít v úvahu, že $u_1 > u_2$:

$$E = K \frac{\lambda x_0}{2} (1 - i) \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0}{c})} \cdot (1 - i + C(u_2) - C(u_1) - iS(u_2) + iS(u_1))$$

Pomocí tohoto výrazu určíme obvyklým způsobem osvětlení A

$$A = \frac{A_0}{2} \left[(1 + C(u_2) - C(u_1))^2 + (1 + S(u_2) - S(u_1))^2 \right],$$

v němž $u_1 = y_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}}$, $u_2 = y_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda x_0}}$ a rozdíl $y_1 - y_2 > 0$

znamená tloušťku drátu.

7.26. Řešení, které uvedeme, bude opět přibližným řešením ve smyslu příkladu č. 7.19. Pro druhou stranu, odkud je štěrba osvětlována, zavedeme nyní obdobné veličiny jako v 7.19. Jejich označení objasňuje obrázek:

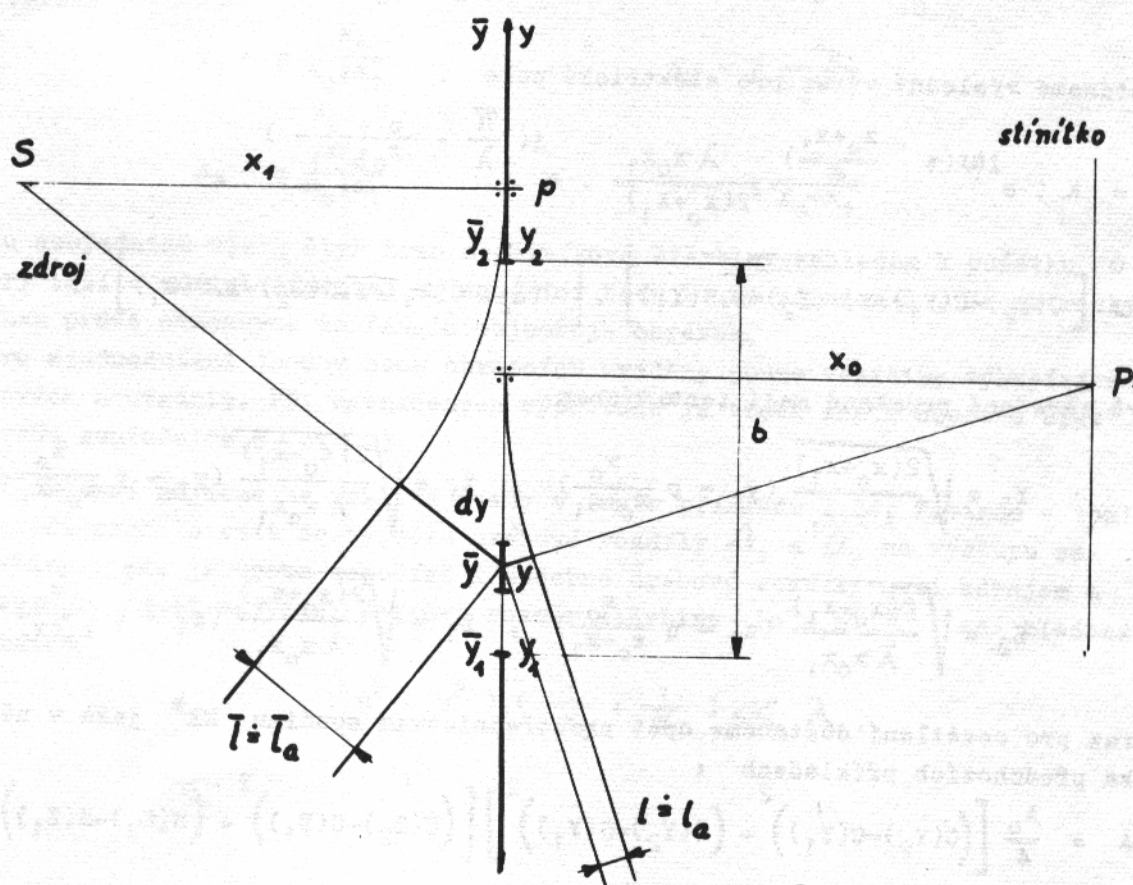
$$l = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}$$

$$l_a = (y^2 + z^2) / 2x_0$$

$$\bar{l} = -x_1 + \sqrt{x_1^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

$$\bar{l}_a = (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) / 2x_1$$

Mezi souřadnicemi zavedenými v rovině štěrby platí vztahy $\bar{y} = y - p$, $\bar{z} = z - q$, v nichž p a q jsou souřadnice paty kolmice spuštěné z bodového zdroje S na rovinu štěrby. Rozdíly $\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = y_2 - y_1 = b$, $\bar{z}_2 - \bar{z}_1 = z_2 - z_1 = a$ určují rozměry a , b obdélníkového otvoru štěrby.



Obr. 7. 26a.

Pro příspěvek dE k výslednému elektrickému poli můžeme napsat a dále upravovat následující výraz

$$\begin{aligned}
 dE &= K \cdot dS \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0 + x_1 + l_a + \bar{l}_a}{c})} = \\
 &= K \cdot dy \cdot dz \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0 + x_1}{c})} \cdot e^{i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{y^2 + z^2}{x_0} + \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{x_1} \right)} = \\
 &= K \cdot dy \cdot dz \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0 + x_1}{c})} \cdot e^{i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{y^2}{x_0} + \frac{\bar{y}^2}{x_1} + \frac{z^2}{x_0} + \frac{\bar{z}^2}{x_1} \right)} = \\
 &= K \cdot dy \cdot dz \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0 + x_1}{c})} \cdot e^{i \frac{\pi}{\lambda} \left[y^2 \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} \right) - y \frac{2p}{x_1} + \frac{p^2}{x_1} \right]} \cdot e^{i \frac{\pi}{\lambda} \left[z^2 \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} \right) - z \frac{2q}{x_1} + \frac{q^2}{x_1} \right]}
 \end{aligned}$$

Dvojitou integrací podle formule (uvedena v tabulkách integrálů - literatura /16/)

$$\int_0^x e^{i(ax^2 + 2bx + c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \cdot e^{i \frac{ac-b^2}{a}} \left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right) + i S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right) \right],$$

$$\text{v níž } C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} u^2 du \quad \text{a} \quad S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} u^2 du,$$

dostaneme výsledný výraz pro elektrické pole :

$$\begin{aligned}
 E &= K \cdot e^{i\omega(t - \frac{x_0 + x_1}{c})} \cdot \frac{\lambda x_0 x_1}{2(x_0 + x_1)} \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{p^2 + q^2}{x_0 + x_1} \right)} \cdot \\
 &\cdot \left[C(Y_2) - C(Y_1) + i S(Y_2) - i S(Y_1) \right] \cdot \left[C(Z_2) - C(Z_1) + i S(Z_2) - i S(Z_1) \right].
 \end{aligned}$$

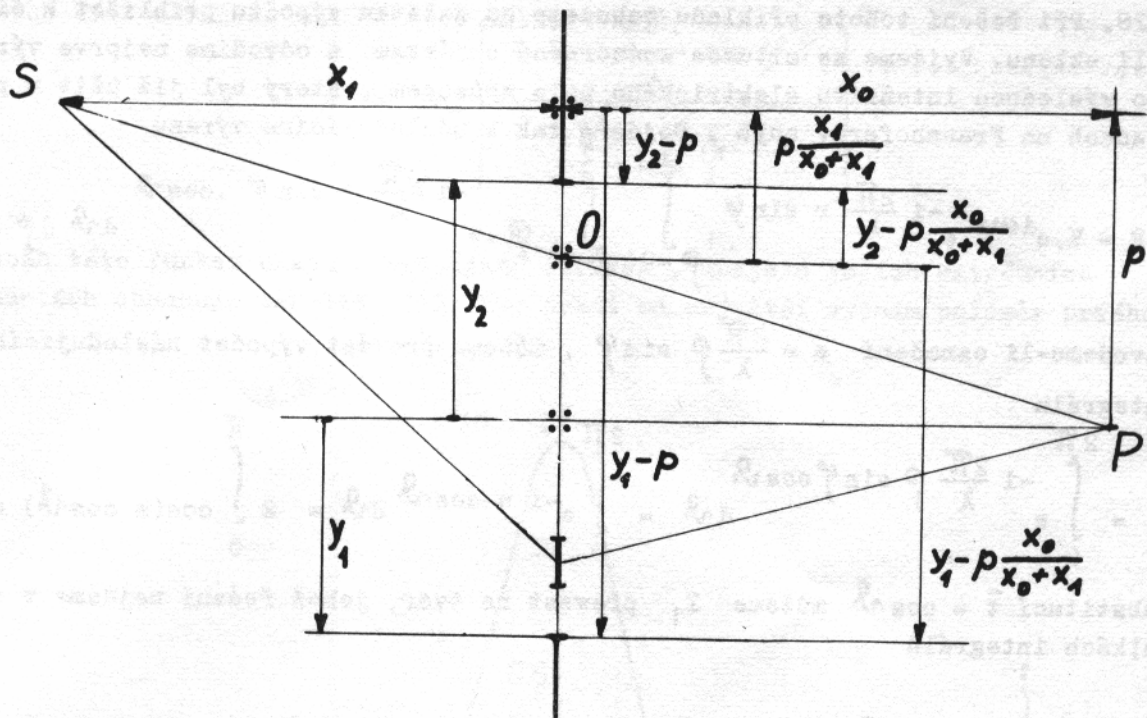
Nově zavedené proměnné mají tento význam

$$\begin{aligned}
 Y_2 &= \sqrt{\frac{2(x_0 + x_1)}{\lambda x_0 x_1}} \left(y_2 - p \frac{x_0}{x_0 + x_1} \right), \quad Y_1 = \sqrt{\frac{2(x_0 + x_1)}{\lambda x_0 x_1}} \left(y_1 - p \frac{x_0}{x_0 + x_1} \right), \\
 Z_2 &= \sqrt{\frac{2(x_0 + x_1)}{\lambda x_0 x_1}} \left(z_2 - q \frac{x_0}{x_0 + x_1} \right), \quad Z_1 = \sqrt{\frac{2(x_0 + x_1)}{\lambda x_0 x_1}} \left(z_1 - q \frac{x_0}{x_0 + x_1} \right).
 \end{aligned}$$

Výraz pro osvětlení dostaneme opět prostřednictvím součinu EE^* jako v několika předchozích příkladech :

$$A = \frac{A_0}{4} \left[\left(C(Y_2) - C(Y_1) \right)^2 + \left(S(Y_2) - S(Y_1) \right)^2 \right] \cdot \left[\left(C(Z_2) - C(Z_1) \right)^2 + \left(S(Z_2) - S(Z_1) \right)^2 \right];$$

A_0 je osvětlení, které působí volně procházející vlna .



Obr. 7.26b.

K odvozeným výrazům pro elektrické pole a osvětlení je třeba dodat vysvětlení, že výrazy

$$y_1 = p \frac{x_0}{x_0 + x_1}, \quad y_2 = p \frac{x_0}{x_0 + x_1},$$

$$z_1 = q \frac{x_0}{x_0 + x_1}, \quad z_2 = q \frac{x_0}{x_0 + x_1}$$

jsou souřadnice všech čtyř hran obdélníkové štěrbině vzhledem k počátku O , který leží v rovině štěrbině na spojnici bodu P se zdrojem S . Geometrický význam právě napsaných souřadnic objasňuje obrázek.

(Pro zjednodušení jsou v obou obrázcích uváděny pouze veličiny týkající se y -ových souřadnic. Při naznačených výpočtech je třeba zcela obdobně brát v úvahu souřadnice z -ové.)

7.27. Řešení najdeme na základě úvahy v textu příkladu 7.24. Zatímco v tomto příkladě stačilo vzít do výpočtu dráhové rozdíly Δ_1 a Δ_2 na výstupu ze štěrbině, zde je třeba započíst i obdobné dráhové rozdíly mezi zdrojem a štěrbinou. Je-li největší délkový rozměr štěrbině $(a^2 + b^2)^{1/2}$, zní hledaná podmínka

$$(a^2 + b^2) \cdot \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} \right) \ll \lambda.$$

7.28. Při řešení tohoto příkladu nebudeme od začátku výpočtu přihlížet k činiteli sklonu. Vyjdeme ze situace znázorněné obrázkem a odvodíme nejprve výraz pro výslednou intenzitu elektrického pole způsobem, který byl již užit v příkladech na Fraunhoferův ohyb. Dojdeme tak k následujícímu výrazu

$$E = K \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \varphi} \cdot \int_0^r \int_0^2 \rho \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin \varphi \cos \vartheta} d\vartheta d\rho.$$

Zavedeme-li označení $a = \frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin \varphi$, můžeme provést výpočet následujícího integrálu

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin \varphi \cos \vartheta} d\vartheta = \int_0^{2\pi} e^{-i a \cos \vartheta} d\vartheta = 2 \int_0^{\pi} \cos(a \cos \vartheta) d\vartheta.$$

Substitucí $\bar{t} = \cos \vartheta$ můžeme I_1 převést na tvar, jehož řešení najdeme v tabulkách integrálů

$$I_1 = 4 \int_0^1 \frac{\cos(a \bar{t})}{\sqrt{1 - (\bar{t})^2}} \cdot d\bar{t} = 2\pi \cdot J_0(a) = 2\pi \cdot J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin \varphi\right).$$

(J_0 je Besselova funkce 1. druhu, nultého řádu.)

Dosazením odvozeného výrazu pro I_1 do výrazu pro elektrické pole dostáváme

$$E = 2\pi \cdot K \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \varphi} \int_0^r \rho \cdot J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin \varphi\right) d\rho.$$

Druhou integraci podle ρ můžeme provést, užijeme-li předchozí veličinu

$a = \frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin \varphi$ jako novou substituční proměnnou a vezmeme-li v úvahu

rekurentní vztah $x \frac{dJ_n}{dx} + n J_n = x J_{n-1}$:

$$I_2 = \int_0^r \rho \cdot J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin \varphi\right) d\rho = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi\right)^2} \int_0^{\frac{2\pi r \sin \varphi}{\lambda}} a \cdot J_0(a) \cdot da =$$

$$= \frac{r}{\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi} J_1\left(\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \varphi\right). \text{ Tím dostáváme hledaný výraz pro elektrické}$$

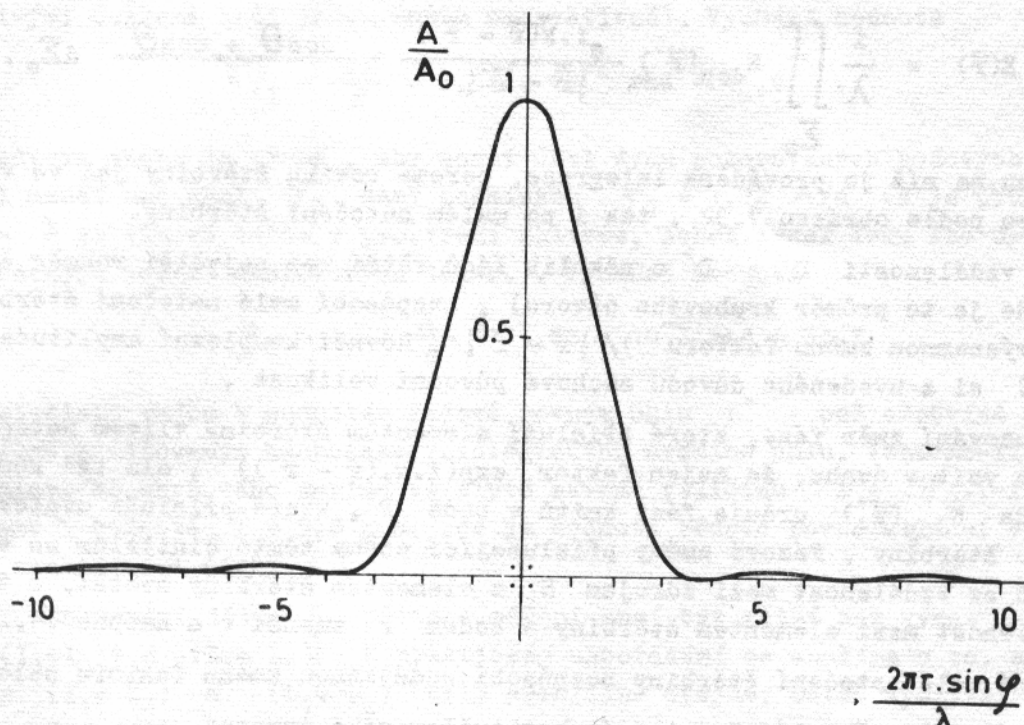
pole

$$E = K \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-i \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \varphi} \cdot \pi r^2 \cdot \frac{2 J_1\left(\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \varphi}$$

a stejným postupem jako v podobných předchozích příkladech též výraz pro osvětlení vzdáleného stínítka

$$A = A_0 \left[\frac{2 J_1 \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \varphi} \right]^2$$

Průběh této funkce ukazuje připojený obrázek, údaje o jejích extrémních hodnotách obsahuje tabulka VII. Pro praxi má největší význam poloměr prvního



Obr. 7.28.

tmavého kruhu, jemuž odpovídá úhel φ daný podmínkou $\sin \varphi \approx 1,22 \frac{\lambda}{2r}$. Podle hodnot zadaných na konci textu příkladu je pro pozorování Fraunhoferova ohybu na kruhovém otvoru nutná vzdálenost stínítka od otvoru mnohem větší než 50 cm.

7.29. Dvě blízké hvězdy stejné svítivosti budeme moci dalekohledem rozlišit tehdy, padne-li hlavní maximum ohybového jevu jedné hvězdy na první minimum ohybového jevu druhé hvězdy. Tomu přísluší úhel φ vypočtený z podmínky uvedené na konci řešení předchozího příkladu. Podle zadaných hodnot vychází úhel $\varphi = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,0252''$.

7.30. Předpokládejme, že bodový zdroj světla leží 2,7 m před vstupním otvorem temné komory. Utvoříme-li rovnost mezi průměrem světlé plošky na zadní stěně komory, stanoveným z hlediska geometrické optiky, a mezi průměrem hlavního ohybového maxima, vyjde optimální hodnota průměru vstupního otvoru $d = 0,64 \text{ mm}$. Poměr vypočteného průměru k průměru první Fresnelovy půlvlnové zony je roven 0,78 (přesnější řešení, které podal Rayleigh, vede k optimální hodnotě tohoto poměru rovné 0,9). Ohybový jev je třeba posuzovat jako ohyb Fresnelův.

7.31. Teoreticky nejmenší použitelný průměr objektivu dalekohledu je $d_{\min} = 3,1 \text{ cm}$, zvětšení musí být rovno nejméně 15. Při praktickém návrhu je třeba zvolit obě veličiny větší.

$$7.32. \quad \rho_k = \sqrt{k \frac{R r_0 \lambda}{R + r_0}}, \quad \Delta S_k = \pi \frac{r_0 R \lambda}{R + r_0}, \quad z = \frac{r^2 \cdot (R + r_0)}{R \cdot r_0 \lambda}$$

7.33. Výpočet elektrického pole (přesněji komplexní amplitudy) v bodě P se provádí pomocí Huygens-Fresnelova integrálu (kapitola 10)

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} E_{\text{dop}}(\vec{r}') \frac{e^{i \cdot \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\cos \theta + \cos \theta'}{2} d\Sigma_0.$$

Za plochu, na níž je prováděna integrace, bereme rovinu štěrby jak ve výchozím stavu podle obrázku 7.32, tak i po malém natočení štěrby.

Jsou-li vzdálenosti D a D' o několik řádů větší než největší rozměr štěrby (zde je to průměr kruhového otvoru), nezpůsobí malé natočení štěrby žádnou významnou změnu faktoru $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$. Rovněž komplexní amplituda $E_{\text{dop}}(\vec{r}')$ si z uvedeného důvodu zachová původní velikost.

Při posuzování změn fáze, které přísluší elementům štěrby vlivem natočení, je třeba vzít v úvahu, že nejen faktor $\exp(i \cdot \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}'))$, ale též komplexní amplituda $E_{\text{dop}}(\vec{r}')$ určuje fázi kmitů v bodě P, které přísluší uvažovanému elementu štěrby. Fázové změny příslušející oběma těmito činitelům se vzájemně ruší. Oč se vzdálenost mezi zdrojem S a elementem štěrby zvětší, o tolik se vzdálenost mezi elementem štěrby a bodem P zmenší (a naopak).

Uvažovaná malá natočení štěrby nezpůsobí podstatnou změnu faktoru sklonu.

Z uvedených skutečností plyne správnost ověřovaného tvrzení.

7.34. Při výpočtu užijeme výsledku předchozího příkladu, který udává poloměry Fresnelových zon (obr. 7.32)

$$\rho_k^2 = k \frac{R \cdot r_0}{R + r_0} \lambda.$$

Při velké vzdálenosti zdroje ($R \rightarrow \infty$) je vzdálenost r_0 rovna ohniskové dálce f. Máme tedy

$$\rho_k^2 = k \cdot f \cdot \lambda.$$

Číselným údajům z textu příkladu pak odpovídá největší hodnota $k_{\max} = 200$. (Tato hodnota obecně nevychází jako celé číslo. Poloměr krajního světlého kroužku nutno při dané vlnové délce a dané ohniskové dálce brát jako orientační údaj. Teprve zaokrouhlená hodnota vypočteného $k_{\max}$ vede k přesné hodnotě $\rho_{k_{\max}}$.)

K zachování konstantního počtu Fresnelových zon při změně polohy zdroje je třeba přemístit též pozorovací bod P tak, aby platila rovnice $R \cdot r_0 / (R + r_0) = f$, což je obdoba k zobrazovací rovnici čočky. Úpravou dostaneme vztah

$$1/f = 1/R + 1/r_0.$$

Velikost kruhového otvoru s Fresnelovými zónami je dána poloměrem $\rho_{200} = 1 \text{ cm}$, jestliže za propustné považujeme zóny s lichým indexem (číslování je od 0, ρ_k znamená menší z obou poloměrů k -té zóny). Do otvoru se vejde 200 zón s indexy od 0 do 199 (z toho je 100 zón propustných). Středová zóna s poloměry $\rho_0 = 0$ a ρ_1 je nepropustná a její vnější poloměr je $\rho_1 = \sqrt{f \cdot \lambda} \approx 0,707 \text{ mm}$.

7.35. Z hlediska geometrické optiky je nutno použít paprsků procházejících uzlovými body. Za hodnotu fyziologického mezního úhlu musíme z tohoto hlediska brát poměr $21/f$ (Předpokládá se, že mezi dvěma osvětlenými na světlo citlivými buňkami leží jedna buňka neosvětlená). Vychází hodnota

$$\varphi_1 = \frac{21}{f} = 2,34 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 48,6''.$$

Z hlediska ohybu je třeba, aby zorný úhel dvou pozorovaných bodových předmětů nebyl menší než úhel φ_2 daný podmínkou $\varphi_2 = 1,22 \lambda/d$ (d je průměr zornice a λ je vlnová délka v prostředí sklivce, jehož index lomu lze určit z uvedených hodnot ohniskových délek.). Vychází hodnota

$$\varphi_2 = 1,22 \frac{\lambda}{d} = 1,68 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 34,7''.$$

Obě hlediska vedou k hodnotám řádově rovným úhlu $1'$, což odpovídá experimentálně zjišťovaným hodnotám fyziologického mezního úhlu. Vezmeme-li za průměr hlavního ohybového maxima ve žluté skvrně veličinu $\bar{l} = \varphi_2 \cdot (-f')$, dojdeme k hodnotě $\bar{l} \approx 3,8 \mu\text{m}$, což je hodnota řádově rovná střední vzdálenosti mezi sousedícími čípkami.

7.36. Koherenční délka L užitého záření musí být větší než výraz $\text{Max}[(l_1 + l_2) \pm d - (L_1 + L_2)]$. V praktickém uspořádání se snažíme o to, aby obě dráhy $(l_1 + l_2)$ a $(L_1 + L_2)$ byly přibližně stejné. Odtud vyplývá, že za koherenční délku nutno považovat vzdálenost řádu $0,1 \text{ m}$. Na základě řešení příkladu 1.19 stanovíme potřebnou maximální šířku spektrální čáry $(\Delta\lambda)_{\text{max}} \approx 0,005 \text{ nm}$.

8.1. $\nu = 4,53 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

8.2. a) $3,31 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; $1,1 \cdot 10^{-27} \text{ N.s}$; $3,68 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$,
 b) $2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$; $6,62 \cdot 10^{-24} \text{ N.s}$; $2,2 \cdot 10^{-32} \text{ kg}$,
 c) $2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$; $6,62 \cdot 10^{-22} \text{ N.s}$; $2,2 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$.

8.3. Oba předpokládané procesy vyžadují splnění rovnic

$$\begin{aligned} h\nu &= mc^2 - m_0c^2 \\ \frac{h\nu}{c} &= mv \end{aligned}$$

Spolu se vztahem $m = m_0(1 - \beta^2)^{-1/2}$ vedou k těmto hodnotám :

$$\beta_1 = 0 \quad \text{a} \quad \beta_2 = 1.$$

V případě prvního řešení nedochází k výměně energie, neboť po srážce musí být $v = 0$ stejně jako před srážkou. Druhé řešení znamená, že elektron by se měl

pohybovat

po srážce rychlostí světla $v = c$, což není možné. Z uvedeného vyplývá, že žádný z předpokládaných procesů se nemůže uskutečnit.

8.4. Minimální energie fotonů nutná pro realizaci fotoefektu je $3,44 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, což odpovídá $2,15 \text{ eV}$. Maximální energie fotoelektronů uvolněných světlem o vlnové délce 400 nm je $1,52 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, t.j. $0,88 \text{ eV}$.

8.5. Při řešení je nutné vyjít ze vztahu platného mezi impulsy h/λ , h/λ' dopadajícího a rozptýleného fotonu a impulsu p elektronu a současně vzít v úvahu Comptonův vztah pro změnu $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ vlnové délky při rozptylu o úhel φ :

$$\frac{h}{\lambda} = p - \frac{h}{\lambda'}$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\varphi)$$

Pro rozptyl pod přímým úhlem ($\varphi = \pi$) dostáváme po dosazení za λ a za univerzální konstanty h , m , c tento výsledek:

$$p = h \frac{2\lambda + \Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} = 2 \cdot 10^{-22} \text{ N.s.}$$

8.6. Maximální změny $\Delta\lambda_e$ a $\Delta\lambda_p$ vlnových délek při rozptylu fotonů na elektronech a protonech jsou v obráceném poměru hmot obou druhů uváděných částic. Proto je $\Delta\lambda_p \approx \Delta\lambda_e/1836$ a znamená to, že při rozptylu rentgenového záření v pevné látce pozorujeme vedle Comptonovské vlnové délky i rozptýlené záření o původní vlnové délce dopadajícího záření.

8.7. $6,2 \text{ kV}$.

10. PŘEHLED UŽITÝCH VZTAHŮ,
TABULKY, LITERATURA.

A) Maxwellovy rovnice

Mezinárodní soustava jednotek

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{I} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Gaussova soustava

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{I} & (\text{Ia}) \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho & (\text{Ib}) \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & (\text{IIa}) \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & (\text{IIb})\end{aligned}$$

Definiční a materiálové vztahy
pro homogenní izotropní magneticky nebo dielektricky měkké prostředí
v klidu.

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \\ \epsilon &= \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon_r \\ \epsilon_r &= 1 + \chi\end{aligned}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{J} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu \vec{H} \\ \mu &= \mu_0 (1 + \chi) = \mu_0 \mu_r \\ \mu_r &= 1 + \chi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad \text{magnetická polarizace} \\ \vec{M} &= \chi \vec{H} \quad \text{magnetizace}\end{aligned}$$

$$\vec{I} = \sigma \vec{E}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{E} + 4\pi \vec{P} = (1 + 4\pi \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} & (\text{III}) \\ \epsilon &= 1 + 4\pi \chi\end{aligned}$$

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{H} + 4\pi \vec{M} = (1 + 4\pi \chi) \vec{H} = \mu \vec{H} & (\text{IV}) \\ \mu &= 1 + 4\pi \chi\end{aligned}$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad \text{magnetizace}$$

$$\vec{I} = \sigma \vec{E}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$c = 2,99792458 \cdot 10^{10} \text{ cm.s}^{-1}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,2566370614 \cdot 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$$

$$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$$

Poyntingův vektor vyjádřený reálnými vektory

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

Časová střední hodnota Poyntingova vektoru vyjádřená komplexními vektory

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

$$\overline{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

B) Fourierova transformace

funkce jedné proměnné

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

C) Vztahy pro odraz a lom na rovinném rozhraní

Poměry amplitud na rozhraní mezi dvěma homogenními, izotropními a neabsorbujícími dielektriky (k obrázkům na stranách 31, 127 a 128).

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{N'}{N} = n$$

$$\left(\frac{E_r}{E_i} \right)_\perp = \frac{\cos \varphi - n \cos \psi}{\cos \varphi + n \cos \psi}$$

$$\left(\frac{E_t}{E_i} \right)_\perp = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + n \cos \psi}$$

$$\left(\frac{E_r}{E_i} \right)_\parallel = \frac{n \cos \varphi - \cos \psi}{n \cos \varphi + \cos \psi}$$

$$\left(\frac{E_t}{E_i} \right)_\parallel = \frac{2 \cos \varphi}{n \cos \varphi + \cos \psi}$$

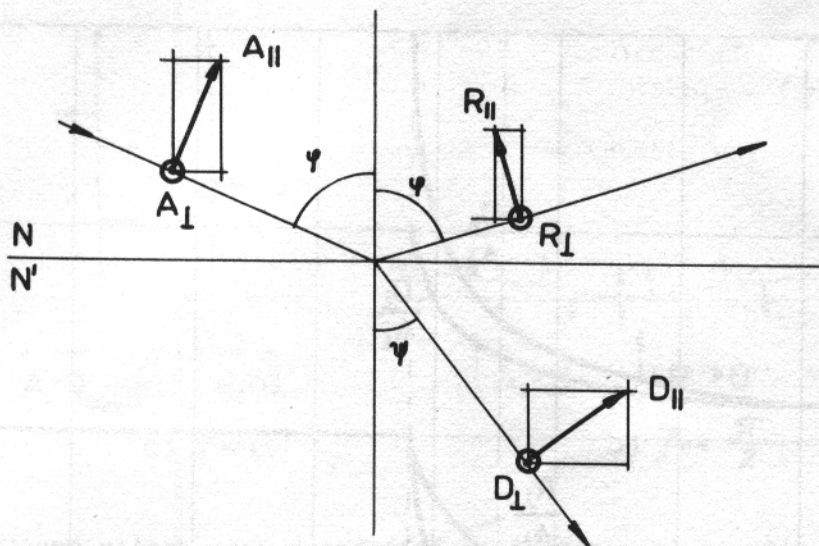
Fresnelovy vzorce

$$\frac{R_\perp}{A_\perp} = - \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}$$

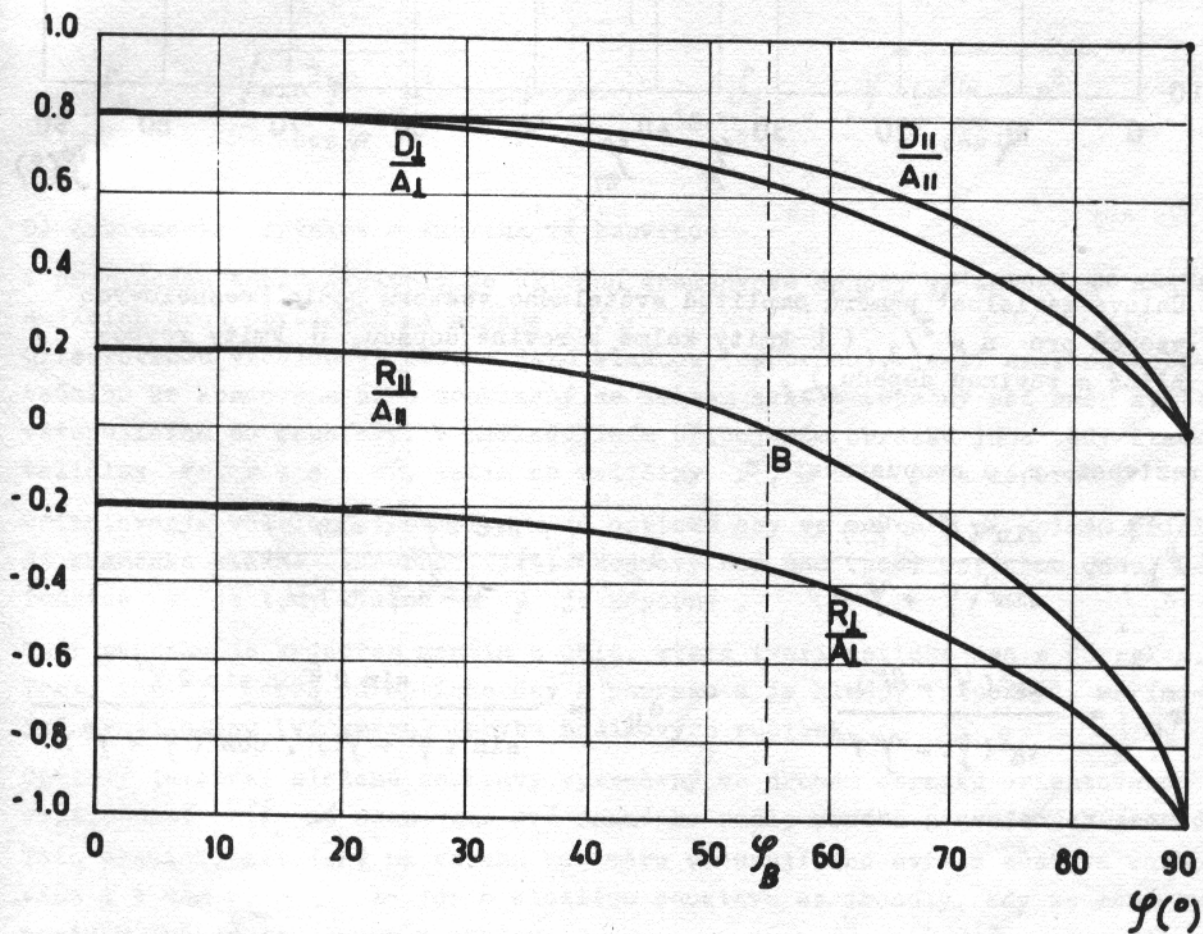
$$\frac{D_\perp}{A_\perp} = \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

$$\frac{R_\parallel}{A_\parallel} = \frac{\text{tg}(\varphi - \psi)}{\text{tg}(\varphi + \psi)}$$

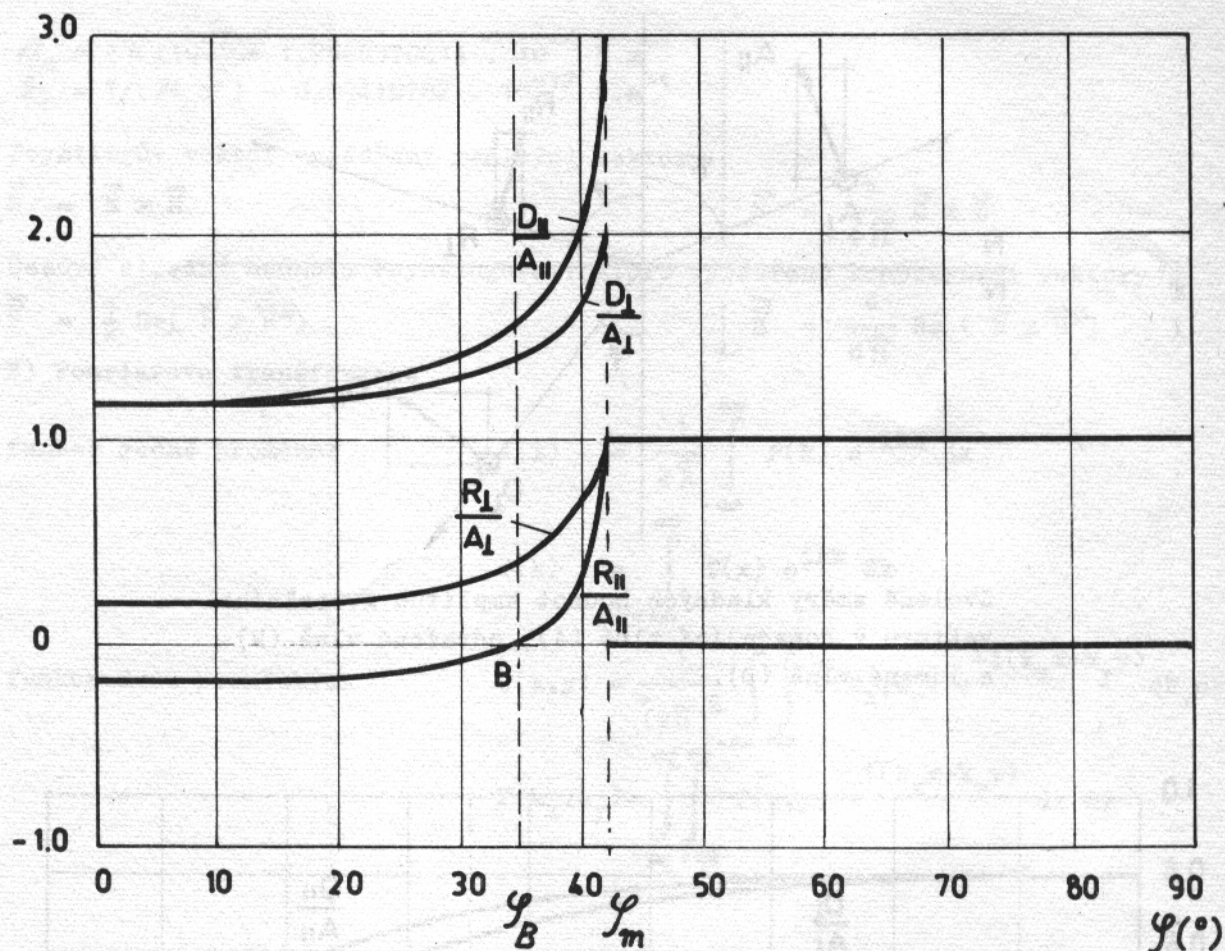
$$\frac{D_\parallel}{A_\parallel} = \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}$$



Zvolené směry kladných hodnot amplitud světelného vektoru v dopadající vlně (A), odražené vlně (R) a lomené vlně (D).



Úhlová závislost poměrů amplitud světelného vektoru podle Fresnelových vzorců pro $n = 1,5$ ($\perp$ kmity kolmé k rovině dopadu, $\parallel$ kmity rovnoběžné s rovinou dopadu).



Úhlová závislost poměrů amplitud světelného vektoru podle Fresnelových vzorců pro $n = 2/3$ ($\perp$ kmity kolmé k rovině dopadu, $\parallel$ kmity rovnoběžné s rovinou dopadu).

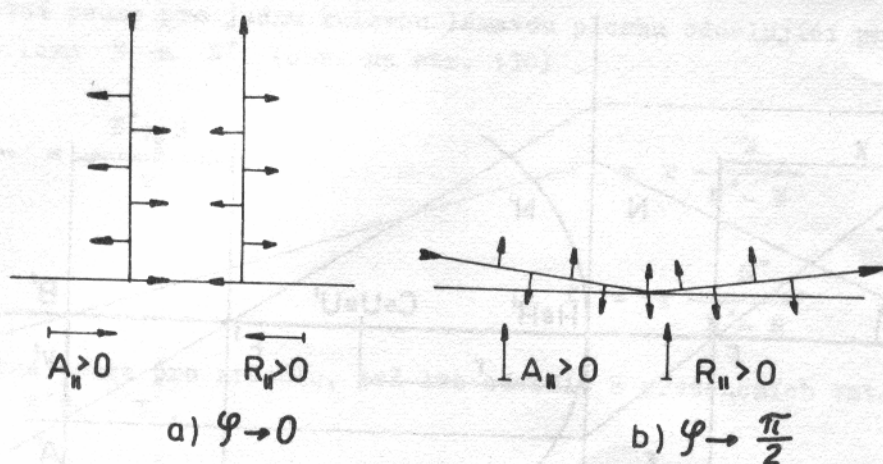
Odrazivost r a propustnost d

$$r_{\perp} = \frac{\sin^2(\varphi - \gamma)}{\sin^2(\varphi + \gamma)}$$

$$d_{\perp} = \frac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\gamma}{\sin^2(\varphi + \gamma)}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\tan^2(\varphi - \gamma)}{\tan^2(\varphi + \gamma)}$$

$$d_{\parallel} = \frac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\gamma}{\sin^2(\varphi + \gamma) \cdot \cos^2(\varphi - \gamma)}$$



Fázové vztahy mezi dopadající a odraženou vlnou při
a) kolmém, b) tečném odrazu od rovinného rozhraní
pro $n > 1$ (Doplňk k řešení příkladu 5.1 na straně 84 a ke grafickým závislostem na straně 127.).

Změny fáze za podmínek úplného odrazu na rozhraní mezi dvěma dielektriky

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi} \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cdot \cos \varphi}$$

D) Zobrazovací rovnice a znaménková konvence

V příkladech třetí kapitoly je užíváno znaménkové dohody vyjádřené na následujících dvou obrázcích na straně 130:

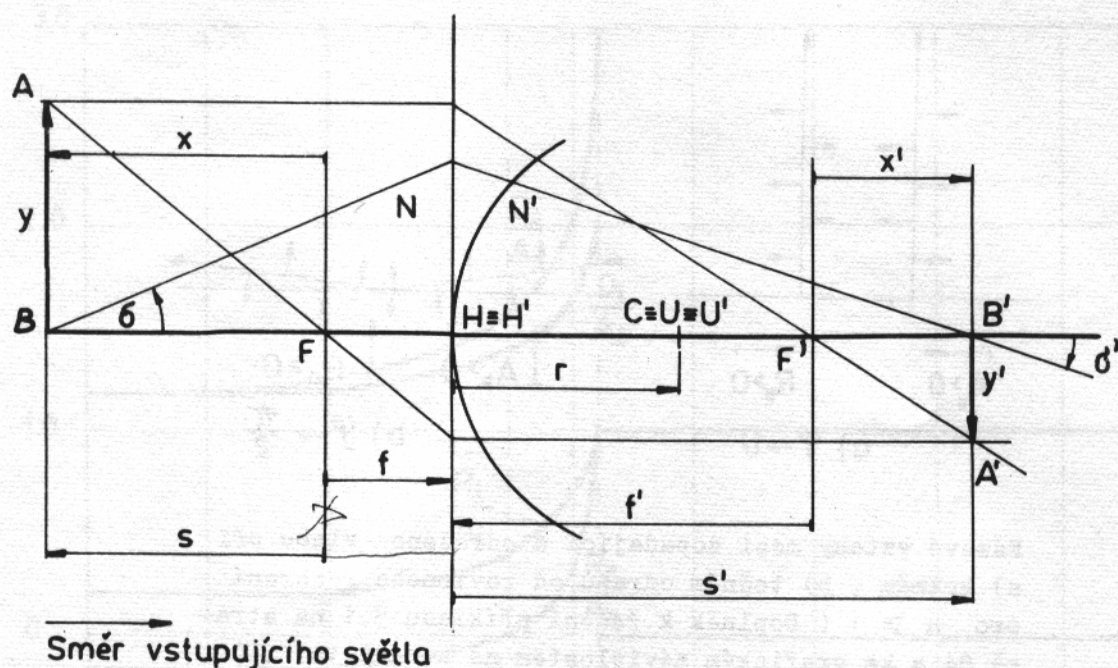
Orientovanou vzdálenost bereme jako kladnou (zápornou), je-li směr od počátečního ke koncovému bodu souhlasný se směrem světla (opačný než směr světla) vstupujícího do soustavy. V následujícím připojeném obrázku jsou tedy kladné veličiny f, r, s', x' , zatím co veličiny f', s, x jsou záporné.

Orientovaným vzdálenostem měřeným od optické osy ve směru k ní kolmém přísluší znaménko kladné (záporné), je-li koncový bod nad (pod) optickou osou. Souřadnice y je tedy kladná a y' je záporné.

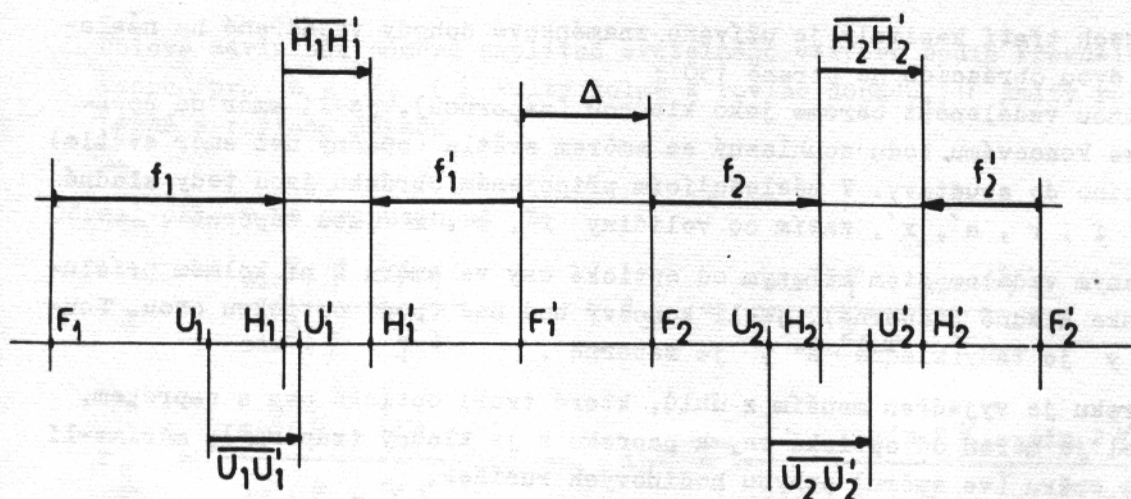
Směr paprsku je vyjádřen menším z úhlů, které tvoří optická osa s paprskem. Tento úhel je měřen od optické osy k paprsku a je kladný (záporný), měříme-li jej proti směru (ve směru) pohybu hodinových ručiček.

Optický interval složené soustavy vyznačený ve druhém obrázku orientovanou vzdáleností $\overline{F_1 F_2}$ má stanoveno své znaménko podle prvního z uvedených pravidel. Toto pravidlo založené na vztahu ke směru vstupujícího světla zůstává zachováno i v tom případě, že jde o složitou soustavu se zrcadly, kdy se mění směr postupu světla soustavou v opačný.

Všechny dále uváděné vztahy se týkají zobrazování paraxiálními paprsky.



Znaménková dohoda u jedné kulové lámavé plochy
(Oba hlavní body H a H' leží ve vrcholu lámavé plochy , oba uzlové body U a U' leží v jejím středu křivosti.).



Znaménková dohoda o optickém intervalu soustavy složené ze dvou částí
(Orientovaná vzdálenost předmětového a obrazového hlavního bodu $\overline{HH'}$ je vždy rovna orientované vzdálenosti $\overline{UU'}$ předmětového a obrazového uzlového bodu. Optickým intervalem Δ se rozumí orientovaná vzdálenost $\overline{F_1F_2}$.).

Vztahy platné pouze pro jednu kulovou lámavou plochu oddělující prostředí o indexech lomu N a N' (obr. na str. 130) .

$$\frac{N'}{s'} - \frac{N}{s} = \frac{N' - N}{r}$$

$$f = r \frac{N}{N' - N}$$

$$f' = -r \frac{N'}{N' - N}$$

Vztahy platné pouze pro zrcadlo, jež lze odvodit z předchozích vztahů dosazením $N' = -N$.

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$$

$$f = f' = -\frac{r}{2}$$

Zobrazovací rovnice a vztahy pro zvětšení optické soustavy v obecném případě (N a N' jsou absolutní indexy lomu předmětového a obrazového prostoru, t.j. před první a za poslední lámavou plochou.)

a) vzhledem k hlavním
bodům H a H'

b) vzhledem k ohniskům F a F'

Prvá zobrazovací rovnice

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = -1$$

$$x \cdot x' = f \cdot f'$$

Příčné zvětšení $\beta = y'/y$
(Druhá zobrazovací rovnice)

$$\frac{y'}{y} = \frac{N}{N'} \cdot \frac{s'}{s}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{x} \quad \left(= \frac{x'}{f'} \right)$$

Úhlové zvětšení $\gamma = \tan \sigma' / \tan \sigma$

$$\frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma} = \frac{s}{s'}$$

$$\frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma} = -\frac{f}{x} \quad \left(= -\frac{x}{f} \right)$$

Osové zvětšení $\alpha = \frac{ds'}{ds} = \frac{dx'}{dx}$

$$\frac{ds'}{ds} = \left(-\frac{s'}{s} \right)^2 \cdot \frac{N}{N'}$$

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x}$$

Mezi souřadnicemi platí vztahy $x = s + f$ a $x' = s' + f'$ podobně jako v obrázku na straně 130. Ohniskové dálky splňují vždy vztah $f'/f = -N'/N$ a mezi zvětšeními platí rovnice $\alpha = \beta/\gamma$.

Polohy výsledných ohnisek složené soustavy a výsledné ohniskové dálky (vzhledem k ohniskům F_1 první soustavy a F_2' druhé soustavy).

$$\overline{F_1 F} = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} \quad f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

$$\overline{F_2' F'} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta} \quad f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}$$

(Tyto 4 veličiny určují polohy výsledných hlavních bodů soustavy.)

Předmětová ohnisková dálka tlusté čočky

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{N}{N'} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(N - N')^2 \cdot d}{N' \cdot N \cdot r_1 \cdot r_2}$$

(N je index lomu materiálu čočky, N' je index lomu prostředí obklopujícího čočku, d je její tloušťka, r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti jejích lámavých ploch. Světlo dopadá nejprve na plochu o poloměru r_1 .)

E) Planckův zákon - zákony záření absolutně černého tělesa

Spektrální zářivost (t.j. spektrální hustota intenzity vyzařování) absolutně černého tělesa

$$r_{\lambda, T} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k} \cdot \frac{1}{\lambda T}} - 1} \quad [W \cdot m^{-3}]$$

$$c_1 = 2\pi hc^2 = 3,7418 \cdot 10^{-16} W \cdot m^2$$

$$c_2 = hc/k = 0,014388 m \cdot K$$

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad [J \cdot m^{-2}]$$

$$\frac{2\pi h}{c^2} = 4,6324 \cdot 10^{-50} J \cdot m^{-2} \cdot s^3$$

(Všechny číselné konstanty, které se vyskytují v uváděných vzorcích této kapitoly, jsou vypočteny na základě číselných hodnot univerzálních fyzikálních konstant uznávaných v současné době. Planckova konstanta $h = 6,626176 \cdot 10^{-34} J \cdot s$, Boltzmannova konstanta $k = 1,380662 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$, rychlost světla $c = 299792458 m \cdot s^{-1}$.)

~~Zářivost~~ povrchu absolutně černého tělesa
(Je integrálem spektrální zářivosti v celém oboru vlnových délek nebo frekvencí.)

$$R = \sigma T^4 \quad [W \cdot m^{-2}] \quad (\text{Stefan-Boltzmannův zákon})$$

$$\sigma = 5,6702 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$$

Vlnová délka příslušející maximu spektrální zářivosti *hypotely i. m.*

$$\lambda_m = c' \frac{1}{T} \quad [m] \quad (\text{Wienův zákon})$$

$$c' = 2,8978 \cdot 10^{-3} m \cdot K$$

Maximální spektrální zářivost *hustota intenzity vyzařování*

$$r_{\max} = c'' \cdot T^5 \quad [W \cdot m^{-3}]$$

$$c'' = 1,2867 \cdot 10^{-5} W \cdot m^{-3} \cdot K^{-5}$$

Vztahy pro výpočet užitých konstant

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \Gamma(4) \zeta(4), \text{ kde } \Gamma(4) = 6 \text{ a } \zeta(4) = 1,0823 ;$$

$$c' = \frac{h \cdot c}{k \cdot x_0}, \text{ kde } x_0 \approx 4,9651142 \text{ je řešením rovnice } (5 - x_0) e^{x_0} = 5 ;$$

$$c'' = \frac{2\pi^5 k^5}{15 h^4 c^3} \cdot \frac{x_0^5}{e^{x_0} - 1}$$

F) Souvislost zářivého a světelného toku plošného zdroje o spektrální zářivosti ϵ_λ a povrchu S .

$$\text{Zářivý tok } \Phi = S \int_0^\infty \epsilon_\lambda d\lambda \quad [W]$$

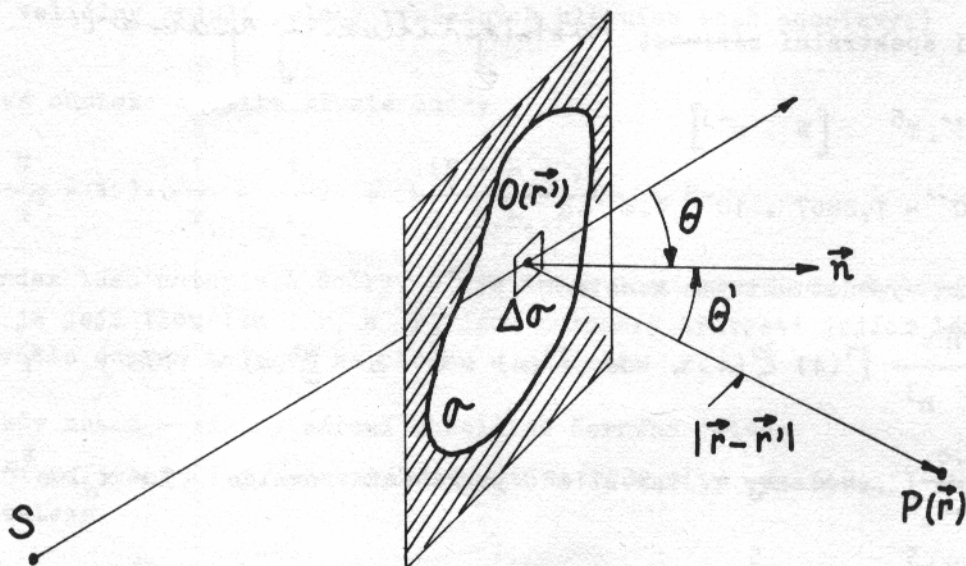
$$\text{Světelný tok } F = S \int_0^\infty K(\lambda) \epsilon_\lambda d\lambda \quad [lm]$$

(Světelná účinnost $K(\lambda)$ nabývá maximální hodnoty $K_m = 680 lm \cdot W^{-1}$ pro vlnovou délku 555 nm.)

G) Fresnel-Kirchoffův ohybový integrál

(Určuje komplexní amplitudu $E(\vec{r})$ v bodě $P(\vec{r})$ za štěrbinou, na níž vzniká ohybový jev. $E_{\text{dop}}(\vec{r}')$ je komplexní amplituda v uvažovaném bodě $O(\vec{r}')$ integrační plochy σ proložené okrajovou křivkou štěrbiny . Štěrbina je osvětlována z bodového zdroje S . Směry $\vec{SO}$ a $\vec{OP}$ svírají s normálou k integrační ploše úhly θ a θ' . Výraz $(\cos \theta + \cos \theta')/2$ se nazývá činitel sklonu.)

$$E(\vec{r}) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\sigma} E_{\text{dop}}(\vec{r}') \frac{e^{-ik(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\cos \theta + \cos \theta'}{2} d\sigma$$



Tabulka I - Poloha blízkého a vzdáleného bodu normálního oka

věk	vzdálenost bodu v cm	
	blízký bod	vzdálený bod
10	- 7	∞
20	- 10	∞
30	- 14	∞
40	- 22	∞
50	- 40	∞
60	- 200	+ 200
70	+ 100	+ 80
75	+ 57	+ 57
80 let	+ 40	+ 40

Tabulka II - Poměrná světelná účinnost $K(\lambda)/K_m$ pro denní vidění lidského oka

λ (nm)	K/K_m	λ (nm)	K/K_m	λ (nm)	K/K_m
380	0,00004	520	0,710	650	0,107
390	0,00012	530	0,862	660	0,061
400	0,0004	540	0,954	670	0,032
410	0,0012	550	0,995	680	0,017
420	0,0040	555	1,000	690	0,0082
430	0,0116	560	0,995	700	0,0041
440	0,023	570	0,955	710	0,0021
450	0,038	580	0,870	720	0,00105
460	0,060	590	0,757	730	0,00052
470	0,091	600	0,631	740	0,00025
480	0,139	610	0,503	750	0,00012
490	0,208	620	0,381	760	0,00006
500	0,323	630	0,256	770	0,00003
510	0,503	640	0,175		

($K_m = 680 \text{ lm.W}^{-1}$)

Tabulka III - Mimořádný a řádný index lomu jednoosých krystalů pro $\lambda = 589,3 \text{ nm}$

Krystal	n_e	n_o
apatit	1,64172	1,64607
vápenec	1,4864	1,6583
křemen	1,5533	1,5442
zirkon (ZrSiO_4)	1,9682	1,9239

Tabulka IV - Závislosti rozdílu ($n_e - n_o$) a vypočtené střední hodnoty derivace

$$\frac{d(n_e - n_o)}{d\lambda} \quad \text{na vlnové délce pro vápenec a křemen}$$

V Á P E N E C

λ (nm)	$D_v = n_e - n_o$	$\frac{dD_v}{d\lambda} = \frac{d(n_e - n_o)}{d\lambda} \quad (m^{-1})$
404,6	- 0,18490	+ 124600
434,0	- 0,18124	+ 79800
486,1	- 0,17709	+ 55500
546,1	- 0,17376	+ 41900
589,3	- 0,17195	+ 32600
656,3	- 0,16977	+ 25700
706,5	- 0,16848	

K Ř E M E N

λ (nm)	$D_k = n_e - n_o$	$\frac{dD_k}{d\lambda} = \frac{d(n_e - n_o)}{d\lambda} \quad (m^{-1})$
404,6	+ 0,00955	- 3740
434,0	+ 0,00944	- 2690
486,1	+ 0,00930	- 2000
546,1	+ 0,00918	- 1620
589,3	+ 0,00911	- 1200
656,3	+ 0,00902	- 1000
706,5	+ 0,00898	

Tabulka V - Index lomu N_D a Abbeovo číslo $\mathcal{A} = \frac{N_D - 1}{N_F - N_C}$ základních druhů

optických skel (D, F a C znamenají vlnové délky z tabulky VI.).

Druh skla	N_D	$\mathcal{A}$
Korunová skla obyčejná	1,45 až 1,56	70 až 58
Flintová skla obyčejná	1,62 až 1,80	37 až 21
Korunová skla těžká	1,60 až 1,68	60 až 50
Flintová skla těžká	1,54 až 1,56	46 až 43

Tabulka VI - Fraunhoferovy čáry

Čára	A	B	C	D	E	F	G	H
Vlnová délka (nm)	760,8	686,7	656,3	589,3	527,0	486,1	430,8	396,8
barva	tmavo- červená	červená	červená	žlutá	zelená	modro- zelená	modrá	fialová

Tabulka VII - Údaje pro určení poloh maximálního a nulového osvětlení stínítka při Fraunhoferově ohybu na kruhovém otvoru, redukované hodnoty osvětlení v maximech (k příkladu 7.28 na str. 120).

Minimum		Maximum		
n	$x_{\min, n} = \frac{2\pi r \sin \varphi}{\lambda}$	n	$x_{\max, n} = \frac{2\pi r \sin \varphi}{\lambda}$	$\frac{A}{A_0}$
1	3,8317	1	0	1
2	7,0156	2	5,135	0,0175
3	10,1735	3	8,417	0,0042
4	13,3237	4	11,620	0,0016
5	16,4706	5	14,796	0,00078

Tabulka VIII - Fresnelovy integrály (k příkladu 7.20 na str. 48).

u	C(u)	S(u)	u	C(u)	S(u)	u	C(u)	S(u)
0,0	0	0	3,0	0,6057	0,4963	6,0	0,4995	0,4469
0,1	0,0999	0,0005	3,1	0,5616	0,5818	6,1	0,5495	0,5165
0,2	0,1999	0,0042	3,2	0,4663	0,5933	6,2	0,4676	0,5398
0,3	0,2994	0,0141	3,3	0,4057	0,5193	6,3	0,4760	0,4555
0,4	0,3975	0,0334	3,4	0,4385	0,4297	6,4	0,5496	0,4965
0,5	0,4923	0,0647	3,5	0,5326	0,4153	6,5	0,4816	0,5454
0,6	0,5811	0,1105	3,6	0,5880	0,4923	6,6	0,4690	0,4631
0,7	0,6597	0,1721	3,7	0,5419	0,5750	6,7	0,5467	0,4915
0,8	0,7230	0,2493	3,8	0,4481	0,5656	6,8	0,4831	0,5436
0,9	0,7648	0,3398	3,9	0,4223	0,4752	6,9	0,4723	0,4624
1,0	0,7799	0,4383	4,0	0,4984	0,4205	7,0	0,5455	0,4997
1,1	0,7648	0,5365	4,1	0,5737	0,4758	7,1	0,4733	0,5360
1,2	0,7154	0,6234	4,2	0,5417	0,5632	7,2	0,4887	0,4572
1,3	0,6386	0,6863	4,3	0,4494	0,5540	7,3	0,5393	0,5199
1,4	0,5431	0,7135	4,4	0,4383	0,4623	7,4	0,4601	0,5161
1,5	0,4453	0,6975	4,5	0,5258	0,4342	7,5	0,5160	0,4607
1,6	0,3655	0,6389	4,6	0,5672	0,5162	7,6	0,5156	0,5389
1,7	0,3238	0,5492	4,7	0,4914	0,5669	7,7	0,4628	0,4820
1,8	0,3337	0,4509	4,8	0,4338	0,4968	7,8	0,5395	0,4896
1,9	0,3945	0,3734	4,9	0,5002	0,4351	7,9	0,4760	0,5323
2,0	0,4883	0,3434	5,0	0,5636	0,4992	8,0	0,4998	0,4602
2,1	0,5814	0,3743	5,1	0,4987	0,5624	8,1	0,5228	0,5320
2,2	0,6362	0,4556	5,2	0,4389	0,4969	8,2	0,4638	0,4859
2,3	0,6268	0,5531	5,3	0,5078	0,4404	8,3	0,5378	0,4932
2,4	0,5550	0,6197	5,4	0,5573	0,5140	8,4	0,4709	0,5243
2,5	0,4574	0,6192	5,5	0,4784	0,5537	8,5	0,5142	0,4653
2,6	0,3889	0,5500	5,6	0,4517	0,4700			
2,7	0,3926	0,4529	5,7	0,5385	0,4595			
2,8	0,4675	0,3915	5,8	0,5298	0,5461			
2,9	0,5624	0,4102	5,9	0,4484	0,5163			

- /1/ Rousseau M., Mathieu G.P. : Problems in optics , Pergamon Press
Oxford 1973 , ruský překlad , izd. Mir , Moskva 1976
- /2/ Hajko V. a kol. : Fyzika v príkladoch, SVTL/SNTL, Bratislava-Praha 1963
- /3/ Ginzburg V.L. a kol. : Sbíрка příkladů z fyziky, část II , překlad
z ruštiny , NČSAV Praha 1953
- /4/ Fuka J., Havelka J. : Optika , SPN , Praha 1961
- /5/ Petržílka V. : Fyzikální optika , Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1952
- /6/ Hecht E. : Optics , Mc Graw Hill , 1975
- /7/ Rossi B. : Optics , Addison-Wesley , 1957
- /8/ Klein M.V. : Optics , J. Wiley Int. Edition 1970
- /9/ Friš S.E., Timorevová A.V. : Kurs fyziky III , NČSAV Praha 1953
- /10/ Klier E. : Optika , SPN , Praha 1977
- /11/ Kalitějevskij N.I. : Volnovaja optika , IN Moskva 1971
- /12/ Landsberg G.S. : Optika , GITTL Moskva 1952
- /13/ Ditchburn R.W. : Light , ruský překlad : Fizičeskaja optika ,
izd. Nauka, Moskva 1965
- /14/ Born M., Wolf E. : Principles of optics , ruský překlad Osnovy optiki ,
izd. Nauka, Moskva 1973
- /15/ Jahnke-Emde : Tafeln höherer Funktionen, Teubner, Leipzig 1960
- /16/ Gradštejn I.S., Ryžik I.M. : Tablicy integralov, summ, rjadov i proizve-
dění, GIFML Moskva 1963