

X. SPOČETNÉ MNOŽINY. ČÍSELNÉ OBORY.

Definice. Množina A se nazve spočetná (“countable”), jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi A a $\mathbb{N}$. Názorně: prvky A lze srovnat do *prosté* posloupnosti $A = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Příklady. ① triviálně $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$; množina všech prvočísel, množina všech sudých čísel. Obecně každá *nekonečná* podmnožina $\mathbb{Z}$ je spočetná.

② množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Značení. Symbolem $\langle a, b \rangle$ značíme (uspořádanou) dvojici a, b , $A \times B$ je kartézský součin množin A, B , tj.

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle; a \in A, b \in B\}$$

Dále $\mathcal{P}(X)$ značí potenční množinu X , tj. množinu všech podmnožin X . Symbolem B^A rozumíme množinu všech funkcí z A do B , tj. např. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je množina všech reálných posloupností.

Věta X.1 (1) Jsou-li A, B spočetné, je $A \times B$ spočetná.

(2) Jsou-li pro $\forall j \in \mathbb{N}$ množiny A_j spočetné, je $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ spočetná.

Lemma X.1 [Cantor.] Žádnou množinu X nelze vzájemně jednoznačně zobrazit na její potenční množinu $\mathcal{P}(X)$.

Věta X.2.

(1) Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

(2) Množina $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ je nespočetná.

(3) Nechť A je spočetná. Pak $\mathcal{P}(A)$ je nespočetná.

Poznámky. Dle předchozího je $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je nespočetná, a (má-li A aspoň dva prvky), je také $A^{\mathbb{N}}$ nespočetná. Na druhou stranu z Věty X.1 snadno dostaneme:

① Je-li A spočetná, je $\mathcal{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ množina všech *konečných* podmnožin A spočetná.

② Je-li A konečná (nebo spočetná), je množina $A^{<\omega}$ všech *konečných* posloupností z A spočetná.

Poznámky. Jak definovat mohutnost (tj. počet prvků) nekonečné množiny obecně? Nepřímo pomocí následujících pojmů.

Řekneme, že množiny A, B jsou ekvivalentní (mají stejnou mohutnost), pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\varphi : A \rightarrow B$. Značíme $A \approx B$.

Řekneme, že množina A je subvalentní množině B (mohutnost A je menší nebo rovna mohutnosti B), pokud existuje prosté zobrazení $\varphi : A \rightarrow B$. Značíme $A \preceq B$.

Řekneme, že A je striktně subvalentní B (mohutnost A je ostře menší než mohutnost B), jestliže $A \preceq B$ a přitom $A \not\approx B$. Značíme $A \prec B$.

Takto definovaná relace má rozumné vlastnosti:

- $A \preceq B$ a $B \preceq C \implies A \preceq C$ (tranzitivita)
- $A \preceq B$ a $B \preceq A \implies A \approx B$ (Cantor-Bernsteinova věta)

Příklady. ① A je spočetná, právě když $A \approx \mathbb{N}$.

② Lze ukázat, že $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, a tedy $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Dále platí $\mathbb{R} \approx I$ pro každý (netriviální) interval $I \subset \mathbb{R}$.

③ Každá nám známá nekonečná $M \subset \mathbb{R}$ je buď spočetná, nebo platí $M \approx \mathbb{R}$. Obecně však toto tvrzení (tzv. hypotéza kontinua) nelze ani dokázat, ani vyvrátit.

Definice. Číslo $x \in \mathbb{R}$ se nazve:

- konstruovatelné, pokud úsečku délky x lze sestavit tzv. Eukleidovskou konstrukcí (pomocí pravítka a kružítka); značíme $x \in \mathcal{K}$
- algebraické, pokud x je kořenem (netriviálního) polynomu s celočíselnými koeficienty; značíme $x \in \mathcal{A}$
- transcendentní, pokud není algebraické

Číslo x se nazve vyčíslitelné (“computable”), značíme $x \in \mathcal{C}$, jestliže existuje *konečný* algoritmus (program), který x umí spočítat se zadanou přesností.

Poznámky. Platí: $\mathbb{Q} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ a všechny tyto inkluze jsou striktní. Například $\sqrt{2}$ je iracionální, konstruovatelné; $\sqrt[3]{2}$ je algebraické, ale není konstruovatelné. Čísla e , π jsou transcendentní. Nicméně všechna tato čísla jsou vyčíslitelná.

Věta X.3. Množiny $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ jsou spočetné.

Důsledek. Existují nevyčíslitelná čísla.