FRAGMENT

DĚMIDOVIČ

BORIS PAVLOVIČ

Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy

BORIS PAVLOVIČ DĚMIDOVIČ

Sbírka úloh a cvičení

z matematické

analýzy

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
Knihovna mat. fyz. fakulty
Matematické oddělení
přír. č. 1679/2003
sig. 17

Boris Pavlovič Děmidovič

Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy

Originally published in Russian under the title "Collection of Problems and Exercises in Mathematical Analysis" by B.P. Demidovich, Moscow, Nauka, 1990. All rights reserved.

Z ruského originálu přeložili Miroslav Rozložník a Miroslav Tůma.
Grafická úprava Marek Jodas
Odborná korektura Eva Murtinová
Odpovědný redaktor Karel Kuna
Technická redaktorka Alena Suchánková
Vydalo nakladatelství Fragment, Humpolecká 1503, Havlíčkův Brod,
jako svou 631. publikaci. 1. vydání, 2003.
Sazbu zhotovil Fragment DTP, s. r. o.
Vytiskla Centa, spol. s r. o., Brno.

České vydání © Fragment, 2003
Translation © Miroslav Rozložník, Miroslav Tůma, 2003
Typo © Marek Jodas, 2003

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace nesmí
být rozšiřována bez písemného souhlasu majitelů práv.

Kontaktní adresa: Radiová 1, 102 27 Praha 10 - Hostivař
e-mail: fragment@fragment.cz
http://www.fragment.cz

ISBN 80-7200-587-1 (1. vydání, 2003)

OBSAH

ČÁST PRVNÍ – Reálná [illegible]

KAPITOLA I – Úvod do matematické analýzy

§ 1. Reálná čísla 9
§ 2. Limita posloupnosti 14
§ 3. Pojem funkce 26
§ 4. Grafické znázornění funkce 32
§ 5. Limita funkce 42
§ 6. Používání symbolu O 62
§ 7. Spojitost funkce 65
§ 8. Inverzní funkce. Funkce zadané parametricky 74
§ 9. Stejnoměrná spojitost funkce 77
§ 10. Funkcionální rovnice 79

KAPITOLA II – Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

§ 1. Derivace funkce 81
§ 2. Derivace inverzní funkce. Derivace funkce zadané parametricky. Derivace implicitní funkce .. 96
§ 3. Geometrický význam derivace 98
§ 4. Diferenciál funkce 101
§ 5. Derivace a diferenciály vyšších řádů 104
§ 6. Rolleova, Lagrangeova a Cauchyova věta 112
§ 7. Monotónní funkce. Nerovnosti 117
§ 8. Konvexní a konkávní funkce. Inflexní body 120
§ 9. Výpočet limit pomocí l'Hospitalova pravidla 122
§ 10. Taylorova věta 126
§ 11. Extrémy funkce. Maximální a minimální hodnoty funkce 130
§ 12. Vyšetřování průběhu funkce 134
§ 13. Úlohy na maximum a minimum funkce 137
§ 14. Dotyky křivek. Oskulační kružnice (kružnice křivosti). Evoluta 140
§ 15. Přibližné řešení rovnic 141

KAPITOLA III – Neurčitý integrál

§ 1. Nejjednodušší neurčité integrály 143
§ 2. Integrování racionálních lomených funkcí 153
§ 3. Integrování funkcí s odmocninami 157
§ 4. Integrování goniometrických funkcí 161
§ 5. Integrování transcendentních funkcí 167
§ 6. Další příklady integrování funkcí 169

KAPITOLA IV – Určitý integrál

§ 1. Definice určitého integrálu 172
§ 2. Výpočet určitého integrálu pomocí primitivní funkce 175
§ 3. Věty o střední hodnotě 184
§ 4. Nevlastní integrál 187
§ 5. Výpočet obsahu rovinných ploch 193
§ 6. Výpočet délky rovinných křivek 196
§ 7. Výpočet objemu těles 198
§ 8. Výpočet povrchu rotačních ploch 200
§ 9. Výpočet momentů. Souřadnice těžiště 201
§ 10. Úlohy z mechaniky a fyziky 203
§ 11. Přibližné metody výpočtu určitých integrálů 204

KAPITOLA V – Řady

§ 1. Číselné řady. Kritéria konvergence řad s konstantním znaménkem 206
§ 2. Kritéria konvergence řad s obecnými členy 217
§ 3. Operace s řadami 222
§ 4. Řady funkcí 224
§ 5. Mocninné řady 234
§ 6. Fourierovy řady 244
§ 7. Výpočet součtu řady 248
§ 8. Výpočet určitých integrálů pomocí součtu řady 251
§ 9. Nekonečné součiny 253
§ 10. Stirlingův vzorec 259
§ 11. Aproximace spojitých funkcí pomocí polynomů 259

ČÁST DRUHÁ – Funkce více reálných proměnných

KAPITOLA VI – Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných

§ 1. Limita a spojitost funkce 262
§ 2. Parciální derivace. Diferenciál funkce 268
§ 3. Derivování implicitních funkcí 279
§ 4. Záměna proměnných 286
§ 5. Geometrické aplikace 295
§ 6. Taylorův vzorec 299
§ 7. Extrémy funkcí více proměnných 302

KAPITOLA VII – Integrály závislé na parametru

§ 1. Určité integrály závislé na parametru 308
§ 2. Neurčité integrály závislé na parametru. Stejnoměrná konvergence integrálů 312
§ 3. Derivace a integrování nevlastních integrálů závislých na parametru 317
§ 4. Eulerovy integrály 323
§ 5. Integrální Fourierův rozvoj 326

KAPITOLA VIII – Vícerozměrné a křivkové integrály

§ 1. Dvojné integrály 328
§ 2. Výpočet obsahů rovinných ploch 335
§ 3. Výpočet objemů těles 337
§ 4. Výpočet obsahů prostorových ploch 339
§ 5. Použití dvojných integrálů v mechanice 341
§ 6. Trojné integrály 343
§ 7. Výpočet objemu pomocí trojných integrálů 346
§ 8. Použití trojných integrálů v mechanice 349
§ 9. Nevlastní dvojné a trojné integrály 353
§ 10. Vícerozměrné integrály 357
§ 11. Křivkové integrály 360
§ 12. Greenova věta 368
§ 13. Využití křivkových integrálů ve fyzice 371
§ 14. Plošné integrály 374
§ 15. Stokesova věta 377
§ 16. Gaussova–Ostrogradského věta 379
§ 17. Základy vektorové analýzy a teorie pole 383

Výsledky

Část první 391
Část druhá 437

Tak jako mnoho dalších matematiků, i já jsem používal tuto velmi populární knihu dvakrát. Poprvé to bylo tehdy, když jsem studoval matematickou analýzu. Podruhé to bylo, když jsem sám podle ní učil jiné. Proto jsem velmi rád, že se stávám svědkem dalšího vydání sbírky příkladů B. P. Děmidoviče, tentokrát v českém jazyce. S přirozeným pocitem vděku tak reaguji na toto vydání napsáním jeho předmluvy.

B. P. Děmidovič (1906–1977) vystudoval Běloruskou státní univerzitu. Několik let zde strávených vyučoval matematiku, pak přijal místo vedoucího katedry matematické analýzy na Moskevské státní univerzitě. Zde přednášel více než čtyřicet let, získal tituly kandidáta a doktora matematických věd a stal se profesorem matematiky.

Sbírka úloh, kterou nyní dostáváte do ruky, patří mezi jeho vysoce oceňovaná díla. Už po prvním vydání v roce 1952 si kniha, k níž autor shromažďoval materiál patnáct let, získala pověst základní univerzitní sbírky úloh z matematické analýzy. Struktura knihy byla zvolena natolik úspěšně, že ani v dalších vydáních nevyžadovala podstatné změny. Do dnešního dne se přitom dočkala třinácti vydání v ruském jazyce s více než milionem výtisků a byla přeložena do mnoha dalších jazyků.

Vývoj matematiky postupně přináší novou terminologii, pojmy, metody a koncepce, které obvykle sjednocují dosavadní poznatky. Často jsou tak ovlivněny i základní obory, které se již zdály být ucelené. To se dnes v plné míře týká diferenciálního a integrálního počtu s moderní invariantní interpretací diferenciálu a pravidel derivování, jazyka diferenciálních forem a jejich integrace, které umožňují moderní zápis a chápání Newtonova-Leibnizova vzorce. Přesto tento formalismus i zobecněná Stokesova věta dodnes chybějí ve sbírkách příkladů i v povinných kurzech matematické analýzy. Dále existují asymptotické metody, které spojují více matematických odvětví a tvoří velmi užitečný aparát, jehož součásti, jako jsou teorie limitního přechodu a Taylorův vzorec, by také neměly chybět v žádné sbírce úloh z matematické analýzy.

Praktická zkušenost ukázala, že sbírka úloh sestavená B. P. Děmidovičem umožňuje studentům získat potřebné znalosti v používání aparátu klasické matematické analýzy. I dnes se tato kniha těší zasloužené popularitě. Proto mohu její nové vydání, nyní i v českém jazyce, jen přivítat jako vydání jedné z nejlepších vysokoškolských sbírek příkladů z klasické matematické analýzy.

Profesor V. A. Zorič
Vedoucí Oddělení matematické analýzy
Katedra mechaniky a matematiky
Moskevská státní univerzita

ČÁST PRVNÍ

REÁLNÉ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

KAPITOLA I

Úvod do matematické analýzy

§ 1. Reálná čísla

1. **Metoda matematické indukce.** K tomu, abychom dokázali, že nějaké tvrzení platí pro každé přirozené číslo n, stačí ukázat, že: 1) toto tvrzení platí pro $n = 1$ a 2) platí-li toto tvrzení pro nějaké přirozené číslo n, pak platí i pro následující přirozené číslo $n + 1$.

2. **Definice řezu číselné množiny.** Dvojici množin racionálních čísel A a B nazveme *řezem*, jsou-li splněny následující podmínky: 1) žádná z množin A, B není prázdná; 2) každé racionální číslo leží právě v jedné z těchto množin a 3) libovolné číslo z množiny A (*dolní skupina řezu*) je menší než libovolné číslo z množiny B (*horní skupina řezu*). Řez A/B jednoznačně určuje: a) číslo racionální, obsahuje-li jeho dolní skupina A největší číslo nebo obsahuje-li jeho horní skupina B nejmenší číslo; b) číslo iracionální, jestliže množina A neobsahuje největší číslo a množina B neobsahuje nejmenší číslo. Čísla racionální a iracionální budeme dohromady nazývat *reálnými čísly*.[1)]

3. **Absolutní hodnota reálného čísla.** *Absolutní hodnotou* reálného čísla x rozumíme nezáporné číslo, které značíme symbolem $|x|$ a které je určeno následujícími podmínkami:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{je-li } x < 0, \\ x, & \text{je-li } x \geq 0. \end{cases}$$

[1)] V následujícím textu budeme pod pojmem *číslo* rozumět *reálné číslo*, nebude-li explicitně zmíněno něco jiného.

Pro libovolnou dvojici reálných čísel x a y platí nerovnosti

$$|x| - |y| \le |x+y| \le |x| + |y|.$$

4. **HORNÍ A DOLNÍ HRANICE (SUPREMUM A INFIMUM) ČÍSELNÉ MNOŽINY.** Nechť $X = \{x\}$ je omezená množina reálných čísel.

Reálné číslo

$$m = \inf\{x\}$$

nazýváme *dolní hranicí* nebo *infimem* množiny X pokud:

1) pro každé číslo $x \in X$[2] platí

$$x \ge m;$$

2) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje aspoň jedno $x' \in X$, pro které platí

$$x' < m + \varepsilon.$$

Analogicky, reálné číslo

$$M = \sup\{x\}$$

nazýváme *horní hranicí* nebo *supremem* množiny X pokud:

1) pro každé číslo $x \in X$ platí

$$x \le M,$$

2) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje aspoň jedno $x'' \in X$, pro které platí

$$x'' > M - \varepsilon.$$

Není-li množina X omezená zdola, klademe

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

není-li množina X omezená shora, klademe

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. **ABSOLUTNÍ A RELATIVNÍ ODCHYLKA (CHYBA).** Nechť a $(a \neq 0)$ je přesná hodnota nějaké měřené veličiny a x je její přibližná hodnota. Pak číslo

$$\Delta = |x - a|$$

nazýváme *absolutní odchylkou* nebo *absolutní chybou*, a číslo

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

nazýváme *relativní odchylkou* nebo *relativní chybou* měřené veličiny.
Říkáme, že číslo x má n *platných číslic*, není-li jeho absolutní chyba větší než polovina jednotky řádu určeného jeho n-tou číslicí.

[2] Zápis $x \in X$ vyjadřuje, že číslo x patří do (je prvkem) množiny X.

Metodou matematické indukce dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí následující rovnosti:

1. $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

4. $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

5. Nechť $a^{[n]}=a(a-h)\ldots[a-(n-1)h]$ a $a^{[0]}=1$.

Dokažte, že $(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{[n-m]}b^{[m]}$, kde $\binom{n}{m}$ je počet m-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Z této rovnosti pak odvoďte *binomickou větu*.

6. Dokažte *Bernoulliovu nerovnost*

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

kde $x_1,x_2,\ldots,x_n$ jsou buď všechna nezáporná, nebo všechna nekladná čísla větší než -1.

7. Dokažte, že pro $x>-1$ platí nerovnost

$$(1+x)^n\geq 1+nx \quad (n>1),$$

přičemž rovnost nastává, právě když $x=0$.

8. Dokažte platnost nerovnosti

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \text{ kde } n>1.$$

NÁVOD: Použijte následující nerovnost

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2, \quad (n=1,2,\ldots).$$

9. Dokažte platnost nerovnosti

$$2!\cdot 4!\ldots(2n)!>[(n+1)!]^n, \text{ kde } n>1.$$

10. Dokažte platnost nerovnosti

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1 Dokažte platnost následujících nerovností:

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $(n\geq 2)$;

b) $n^{n+1}>(n+1)^n$ $(n\geq 3)$;

c) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\sin x_k$ $(0\leq x_k\leq\pi;\ k=1,2,\ldots,n)$;

d) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$.

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULTY
Matematické oddělení
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

11. Nechť c je kladné číslo, které není čtvercem celého čísla, a nechť A/B je číselný řez, který definuje reálné číslo $\sqrt{c}$, kde skupina B obsahuje všechna kladná racionální čísla b taková, že $b^2 > c$, a kde množina A obsahuje všechna ostatní racionální čísla. Dokažte, že dolní skupina řezu A neobsahuje největší číslo a že horní skupina řezu B neobsahuje nejmenší číslo.

12. Sestrojme číselný řez A/B, který definuje číslo $\sqrt[3]{2}$, následujícím způsobem: Nechť skupina A obsahuje všechna racionální čísla a, pro která platí $a^3 < 2$, a skupina B obsahuje všechna ostatní racionální čísla. Dokažte, že dolní skupina A neobsahuje největší číslo a že jeho horní skupina B neobsahuje nejmenší číslo.

13. Pomocí konstrukce vhodných číselných řezů dokažte platnost následujících rovností:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$; b) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

14. Sestrojte číselný řez, který definuje číslo $2^{\sqrt{2}}$.

15. Dokažte, že každá neprázdná a zdola omezená číselná množina má infimum a že každá neprázdná a shora omezená číselná množina má supremum.

16. Dokažte, že množina všech zlomků m/n, kde m a n jsou přirozená čísla splňující $0 < m < n$, nemá nejmenší ani největší prvek. Určete infimum a supremum této množiny.

17. Určete infimum a supremum množiny racionálních čísel r, která splňují nerovnost $r^2 < 2$.

18. Nechť $\{-x\}$ je množina všech čísel opačných k číslům $x \in \{x\}$.

Dokažte platnost následujících rovností:

a) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; b) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. Nechť $\{x+y\}$ je množina všech součtů $x+y$, kde $x \in \{x\}$ a $y \in \{y\}$.

Dokažte platnost následujících rovností:

a) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$; b) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

20. Nechť $\{xy\}$ je množina všech součinů xy, kde $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$, $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

Dokažte platnost následujících rovností:

a) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$; b) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

21. Dokažte platnost následujících nerovností:

a) $|x-y| \geq ||x| - |y||$; b) $|x+x_1+\ldots+x_n| \geq |x| - (|x_1| + \ldots + |x_n|)$.

Řešte následující nerovnosti:

22. $|x+1| < 0{,}01$. **23.** $|x-2| \geq 10$.

24. $|x| > |x+1|$. **25.** $|2x-1| < |x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2| \leq 12$.

27. $|x+2|-|x|>1$.

28. $||x+1|-|x-1|| < 1$.

29. $|x(1-x)| < 0{,}05$.

30. Dokažte identitu

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

31. Při měření délky 10 cm byla zaznamenána absolutní chyba velikosti 0,05 mm a při měření vzdálenosti 500 km byla absolutní chyba rovna 200 m. Které z uvedených měření bylo přesnější.

32. Určete kolik platných číslic má číslo $x = 2{,}3752$, je-li jeho relativní chyba 1%.

33. Číslo $x = 12{,}125$ má 3 platné číslice. Určete jeho relativní chybu.

34. Byly změřeny délky stran obdélníka:

$$x = 2{,}50\,\text{cm} \pm 0{,}01\,\text{cm},\ y = 4{,}00\,\text{cm} \pm 0{,}02\,\text{cm}.$$

V jakém rozmezí se může pohybovat obsah S tohoto obdélníka? Jak velká je absolutní chyba Δ a relativní chyba δ určení jeho obsahu, jestliže za délky stran obdélníka vezmeme střední hodnoty z jejich měření?

35. Měřením jsme zjistili hmotnost tělesa $m = 12{,}59\,\text{g} \pm 0{,}01\,\text{g}$ a jeho objem $v = 3{,}2\,\text{cm}^3 \pm 0{,}2\,\text{cm}^3$. Určete hustotu tělesa a její absolutní a relativní chybu, jestliže za jeho hmotnost a objem vezmeme střední hodnoty.

36. Poloměr kruhu z výsledků měření je $r = 7{,}2\,\text{m} \pm 0{,}1\,\text{m}$. S jakou minimální relativní chybou lze určit obsah kruhu, jestliže $\pi = 3{,}14$?

37. Měřením jsme zjistili následující rozměry kvádru:

$$x = 24{,}7\,\text{m} \pm 0{,}2\,\text{m},\ y = 6{,}5\,\text{m} \pm 0{,}1\,\text{m},\ z = 1{,}2\,\text{m} \pm 0{,}1\,\text{m}.$$

V jakém rozmezí leží objem V tohoto kvádru? S jakou absolutní a relativní chybou lze určit jeho objem, jestliže za jeho rozměry vezmeme střední hodnoty z měření?

38. S jakou absolutní chybou musíme změřit délku strany čtverce x, kde $2\,\text{m} < x < 3\,\text{m}$, abychom mohli určit jeho obsah s přesností na $0{,}001\,\text{m}^2$?

39. S jakými absolutními chybami Δ stačí změřit délky stran obdélníka x a y, aby bylo možné určit jeho obsah s přesností na $0{,}01\,\text{m}^2$, když délka žádné z jeho stran nepřevyšuje odhadem 10 m?

40. Nechť $\delta(x)$ a $\delta(y)$ jsou relativní chyby čísel x a y a nechť $\delta(xy)$ je relativní chyba čísla xy. Dokažte, že platí nerovnost $\delta(xy) \leq \delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\,\delta(y)$.

§ 2. Limita posloupnosti

1. **DEFINICE LIMITY POSLOUPNOSTI.** Říkáme, že posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, kterou značíme symbolem x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, má limitu a (nebo *konverguje* k číslu a), což zapisujeme symbolem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že platí

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ pro každé } n > N.$$

Posloupnost se nazývá *nekonečně malou*, je-li

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Posloupnost, která nemá (konečnou neboli vlastní) limitu, nazýváme *divergentní posloupností*.

2. **KRITÉRIA KONVERGENCE POSLOUPNOSTI.**
1) Nechť platí

$$y_n \le x_n \le z_n$$

a

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c.$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

2) Každá monotónní a omezená posloupnost má limitu.
3) Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence. Posloupnost x_n je konvergentní, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že platí

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

pro každé $n > N$ a $p > 0$.

3. **ZÁKLADNÍ VĚTY O LIMITÁCH POSLOUPNOSTÍ.** Předpokládejme, že existují limity

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ a } \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Pak platí následující tvrzení:
1) jestliže $x_n \le y_n$, pak $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$;
2) $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$;
3) $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$;
4) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, jestliže $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

4. **EULEROVO ČÍSLO e.** Posloupnost

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

konverguje k číslu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,281\,8284\ldots$$

5. **NEVLASTNÍ LIMITA DIVERGENTNÍ POSLOUPNOSTI.** Symbolický zápis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

označuje, že ke každému $E > 0$ existuje číslo $N = N(E)$ tak, že platí

$$|x_n| > E \text{ pro každé } n > N.$$

6. **HROMADNÝ BOD POSLOUPNOSTI.** Číslo ξ (nebo symbol ∞) nazýváme *hromadným bodem* (*hromadnou hodnotou*) posloupnosti x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, jestliže existuje její podposloupnost (posloupnost z ní vybraná)

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}, \ldots \quad (1 \le p_1 < p_2 < \ldots)$$

tak, že platí

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi.$$

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která má konečnou limitu, tj. každá omezená posloupnost má konečný hromadný bod (*Bolzanova-Weierstrassova věta*). V případě, že má tato posloupnost pouze jeden hromadný bod, je tento bod limitou posloupnosti.
Nejmenší (konečný nebo nevlastní) hromadný bod posloupnosti x_n označujeme symbolem

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

a nazýváme *limes inferior* posloupnosti. Analogicky, největší hromadný bod označujeme symbolem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

a nazýváme *limes superior* posloupnosti.
Rovnost

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

je nutnou a postačující podmínkou existence (vlastní nebo nevlastní) limity posloupnosti x_n.

41. Nechť

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pomocí definice limity posloupnosti dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Ukažte, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $N = N(\varepsilon)$ takové, že

$$|x_n - 1| < \varepsilon \text{ pro každé } n > N.$$

Zároveň doplňte chybějící hodnoty do následující tabulky:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N					

42. Pomocí definice limity posloupnosti dokažte, že posloupnost $x_n (n = 1, 2, \ldots)$ je nekonečně malá. Ukažte, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N = N(\varepsilon)$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro každé $n > N$, jestliže

a) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; b) $x_n = \dfrac{2n}{n^3 + 1}$; c) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; d) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$.

Pro každý z těchto případů doplňte chybějící hodnoty do tabulky:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
N				

43. Dokažte, že posloupnosti

a) $x_n = (-1)^n n$, b) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, c) $x_n = \log(\log n)$ $(n \geq 2)$

mají nevlastní limitu pro $n \to \infty$ (tj., že jsou *nekonečně velké*). Ukažte, že ke každému $E > 0$ existuje číslo $N = N(E)$ takové, že $|x_n| > E$ pro každé $n > N$.

Pro každý z těchto případů doplňte chybějící hodnoty do tabulky:

E	10	100	1 000	10 000	...
N					

44. Ukažte, že posloupnost $x_n = n^{(-1)^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ není omezená a přitom není nekonečně velká pro $n \to \infty$.

45. Pomocí kvantifikátorů a nerovností zapište následující tvrzení:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$; b) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$; c) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

Za předpokladu, že n probíhá množinu přirozených čísel, určete hodnoty následujících výrazů:

46. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{10\,000n}{n^2 + 1}$.

47. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

48. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n + 1}$.

49. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$ $(|a| < 1, |b| < 1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

Dokažte platnost následujících vztahů:

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ \ (a>1)$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0,\ |q|<1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ (a>0)$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0,\ (a>1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

67. Který z následujících výrazů je pro dostatečně velké hodnoty n větší:
a) $100n+200$, nebo $0{,}01n^2$; b) 2^n, nebo n^{1000}; c) 1000^n, nebo $n!$?

68. Dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

NÁVOD: Viz úloha 10.

69. Dokažte, že posloupnost

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ \ (n=1,2,\ldots)$$

je ostře rostoucí a omezená shora a že posloupnost

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ \ (n=1,2,\ldots)$$

je ostře klesající a omezená zdola. Odtud pak odvoďte, že tyto posloupnosti mají společnou limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

NÁVOD: Uvažujte výrazy $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ a použijte nerovnost z úlohy 7.

70. Dokažte, že platí

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}\quad(n=1,2,\ldots).$$

Ukažte, pro jaké hodnoty n se liší výraz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ od čísla e o méně než 0,001.

71. Nechť $p_n\,(n=1,2,\ldots)$ je libovolná posloupnost, která má nevlastní limitu $+\infty$, a nechť $q_n\,(n=1,2,\ldots)$ je libovolná posloupnost, která má nevlastní limitu $-\infty$ $(p_n,q_n\notin[-1,0])$. Dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

72. Použitím rovnosti $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Odtud odvoďte, že

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},\qquad(*)$$

kde $0<\theta_n<1$, a vypočtěte Eulerovo číslo e s chybou menší než 10^{-5}.

73. Dokažte, že Eulerovo číslo e je iracionální.

74. Dokažte nerovnosti

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Dokažte platnost nerovností:

a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, kde n je libovolné přirozené číslo;

b) $1+\alpha<e^{\alpha}$, kde α je reálné číslo různé od nuly.

76. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty}n(a^{1/n}-1)=\ln a\quad(a>0)$, kde $\ln a$ je logaritmus čísla a při základu $e=2{,}718\ldots$

Dokažte konvergenci následujících posloupností pomocí věty o konvergenci monotónní a omezené posloupnosti:

77. $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

kde p_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ jsou celá nezáporná čísla, která, počínaje číslem p_1, nejsou větší než 9.

78. $x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \ldots \frac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, ..., $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}$, ...

Pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria dokažte konvergenci následujících posloupností:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, kde $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ a $|q| < 1$.

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

NÁVOD: Použijte nerovnost

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

86. Posloupnost x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ má *omezenou variaci*, jestliže existuje číslo C takové, že platí

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Dokažte, že každá posloupnost s omezenou variací je konvergentní.
Najděte příklad konvergentní posloupnosti, která nemá omezenou variaci.

87. Popište, co znamená, že daná posloupnost nesplňuje Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence.

88. Pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria dokažte divergenci posloupnosti

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

89. Dokažte, že jestliže posloupnost x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ konverguje, konverguje i její libovolná podposloupnost x_{p_n} a má stejnou limitu:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

90. Dokažte, že monotónní posloupnost je konvergentní, konverguje-li některá její podposloupnost.

91. Dokažte, že jestliže $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak také

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

92. Jestliže $x_n \to a$, co je pak možné říci o hodnotě limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}?$$

93. Dokažte, že každá konvergentní číselná posloupnost je omezená.

94. Dokažte, že každá konvergentní číselná posloupnost nabývá svého suprema nebo svého infima nebo obou. Uveďte příklady posloupností všech tří typů.

95. Dokažte, že číselná posloupnost x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, která má nevlastní limitu $+\infty$, nutně nabývá svého infima.

Najděte největší člen posloupnosti x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, jestliže:

96. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$. **97.** $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}$. **98.** $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

Najděte nejmenší člen posloupnosti x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, jestliže:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$. **100.** $x_n = n + \frac{100}{n}$.

Pro posloupnost x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ najděte hodnoty $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, jestliže:

101. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. **101.1** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$.

102. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$. **103.** $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

105. $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

106. $x_n = (-1)^n n$.

107. $x_n = -n[2 + (-1)^n]$.

108. $x_n = n^{(-1)^n}$.

109. $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$.

110. $x_n = \frac{1}{n - 10{,}2}$.

Vypočtěte $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, jestliže:

111. $x_n = \frac{n^2}{1+n} \cos \frac{2n\pi}{2}$.

112. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$.

113. $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$.

114. $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n \cdot (-1)^n}}$.

115. $x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}$.

Najděte hromadné body následujících posloupností:

116. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots$

117. $1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$

118. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$

119. $x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$.

120. $x_n = \frac{1}{2}[(a+b) + (-1)^n (a-b)]$.

121. Najděte příklad číselné posloupnosti, která má dané hodnoty $a_1, a_2, \ldots, a_p$ jako své hromadné body.

122. Najděte příklad číselné posloupnosti, pro kterou jsou všechny členy dané číselné posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jejími hromadnými body. Jaké další hromadné body má takto sestrojená posloupnost?

123. Najděte příklad posloupnosti, která:
a) nemá žádné konečné hromadné body;
b) má jediný hromadný bod, ale není konvergentní;
c) má nekonečně mnoho hromadných bodů;
d) má jako své hromadné body všechna reálná čísla.

124. Dokažte, že posloupnosti x_n a $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mají stejnou množinu hromadných bodů.

125. Dokažte, že z omezené posloupnosti x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je možné vždy vybrat konvergentní podposloupnost x_{p_n} $(n = 1, 2, \ldots)$.

126. Dokažte, že jestliže posloupnost x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ není omezená, pak existuje vybraná podposloupnost x_{p_n} taková, že $\lim_{n \to \infty} x_{p_n} = \infty$.

127. Nechť posloupnost x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je konvergentní a posloupnost y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je divergentní. Co je možné říci o konvergenci posloupností

a) $x_n + y_n$; b) $x_n y_n$? Najděte odpovídající příklady.

128. Nechť jsou posloupnosti x_n a y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ divergentní. Je možné říci, že jsou posloupnosti a) $x_n + y_n$; b) $x_n y_n$ také divergentní? Najděte odpovídající příklady.

129. Nechť $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ a y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je libovolná posloupnost. Můžeme pak tvrdit, že $\lim_{n \to \infty} x_n y_n = 0$? Najděte odpovídající příklady.

130. Nechť $\lim_{n \to \infty} x_n y_n = 0$. Vyplývá odtud, že $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ nebo $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$? Uvažujte příklad posloupností

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

131. Dokažte, že platí nerovnosti

a) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \to \infty} y_n \le \underline{\lim}_{n \to \infty} (x_n + y_n) \le \underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$

a

b) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n \le \overline{\lim}_{n \to \infty} (x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$.

Najděte příklady, kdy v těchto vztazích platí ostré nerovnosti.

132. Nechť $x_n \geq 0$ a $y_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dokažte, že platí nerovnosti

a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$

a

b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$.

Najděte příklady, kdy v těchto vztazích platí ostré nerovnosti.

133. Dokažte, že jestliže $\lim_{n\to\infty} x_n$ existuje, pak pro libovolnou posloupnost y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ platí následující vztahy:

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$

a

b) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$ $(x_n \geq 0)$.

134. Dokažte, že je-li posloupnost x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ taková, že pro libovolnou posloupnost y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je splněna alespoň jedna z následujících rovností:

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$

nebo

b) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$ $(x_n \geq 0)$,

pak je posloupnost x_n konvergentní.

135. Dokažte, že je-li $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

pak je posloupnost x_n konvergentní.

136. Dokažte, že je-li posloupnost x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ omezená a platí-li $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, pak její hromadné body jsou hustě rozložené mezi jejími limes inferior a limes superior:

$$l = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \text{ a } L = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n,$$

tj. libovolné číslo z intervalu $[l, L]$ je hromadným bodem dané posloupnosti.

137. Nechť číselná posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ splňuje podmínky

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Dokažte, že pak $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ existuje.

138. Dokažte, že je-li posloupnost x_n $(n=1,2,\ldots)$ konvergentní, je posloupnost jejích aritmetických průměrů

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\ (n=1,2,\ldots)$$

také konvergentní a platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Opačně to však neplatí: sestrojte protipříklad.

139. Dokažte, že je-li $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$, je také

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. Dokažte, že je-li posloupnost x_n $(n=1,2,\ldots)$ konvergentní a $x_n>0$, pak

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

141. Dokažte, že je-li $x_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$, je také splněna rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n},$$

přičemž předpokládáme, že limita na pravé straně rovnosti existuje.

142. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

143. Dokažte Stolzovu větu: Nechť jsou splněny následující tři podmínky:

a) $y_{n+1}>y_n$ $(n=1,2,\ldots)$; b) $\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$; c) existuje $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Pak $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

144. Vypočtěte:

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$; b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n}$.

145. Dokažte, že je-li p přirozené číslo, platí

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1} \right) = \dfrac{1}{2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$.

146. Dokažte, že posloupnost

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

je konvergentní. Platí tedy následující vztah

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

kde $C = 0{,}577216\ldots$, což je takzvaná *Eulerova konstanta*, a $\varepsilon_n \to 0$ pro $n \to \infty$.

147. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \right)$.

148. Posloupnost čísel x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je určena následujícími vztahy:

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

149. Nechť x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je posloupnost čísel definovaná rekurentním vztahem:

$$x_0 > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

150. Dokažte, že posloupnosti x_n a y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ definované následujícími vztahy:

$$x_1 = a,\ y_1 = b,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

mají společnou limitu

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(*aritmeticko-geometrický průměr* čísel a a b).

§ 3. Pojem funkce

1. **POJEM FUNKCE.** Proměnná y se nazývá *jednoznačnou funkcí* f proměnné x na dané množině $X=\{x\}$, jestliže každé hodnotě $x\in X$ odpovídá právě jeden prvek $y=f(x)$ z nějaké množiny $Y=\{y\}$.
Množina X se nazývá *definiční obor* funkce $f(x)$; Y se nazývá *obor hodnot* této funkce.
V nejjednodušších případech je množinou X *otevřený interval* (a,b): $a<x<b$ nebo intervaly $(a,b]$: $a<x\le b$, $[a,b)$: $a\le x<b$ nebo *uzavřený interval* $[a,b]$: $a\le x\le b$, kde a a b jsou reálná čísla nebo nevlastní symboly $-\infty$ a $+\infty$ (v těchto posledních případech se rovnost neuvažuje). Odpovídá-li každé hodnotě x z X jedna nebo více hodnot $y=f(x)$, pak se y nazývá *mnohoznačnou funkcí* proměnné x.

2. **INVERZNÍ FUNKCE.** Buď Y obor hodnot funkce $f(x)$. Rovnost
$$f(x)=y,$$
kde $y\in Y$, definuje na množině Y mnohoznačnou funkci
$$x=f^{-1}(y)=\{x:\ f(x)=y\},$$
která se nazývá *inverzní* funkcí k funkci $f(x)$. Je-li funkce $y=f(x)$ ryze monotónní, tj. platí-li $f(x_2)>f(x_1)$ (nebo $f(x_2)<f(x_1)$) pro $x_2>x_1$, pak je inverzní funkce $x=f^{-1}(y)$ jednoznačná a ryze monotónní.

Určete definiční obory následujících funkcí:

151. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$. **152.** $y=\sqrt{3x-x^3}$. **153.** $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

154. a) $y=\log(x^2-4)$; b) $y=\log(x+2)+\log(x-2)$.

155. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$. **156.** $y=\sqrt{\cos x^2}$. **157.** $y=\log\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

158. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$. **159.** $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

160. $y=\arccos(2\sin x)$. **161.** $y=\log[\cos(\log x)]$.

162. $y=(x+|x|)\sqrt{x\sin^2\pi x}$. **163.** $y=\operatorname{cotg}\pi x+\arccos(2^x)$.

164. $y=\arcsin(1-x)+\log(\log x)$. **165.** $y=(2x)!$

165.1 $y=\log_2\log_3\log_4 x$. **165.2** $y=\sqrt[4]{\log\operatorname{tg}x}$.

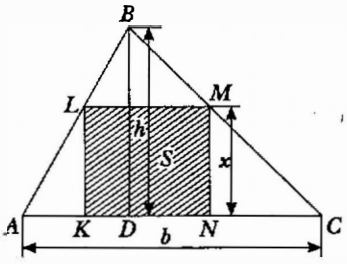
165.3 $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$ $(0\le x\le 2\pi)$.

Určete definiční obory a obory hodnot následujících funkcí:

166. $y=\sqrt{2+x-x^2}$. **167.** $y=\log(1-2\cos x)$. **168.** $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

169. $y=\arcsin\left(\log\dfrac{x}{10}\right)$. **170.** $y=(-1)^x$.

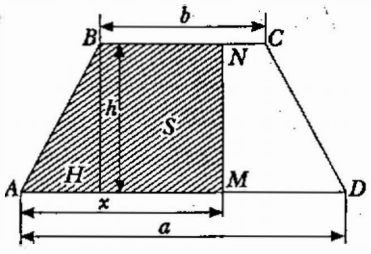
171. Do trojúhelníku ABC (viz obr. 1), který má základnu AC o délce b a výšku BD o délce h, je vepsán obdélník $KLMN$, jehož výška NM je x. Vyjádřete obvod P obdélníka $KLMN$ i jeho obsah S jako funkci x. Sestrojte grafy funkcí $P = P(x)$ a $S = S(x)$.



Obr. 1

172. V trojúhelníku ABC je délka strany AB 6 cm, délka strany AC 8 cm a úhel $\sphericalangle BAC = x$. Vyjádřete délku a strany BC a obsah S trojúhelníka ABC jako funkce proměnné x. Sestrojte grafy funkcí $a = a(x)$ a $S = S(x)$.

173. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ (viz obr. 2), jehož základny AD a BC mají délky a a b $(a > b)$ a výška HB má délku h, je sestrojena přímka MN rovnoběžná HB, která má vzdálenost AM od vrcholu A rovnu x. Vyjádřete obsah S obrazce $ABNM$ jako funkci proměnné x. Sestrojte graf funkce $S = S(x)$.



Obr. 2

174. Na uzavřeném intervalu $[0, 1]$ osy x je rovnoměrně rozložena hmotnost 2 g a v bodech této osy $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$ jsou soustředěny hmotnosti o velikosti 1 g. Najděte analytický zápis funkce $m = m(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, která vyjadřuje celkovou hmotnost, která se nachází v intervalu $(-\infty, x)$, a sestrojte graf této funkce.

175. Funkce $y = \operatorname{sgn} x$ je dána následujícím předpisem:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Sestrojte graf této funkce. Ukažte, že platí $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

176. Funkce $y=[x]$ (*celá část* čísla x) je určena následujícím způsobem: je-li $x=n+r$, kde n je celé číslo a $0\le r<1$, pak $[x]=n$. Sestrojte graf této funkce.

177. Nechť funkce

$$y=\pi(x)\quad (x\ge 0)$$

označuje počet prvočísel, která nejsou větší než číslo x. Sestrojte graf této funkce pro hodnoty argumentu $0\le x\le 20$.

Na jakou množinu E_y zobrazuje množinu E_x funkce $y=f(x)$, jestliže:

178. $y=x^2$, $E_x=\{-1\le x\le 2\}$.

179. $y=\log x$, $E_x=\{10<x<1000\}$.

180. $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$, $E_x=\{-\infty<x<+\infty\}$.

181. $y=\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{4}$, $E_x=\{0<|x|\le 1\}$.

182. $y=|x|$, $E_x=\{1\le|x|\le 2\}$.

Proměnná x probíhá interval $0<x<1$. Jakou množinu probíhá proměnná y, je-li:

183. $y=a+(b-a)x$.

184. $y=\frac{1}{1-x}$.

185. $y=\frac{x}{2x-1}$.

186. $y=\sqrt{x-x^2}$.

187. $y=\operatorname{cotg}\pi x$.

188. $y=x+[2x]$.

189. Vypočtěte hodnoty $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$, je-li $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$.

190. Vypočtěte hodnoty $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, je-li $f(x)=\log(x^2)$.

191. Vypočtěte hodnoty $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$, $f(0{,}999)$, $f(1)$, je-li $f(x)=1+[x]$.

192. Vypočtěte hodnoty $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, je-li

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{pro } -\infty<x\le 0,\\ 2^x & \text{pro } 0<x<+\infty.\end{cases}$$

193. Vypočtěte hodnoty $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, je-li

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

194. Najděte hodnoty x, pro které 1) $f(x)=0$; 2) $f(x)>0$; 3) $f(x)<0$, je-li:

a) $f(x)=x-x^3$; b) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$; c) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

195. Vypočtěte $\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, je-li:

a) $f(x)=ax+b$; b) $f(x)=x^2$; c) $f(x)=a^x$.

196. Nechť $f(x)=ax^2+bx+c$. Ukažte, že platí rovnost

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0.$$

197. Najděte koeficienty lineární funkce $f(x)=ax+b$ tak, aby platilo $f(0)=-2$, $f(3)=5$ (*lineární interpolace*).
Čemu se rovnají hodnoty $f(1)$ a $f(2)$?

198. Najděte koeficienty polynomu druhého stupně $f(x)=ax^2+bx+c$ tak, aby platilo $f(-2)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=5$ (*kvadratická interpolace*). Čemu se rovnají hodnoty $f(-1)$ a $f(0{,}5)$?

199. Najděte koeficienty polynomu třetího stupně $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tak, aby platilo $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=5$.

200. Najděte funkci tvaru $f(x)=a+bc^x$ tak, aby platilo $f(0)=15$, $f(2)=30$, $f(4)=90$.

201. Dokažte, že jestliže pro lineární funkci

$$f(x)=ax+b$$

tvoří hodnoty jejího argumentu $x=x_n$ $(n=1,2,\ldots)$ aritmetickou posloupnost, pak odpovídající funkční hodnoty $y_n=f(x_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ tvoří také aritmetickou posloupnost.

202. Dokažte, že jestliže pro exponenciální funkci

$$f(x)=a^x \quad (a>0)$$

tvoří hodnoty jejího argumentu $x=x_n$ $(n=1,2,\ldots)$ aritmetickou posloupnost, pak odpovídající funkční hodnoty $y_n=f(x_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ tvoří geometrickou posloupnost.

203. Nechť je funkce $f(u)$ definována pro $0<u<1$. Najděte definiční obory následujících funkcí:

a) $f(\sin x)$; b) $f(\ln x)$; c) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

204. Nechť $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ $(a>0)$. Ukažte, že platí

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

205. Nechť $f(x)+f(y)=f(z)$. Určete z, je-li

a) $f(x)=ax$; b) $f(x)=\frac{1}{x}$; c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $(|x|<1)$; d) $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$.

Vypočtěte hodnoty $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ a $\psi[\varphi(x)]$, je-li:

206. $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=2^x$.

207. $\varphi(x)=\operatorname{sgn} x$, $\psi(x)=\frac{1}{x}$.

208. $\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\le 0,\\ x & \text{pro } x>0\end{cases}$, $\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\le 0,\\ -x^2 & \text{pro } x>0.\end{cases}$

209. Vypočtěte hodnoty $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$, je-li

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

210. Nechť $f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n}$. Vypočtěte $f_n(x)$, je-li

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

211. Vypočtěte $f(x)$, je-li $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

212. Vypočtěte $f(x)$, je-li $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $(|x| \geq 2)$.

213. Vypočtěte $f(x)$, je-li $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ $(x > 0)$.

213.1 Vypočtěte $f(x)$, je-li $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$.

Dokažte, že následující funkce jsou na daných intervalech ostře rostoucí:

214. $f(x) = x^2$ $(0 \leq x < +\infty)$.

215. $f(x) = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x) = 2x + \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Dokažte, že následující funkce jsou na daných intervalech ostře klesající:

218. $f(x) = x^2$ $(-\infty < x \leq 0)$.

219. $f(x) = \cos x$ $(0 \leq x \leq \pi)$.

220. $f(x) = \operatorname{cotg} x$ $(0 < x < \pi)$.

221. Vyšetřete, na kterých intervalech jsou následující funkce monotónní:

a) $f(x) = ax + b$; b) $f(x) = ax^2 + bx + c$; c) $f(x) = x^3$;

d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; e) $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.

222. Můžeme zlogaritmovat nerovnost?

223. Nechť $\varphi(x)$, $\psi(x)$ a $f(x)$ jsou monotónně rostoucí funkce. Dokažte, že jestliže

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

pak jsou splněny nerovnosti

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)].$$

Určete inverzní funkci $x = \varphi(y)$ a její definiční obor, je-li:

224. $y = 2x + 3$ $(-\infty < x < +\infty)$.

225. $y = x^2$; a) $-\infty < x \leq 0$; b) $0 \leq x < +\infty$.

226. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ $(x\neq -1)$.

227. $y=\sqrt{1-x^2}$; a) $-1\leq x\leq 0$; b) $0\leq x\leq 1$.

228. $y=\sinh x$, kde $\sinh x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ $(-\infty<x<+\infty)$.

229. $y=\operatorname{tgh} x$, kde $\operatorname{tgh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

230.

$$y=\begin{cases} x & \text{pro } -\infty<x<1,\\ x^2 & \text{pro } 1\leq x\leq 4,\\ 2^x & \text{pro } 4<x<+\infty. \end{cases}$$

231. Funkce $f(x)$, která je definována v symetrickém intervalu $(-l,l)$ se nazývá *sudou*, jestliže platí

$$f(-x)\equiv f(x);$$

a *lichou*, jestliže platí

$$f(-x)\equiv -f(x).$$

Určete, které z daných funkcí $f(x)$ jsou sudé a které liché:

a) $f(x)=3x-x^3$; b) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$; c) $f(x)=a^x+a^{-x}$ $(a>0)$;

d) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; e) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

232. Dokažte, že libovolnou funkci $f(x)$, která je definována v symetrickém intervalu $(-l,l)$, je možné zapsat ve tvaru součtu funkce liché a funkce sudé.

233. Funkce $f(x)$, která je definována na množině E, se nazývá periodickou, jestliže existuje číslo $T>0$ (perioda funkce v širokém smyslu slova!) takové, že platí

$$f(x\pm T)\equiv f(x) \text{ pro } x\in E.$$

Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou periodické, a v kladném případě určete jejich nejmenší periodu, je-li:

a) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$; b) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$;

c) $f(x)=2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; d) $f(x)=\sin^2 x$; e) $f(x)=\sin x^2$;

f) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$; g) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$; h) $f(x)=\sin x+\sin\left(x\sqrt{2}\right)$.

234. Dokažte, že periodou Dirichletovy funkce

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální,} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální,} \end{cases}$$

je libovolné racionální číslo.

235. Dokažte, že součet i součin dvou periodických funkcí, které mají společný definiční obor a jejichž periody jsou souměřitelné (jejich poměr je racionální číslo), jsou také periodické funkce.

235.1 Funkce $f(x)$ se nazývá *antiperiodická*, jestliže platí

$$f(x+T) \equiv -f(x) \quad (T>0).$$

Dokažte, že $f(x)$ je periodická s periodou $2T$.

236. Dokažte, že splňuje-li funkce $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ rovnost $f(x+T) = kf(x)$, kde k a T jsou kladné konstanty, pak $f(x) = a^x \varphi(x)$, kde a je konstanta a $\varphi(x)$ je periodická funkce s periodou T.

§ 4. Grafické znázornění funkce

1. Při konstrukci grafu funkce $y = f(x)$ postupujeme následujícím způsobem: 1) určíme definiční obor X funkce $f(x)$; 2) zvolíme dostatečně hustou síť hodnot argumentu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z množiny X a sestavíme tabulku odpovídajících funkčních hodnot

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

3) přeneseme systém bodů (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ do roviny určené souřadnicemi x a y a spojíme je křivkou, jejíž charakter vyjadřuje polohu mezilehlých bodů.

2. Abychom získali výstižný graf funkce, musíme nejprve vyšetřit základní vlastnosti této funkce. Nejprve je třeba učinit následující: 1) řešením rovnice $f(x) = 0$ určit body, v nichž graf funkce protíná osu x (*nulové body funkce*); 2) zjistit oblasti definičního oboru, kde je funkce kladná nebo záporná; 3) je-li to možné, zjistit *intervaly monotónnosti* funkce (růstu nebo klesání funkce); 4) vyšetřit chování funkce při přibližování jejího argumentu k hraničním bodům definičního oboru funkce.

V tomto paragrafu předpokládáme, že čtenář zná základní vlastnosti nejjednodušších elementárních funkcí, jako jsou funkce mocninná, exponenciální nebo funkce trigonometrické.

S využitím těchto vlastností je možné bez velké výpočetní námahy ihned kreslit náčrtky grafů mnoha funkcí. Další grafy je možné sestrojit jako kombinaci (součet nebo součin) těchto nejjednodušších grafů.

237. Sestrojte graf lineární homogenní funkce

$$y = ax$$

pro $a = 0;\ 1/2;\ 1;\ 2;\ -1$.

238. Sestrojte graf lineární funkce

$$y = x + b$$

pro $b = 0;\ 1;\ 2;\ -1$.

239. Sestrojte grafy lineárních funkcí:

a) $y = 2x + 3$; b) $y = 2 - 0{,}1x$; c) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

240. Teplotní součinitel délkové roztažnosti železa je $a = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$. Sestrojte v odpovídajícím měřítku graf funkce

$$l = f(T) \quad (-40°\text{C} \le T \le 100°\text{C}),$$

kde T je teplota ve stupních a l je délka železné tyče při teplotě T, je-li $l = 100\,\text{cm}$ při $T = 0°\text{C}$.

241. Na číselné ose se pohybují dva hmotné body. První bod se nacházel v čase $t = 0$ 20m vlevo od počátku souřadnic a pohyboval se rychlostí $v_1 = 10\,\text{m/s}$; druhý bod se v čase $t = 0$ nacházel 30m vpravo od počátku souřadnic a měl rychlost $v_2 = -20\,\text{m/s}$. Sestrojte grafy funkcí pohybu těchto bodů a vypočtěte čas a místo jejich setkání.

242. Sestrojte grafy polynomu druhého stupně (*paraboly*):

a) $y = ax^2$ pro $a = 1,\ 1/2,\ 2,\ -1$;

b) $y = (x - x_0)^2$ pro $x_0 = 0,\ 1,\ 2,\ -1$;

c) $y = x^2 + c$ pro $c = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

243. Sestrojte graf *kvadratického trojčlenu*

$$y = ax^2 + bx + c$$

pomocí převodu na tvar

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2.$$

Vyšetřete následující případy:

a) $y = 8x - 2x^2$; b) $y = x^2 - 3x + 2$; c) $y = -x^2 + 2x - 1$; d) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

244. Hmotný bod je vržen pod úhlem $\alpha = 45°$ vzhledem k horizontální rovině s počáteční rychlostí $v_0 = 600\,\text{m/s}$. Sestrojte graf trajektorie jeho pohybu a najděte největší výšku, kterou dosáhne, a vzdálenost jeho dopadu (počítejte s přibližnou velikostí gravitační konstanty $g \approx 10\,\text{m/s}^2$ a zanedbejte odpor vzduchu).

Sestrojte grafy polynomiálních funkcí stupně vyššího než dva:

245. $y = x^3 + 1$.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

247. $y = x^2 - x^4$.

248. $y = x(a - x)^2(a + x)^3 \ (a > 0)$.

Sestrojte grafy lineárních lomených funkcí (*hyperboly*):

249. $y = \frac{1}{x}$.

250. $y = \frac{1 - x}{1 + x}$.

251. Převeďte lineární lomenou funkci

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0),$$

na tvar

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}$$

a sestrojte její graf. Vyšetřete případ $y = \frac{3x+2}{2x-3}$.

252. Plyn při tlaku $p_0 = 1\,\text{Pa}$ zaujímá objem $V_0 = 12\,\text{m}^3$. Sestrojte graf změny objemu V plynu v závislosti na tlaku p, zůstane-li teplota plynu konstantní (*Boyleův-Mariottův zákon*).

Sestrojte grafy racionálních lomených funkcí:

253. $y = x + \frac{1}{x}$ (hyperbola).

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (Newtonův trojzubec).

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

256. $y = \frac{1}{1+x^2}$ (Agnesiina křivka).

257. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ (Newtonův had).

258. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

259. $y = \frac{x}{1-x^2}$.

260. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}$.

261. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}$.

262. $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

263. Převeďte funkci

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1} \quad (a_1 \neq 0),$$

na tvar

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}$$

a sestrojte její graf. Vyšetřete případ $y = \frac{x^2-4x+3}{x+1}$.

264. Sestrojte graf závislosti absolutní hodnoty přitažlivé síly F, působící na hmotný bod, který se nachází ve vzdálenosti x od středu přitažlivosti, je-li velikost přitažlivé síly $F = 10\,\text{N}$ ve vzdálenosti $x = 1\,\text{m}$ (*Newtonův gravitační zákon*).

265. Podle van der Waalsova zákona splňují objem V a tlak p reálného plynu vztah

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=c.$$

Sestrojte graf funkce $p=p(V)$, je-li $a=2$, $b=0{,}1$ a $c=10$.

Sestrojte grafy následujících funkcí s odmocninou:

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (parabola).

267. $y=\pm x\sqrt{x}$ (Neileova parabola).

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (elipsa).

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (hyperbola).

270. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

271. $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (kisoida).

273. $y=\pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. Sestrojte graf mocninné funkce $y=x^n$ pro: a) $n=1,\ 3,\ 5$; b) $n=2,\ 4,\ 6$.

275. Sestrojte graf mocninné funkce $y=x^n$ pro: a) $n=-1,\ -3$; b) $n=-2,\ -4$.

276. Sestrojte graf odmocniny $y=\sqrt[m]{x}$ pro: a) $m=2,\ 4$; b) $m=3,\ 5$.

277. Sestrojte graf odmocniny $y=\sqrt[m]{x^k}$, je-li:

a) $m=2$, $k=1$; b) $m=2$, $k=3$; c) $m=3$, $k=1$; d) $m=3$, $k=2$;

e) $m=3$, $k=4$; f) $m=4$, $k=2$; g) $m=4$, $k=3$.

278. Sestrojte graf exponenciální funkce $y=a^x$ pro: $a=1/2,\ 1,\ 2,\ e,\ 10$.

279. Sestrojte graf složené exponenciální funkce $y=e^{y_1}$, je-li:

a) $y_1=x^2$; b) $y_1=-x^2$; c) $y_1=\frac{1}{x}$; d) $y_1=\frac{1}{x^2}$; e) $y_1=-\frac{1}{x^2}$; f) $y_1=\frac{2x}{1-x^2}$.

280. Sestrojte graf logaritmické funkce $y=\log_a x$ pro $a=1/2,\ 2,\ e,\ 10$.

281. Sestrojte grafy funkcí: a) $y=\ln(-x)$; b) $y=-\ln x$.

282. Sestrojte graf složené logaritmické funkce $y=\ln y_1$, je-li:

a) $y_1=1+x^2$; b) $y_1=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$; c) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$; d) $y_1=\frac{1}{x^2}$;

e) $y_1=1+e^x$.

283. Sestrojte graf funkce $y=\log_x 2$.

284. Sestrojte graf funkce $y=A\sin x$ pro $A=1,\ 10,\ -2$.

285. Sestrojte graf funkce $y = \sin(x - x_0)$ pro $x_0 = 0,\ \pi/4,\ \pi/2,\ 3\pi/4,\ \pi$.

286. Sestrojte graf funkce $y = \sin nx$ pro $n = 1,\ 2,\ 3,\ 1/2,\ 1/3$.

287. Převeďte funkci

$$y = a\cos x + b\sin x,$$

na tvar

$$y = A\sin(x - x_0)$$

a sestrojte její graf. Vyšetřete případ $y = 6\cos x + 8\sin x$.

Sestrojte grafy trigonometrických funkcí:

288. $y = \cos x$. **289.** $y = \operatorname{tg} x$. **290.** $y = \operatorname{cotg} x$.

291. $y = \sec x$. **292.** $y = \operatorname{cosec} x$. **293.** $y = \sin^2 x$.

294. $y = \sin^3 x$. **295.** $y = \operatorname{cotg}^2 x$. **296.** $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

297. $y = \pm\sqrt{\cos x}$.

Sestrojte grafy funkcí:

298. $y = \sin x^2$. **299.** $y = \sin\dfrac{1}{x}$. **300.** $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$.

300.1 $y = \sin x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$. **301.** $y = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}$. **301.1** $y = \sec\dfrac{1}{x}$.

302. $y = x\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$. **303.** $y = \pm\sqrt{1 - x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}$. **304.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

305. $y = e^x \cos x$. **306.** $y = \pm 2^{-x}\sqrt{\sin \pi x}$. **307.** $y = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$.

308. $y = \ln(\cos x)$. **309.** $y = \cos(\ln x)$. **310.** $y = e^{1/\sin x}$.

Sestrojte grafy následujících cyklometrických funkcí:

311. $y = \arcsin x$. **312.** $y = \arccos x$. **313.** $y = \operatorname{arctg} x$.

314. $y = \operatorname{arccotg} x$. **315.** $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$. **316.** $y = \arccos\dfrac{1}{x}$.

317. $y = \operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$. **318.** $y = \arcsin(\sin x)$. **319.** $y = \arcsin(\cos x)$.

320. $y = \arccos(\cos x)$. **321.** $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. **322.** $y = \arcsin(2\sin x)$.

323. Sestrojte graf funkce $y = \arcsin y_1$, je-li

a) $y_1 = 1 - \dfrac{x}{2}$; b) $y_1 = \dfrac{2x}{1 + x^2}$; c) $y_1 = \dfrac{1 - x}{1 + x}$; d) $y_1 = e^x$.

324. Sestrojte graf funkce $y = \operatorname{arctg} y_1$, je-li:

a) $y_1 = x^2$; b) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; c) $y_1 = \ln x$; d) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

324.1 Sestrojte grafy následujících funkcí:

a) $y = x^3 - 3x + 2$; b) $y = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$; c) $y = \frac{x^2}{|x| - 1}$;

d) $y = \sqrt{x(1-x^2)}$; e) $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; f) $y = \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{1+x^2}$;

g) $y = \frac{1}{1 - 2^{x/(1-x)}}$; h) $y = \log(x^2 - 3x + 2)$; i) $y = \arcsin\left(\frac{3}{2} - \sin x\right)$;

j) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$; k) $y = \log_{\cos x} \sin x$; l) $y = (\sin x)^{\operatorname{cotg} x}$.

325. Za předpokladu, že znáte graf funkce $y = f(x)$, sestrojte grafy funkcí:
a) $y = -f(x)$; b) $y = f(-x)$; c) $y = -f(-x)$.

326. Za předpokladu, že znáte graf funkce $y = f(x)$, sestrojte grafy funkcí:
a) $y = f(x - x_0)$; b) $y = y_0 + f(x - x_0)$; c) $y = f(2x)$; d) $y = f(kx + b)$ $(k \neq 0)$.

326.1 Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pro } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$$

Sestrojte graf funkce

$$y = \frac{1}{2}[f(x-t) + f(x+t)]$$

pro $t = 0$, $t = 1$ a $t = 2$.

327. Sestrojte grafy následujících funkcí:
a) $y = 2 + \sqrt{1-x}$; b) $y = 1 - e^{-x}$; c) $y = \ln(1+x)$; d) $y = -\arcsin(1+x)$;
e) $y = 3 + 2\cos 3x$.

328. Za předpokladu, že znáte graf funkce $y = f(x)$, sestrojte grafy funkcí:
a) $y = |f(x)|$; b) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$; c) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

329. Za předpokladu, že znáte graf funkce $y = f(x)$, sestrojte grafy funkcí:
a) $y = f^2(x)$; b) $y = \sqrt{f(x)}$; c) $y = \ln f(x)$; d) $y = f(f(x))$; e) $y = \operatorname{sgn} f(x)$;
f) $y = [f(x)]$.

329.1 Nechť

$$f(x) = (x-a)(b-x) \quad (a < b).$$

Sestrojte grafy následujících funkcí:

a) $y = f(x)$; b) $y = f^2(x)$; c) $y = \frac{1}{f(x)}$; d) $y = \sqrt{f(x)}$; e) $y = e^{f(x)}$; f) $y = \log f(x)$;

g) $y = \operatorname{arccotg} f(x)$.

329.2 Sestrojte grafy následujících funkcí:

a) $y = \arcsin[\sin f(x)]$; b) $y = \arcsin[\cos f(x)]$; c) $y = \arccos[\sin f(x)]$;

d) $y = \arccos[\cos f(x)]$; e) $y = \operatorname{arccotg}[\operatorname{tg} f(x)]$,

je-li: 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^3$.

330. Za předpokladu, že znáte grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$, sestrojte grafy funkcí: a) $y = f(x) + g(x)$; b) $y = f(x)g(x)$; c) $y = f(g(x))$.

Pomocí pravidla o skládání grafů sestrojte grafy následujících funkcí:

331. $y = 1 + x + e^x$.

332. $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$.

333. $y = x + \sin x$.

334. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

335. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

336. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$.

337. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

338. $y = |1 - x| + |1 + x|$.

339. $y = |1 - x| - |1 + x|$.

340. Sestrojte grafy následujících hyperbolických funkcí:

a) $y = \cosh x$, kde $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;

b) $y = \sinh x$, kde $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

c) $y = \operatorname{tgh} x$, kde $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

Pomocí pravidla o násobení grafů sestrojte grafy následujících funkcí:

341. $y = x \sin x$.

342. $y = x \cos x$.

343. $y = x^2 \sin^2 x$.

344. $y = \frac{\sin x}{1 + x^2}$.

345. $y = e^{-x^2} \cos 2x$.

346. $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$.

347. $y = [x]\,|\sin \pi x|$.

348. $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$.

349. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pro } |x| \le 1, \\ 0 & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$$

Sestrojte graf funkce

$$y = f(x) f(a - x),$$

je-li: a) $a = 0$; b) $a = 1$; c) $a = 2$.

350. Sestrojte graf funkce

$$y = x + \sqrt{x}\ \operatorname{sgn}(\sin \pi x).$$

Sestrojte graf funkce $y = \dfrac{1}{f(x)}$, je-li:

351. $f(x) = x^2(1 - x^2)$.

352. $f(x) = x(1 - x)^2$.

353. $f(x) = \sin^2 x$.

354. $f(x) = \ln x$.

355. $f(x) = e^x \sin x$.

356. Sestrojte graf složené funkce $y = f(u)$, kde $u = 2 \sin x$, je-li:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -\infty < u < -1, \\ u & \text{pro } -1 \le u \le 1, \\ 1 & \text{pro } 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

357. Nechť

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ a } \psi(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \ge 0. \end{cases}$$

Sestrojte grafy následujících funkcí: a) $y = \varphi[\varphi(x)]$; b) $y = \varphi[\psi(x)]$; c) $y = \psi[\varphi(x)]$; d) $y = \psi[\psi(x)]$.

358. Nechť

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |x| \le 1, \\ 0 & \text{pro } |x| > 1, \end{cases}$$

a

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{pro } |x| \le 2, \\ 2 & \text{pro } |x| > 2. \end{cases}$$

Sestrojte grafy následujících funkcí: a) $y = \varphi[\varphi(x)]$; b) $y = \varphi[\psi(x)]$; c) $y = \psi[\varphi(x)]$; d) $y = \psi[\psi(x)]$.

359. Funkci $f(x)$, definovanou v kladné oblasti $x > 0$, prodlužte do záporné oblasti $x < 0$ tak, aby výsledná funkce byla 1) sudá 2) lichá, je-li: a) $f(x) = 1 - x$; b) $f(x) = 2x - x^2$; c) $f(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = \sin x$; e) $f(x) = e^x$; f) $f(x) = \ln x$. Sestrojte odpovídající grafy funkcí.

360. Určete svislé osy souměrnosti grafů následujících funkcí:

a) $y = ax^2 + bx + c$; b) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$; c) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ $(0 < a < b)$;

d) $y = a + b\cos x$.

361. Určete středy souměrnosti grafů následujících funkcí:

a) $y = ax + b$; b) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; d) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$;

e) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

362. Sestrojte grafy periodických funkcí:

a) $y = |\sin x|$; b) $y = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

c) $y = f(x)$, kde $f(x) = A\frac{x}{l}\left(2 - \frac{x}{l}\right)$, je-li $0 \le x \le 2l$, a $f(x+2l) \equiv f(x)$;

d) $y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$; e) $y = (x)$, kde (x) je vzdálenost čísla x k nejbližšímu celému číslu.

363. Dokažte, že je-li graf funkce $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ souměrný podle dvou svislých přímek $x = a$ a $x = b$ $(b > a)$, je funkce $f(x)$ periodická.

364. Dokažte, že je-li graf funkce $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ souměrný podle dvou bodů $A = (a, y_0)$ a $B = (b, y_1)$ $(b > a)$, je funkce $f(x)$ součtem lineární funkce a periodické funkce. Navíc platí, že je-li $y_0 = y_1$, je funkce $f(x)$ periodická.

365. Dokažte, že je-li graf funkce $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ souměrný podle bodu $A = (a, y_0)$ a přímky $x = b$ $(b \neq a)$, je funkce $f(x)$ periodická.

366. Sestrojte graf funkce $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, je-li $f(x+1) = 2f(x)$ a $f(x) = x(1-x)$ pro $0 \le x \le 1$.

367. Sestrojte graf funkce $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, je-li $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$ a $f(x) = 0$ pro $0 \le x \le \pi$.

368. Sestrojte graf funkce $y = y(x)$, je-li:

a) $x = y - y^3$; b) $x = \frac{1-y}{1+y^2}$; c) $x = y - \ln y$; d) $x^2 = \sin y$.

369. Sestrojte grafy funkcí $y = y(x)$ zadaných parametricky, je-li:

a) $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$; b) $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t^2}$; c) $x = 10\cos t$, $y = \sin t$ (elipsa);

d) $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ (hyperbola); e) $x = 5\cos^2 t$, $y = 3\sin^2 t$;

f) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (cykloida); g) $x = \sqrt[t+1]{t}$, $y = \sqrt[t]{t+1}$, $(t > 0)$.

370. Sestrojte grafy následujících implicitních funkcí:

a) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (elipsa); b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (Descartesův list);

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (parabola); d) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (astroida); e) $\sin x = \sin y$;

f) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$; g) $x^y = y^x$ $(x > 0, y > 0)$; h) $x - |x| = y - |y|$.

370.1 Sestrojte grafy následujících implicitních funkcí:

a) $\min(x, y) = 1$; b) $\max(x, y) = 1$; c) $\max(|x|, |y|) = 1$; d) $\min(x^2, y) = 1$.

371. Sestrojte grafy následujících funkcí $r = r(\varphi)$ zadaných v polárních souřadnicích (r, φ), je-li:

a) $r = \varphi$ (Archimedova spirála); b) $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$ (hyperbolická spirála);

c) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1}$ $(0 \le \varphi < +\infty)$; d) $r = 2^{\varphi/2\pi}$ (logaritmická spirála);

e) $r = 2(1 + \cos\varphi)$ (kardioida); f) $r = 10\sin 3\varphi$ (trojlístek);

g) $r^2 = 36\cos 2\varphi$ (Bernoulliho lemniskata); h) $\varphi = \dfrac{r}{r - 1}$ $(r > 1)$; i) $\varphi = 2\pi \sin r$.

371.1 Sestrojte v polárních souřadnicích r a φ grafy následujících funkcí:

a) $\varphi = 4r - r^2$; b) $\varphi = \dfrac{12r}{1 + r^2}$; c) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

371.2 Sestrojte v polárních souřadnicích r a φ grafy následujících funkcí zadaných parametricky ($t \ge 0$ je parametr):

a) $\varphi = t\cos^2 t$, $r = t\sin^2 t$; b) $\varphi = 1 - 2^{-t}\sin\dfrac{\pi t}{2}$, $r = 1 - 2^{-t}\cos\dfrac{\pi r}{2}$.

372. Řešte přibližně rovnici $x^3 - 3x + 1 = 0$ pomocí konstrukce grafu funkce $y = x^3 - 3x + 1$.

Řešte graficky následující rovnice:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$. **374.** $x^4 - 4x + 1 = 0$. **375.** $x = 2^{-x}$.

376. $\log x = 0{,}1x$. **377.** $10^x = x^2$. **378.** $\log x = x$ $(0 \le x \le 2\pi)$.

Řešte graficky následující soustavy rovnic:

379. $x + y^2 = 1$, $16x^2 + y = 4$. **380.** $x^2 + y^2 = 100$, $y = 10(x^2 - x - 2)$.

§ 5. Limita funkce

1. **OMEZENÁ FUNKCE.** Funkci $f(x)$ nazýváme *omezenou* na otevřeném intervalu (a,b), pokud existují taková čísla m a M, že platí

$$m \le f(x) \le M$$

pro každé $x \in (a,b)$.

Číslo $m_0 = \inf_{x\in(a,b)} \{f(x)\} = \max m$ nazýváme *infimem* funkce $f(x)$ a číslo $M_0 = \sup_{x\in(a,b)} \{f(x)\} = \min M$ nazýváme *supremem* funkce $f(x)$ na intervalu (a,b). Rozdíl $M_0 - m_0$ pak nazýváme *oscilací funkce* na intervalu (a,b).

2. **LIMITA FUNKCE V URČITÉM BODĚ.** Nechť $f(x)$ je funkce s definičním oborem $X = \{x\}$, který má hromadný bod a. Zápis

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad (1)$$

označuje, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že pro všechna x, pro která má $f(x)$ smysl a která splňují podmínku $0 < |x - a| < \delta$, platí nerovnost

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

K tomu, aby limita funkce (1) existovala, je nutné a stačí, aby pro každou posloupnost $x_n \to a$, $x_n \neq a$ $(x_n \in X;\ n = 1,2,\ldots)$, platila rovnost

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Platí:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 2) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

BOLZANOVO-CAUCHYOVO KRITÉRIUM EXISTENCE LIMITY. Funkce $f(x)$ má v bodě a konečnou limitu právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

pro každé dva body x', x'' z definičního oboru funkce $f(x)$, pro které $0 < |x' - a| < \delta$ a $0 < |x'' - a| < \delta$.

3. **JEDNOSTRANNÉ LIMITY FUNKCE.** Číslo A' nazýváme *limitou zleva* funkce $f(x)$ v bodě a a zapisujeme

$$A' = \lim_{x\nearrow a} f(x),$$

jestliže platí

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \text{ pro } 0 < a - x < \delta(\varepsilon).$$

Analogicky číslo A'' nazýváme *limitou zprava* funkce $f(x)$ v bodě a a zapisujeme

$$A'' = \lim_{x\searrow a} f(x),$$

jestliže

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \text{ pro } 0 < x - a < \delta(\varepsilon).$$

K tomu, aby existovala limita funkce $f(x)$ v bodě a, je nutné a stačí, aby platila rovnost $\lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x)$.

4. **NEVLASTNÍ LIMITA.** Zápis

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

označuje, že pro každé $E > 0$ platí nerovnost $|f(x)| > E$, je-li $0 < |x - a| < \delta(E)$.

5. **HROMADNÝ BOD FUNKCE.** Jestliže pro nějakou posloupnost $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$ platí

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = B,$$

nazýváme číslo B (nebo symbol ∞) (konečným nebo nevlastním) *hromadným bodem funkce* $f(x)$ v bodě a.

Nejmenší, resp. největší hromadný bod funkce označujeme

$$\underline{\lim_{x \to a}} f(x) \text{ a } \overline{\lim_{x \to a}} f(x)$$

a nazýváme *limes inferior*, resp. *limes superior* funkce $f(x)$ v bodě a.

Rovnost

$$\underline{\lim_{x \to a}} f(x) = \overline{\lim_{x \to a}} f(x)$$

je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala (konečná nebo nevlastní) limita funkce $f(x)$ v bodě a.

381. Ukažte, že funkce definovaná podmínkami

$$f(x) = n, \text{ je-li } x = \frac{m}{n},$$

kde m a n jsou celá nesoudělná čísla $(n > 0)$ a

$$f(x) = 0, \text{ je-li } x \text{ iracionální},$$

je konečná, ale není lokálně omezená v žádném bodě x (tj. není omezená v žádném okolí žádného bodu).

382. Funkce $f(x)$ je definovaná a lokálně omezená v každém bodě: a) otevřeného intervalu b) uzavřeného intervalu. Je tato funkce omezená na celém otevřeném nebo uzavřeném intervalu? Najděte odpovídající příklady.

383. Dokažte, že funkce $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$ je omezená na intervalu $-\infty < x < +\infty$.

384. Dokažte, že i když funkce $f(x) = \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}$ není omezená na žádném okolí bodu $x = 0$, není nekonečně velká pro $x \to 0$.

385. Vyšetřete, zda funkce

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

je omezená na intervalu $0 < x < \varepsilon$.

386. Ukažte, že funkce $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ má na intervalu $0 \leq x < +\infty$ infimum $m = 0$ a supremum $M = 1$.

387. Funkce $f(x)$ má definiční obor a je ostře rostoucí na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Čemu jsou rovny infimum a supremum funkce na tomto intervalu?

Najděte infima a suprema následujících funkcí:

388. $f(x)=x^2$ na $[-2, 5)$.

389. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ na $(-\infty,+\infty)$.

390. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ na $(0,+\infty)$.

391. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ na $(0,+\infty)$.

392. $f(x)=\sin x$ na $(0,+\infty)$.

393. $f(x)=\sin x+\cos x$ na $[0, 2\pi]$.

394. $f(x)=2^x$ na $(-1, 2)$.

395. $f(x)=[x]$: a) na $(0, 2)$; b) na $[0, 2]$.

396. $f(x)=x-[x]$ na $[0, 1]$.

397. Určete oscilaci funkce $f(x)=x^2$ na následujících intervalech:
a) $(1, 3)$; b) $(1{,}9, 2{,}1)$; c) $(1{,}99, 2{,}01)$; d) $(1{,}999, 2{,}001)$.

398. Určete oscilaci funkce $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ na následujících intervalech:
a) $(-1, 1)$; b) $(-0{,}1, 0{,}1)$; c) $(-0{,}01, 0{,}01)$; d) $(-0{,}001, 0{,}001)$.

399. Nechť $m[f]$ a $M[f]$ jsou infimum, resp. supremum funkce $f(x)$ na intervalu (a,b). Dokažte, že pro libovolnou dvojici funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ s definičním oborem (a,b) platí

$$m[f_1+f_2]\geq m[f_1]+m[f_2]$$

a

$$M[f_1+f_2]\leq M[f_1]+M[f_2].$$

Najděte příklady funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$, pro které platí: a) rovnost; b) ostrá nerovnost.

400. Nechť je funkce $f(x)$ s definičním oborem $[a,+\infty)$ omezená na každém uzavřeném intervalu $[a,b]\subset[a,+\infty)$. Definujme následující funkce:

$$m(x)=\inf_{a\leq\xi\leq x} f(\xi) \text{ a } M(x)=\sup_{a\leq\xi\leq x} f(\xi).$$

Sestrojte grafy funkcí $y=m(x)$ a $y=M(x)$, je-li:
a) $f(x)=\sin x$; b) $f(x)=\cos x$.

401. Pomocí definice limity funkce dokažte, že

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Zároveň doplňte chybějící hodnoty do následující tabulky:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

402. Pomocí definice limity funkce dokažte, že

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

Zároveň doplňte chybějící hodnoty do následující tabulky:

E	10	100	1000	10000	...
δ					

403. Pomocí kvantifikátorů a nerovností vyjádřete následující tvrzení:
a) $\lim_{x \to a} f(x) = b$; b) $\lim_{x \nearrow a} f(x) = b$; c) $\lim_{x \searrow a} f(x) = b$.
Najděte odpovídající příklady.

Pomocí kvantifikátorů a nerovností vyjádřete následující tvrzení a najděte odpovídající příklady:

404. a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$; b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$; c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$.

405. a) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$; b) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$; c) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$;
d) $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \infty$; e) $\lim_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$; f) $\lim_{x \nearrow a} f(x) = +\infty$;
g) $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty$; h) $\lim_{x \searrow a} f(x) = -\infty$; i) $\lim_{x \searrow a} f(x) = +\infty$.

406. a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$; c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$;
d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; f) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
g) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$; h) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

407. Nechť $y=f(x)$. Pomocí kvantifikátorů a nerovností vyjádřete následující symbolické zápisy:

a) $y \nearrow b$ pro $x \to a$; b) $y \nearrow b$ pro $x \nearrow a$; c) $y \nearrow b$ pro $x \searrow a$;
d) $y \searrow b$ pro $x \to a$; e) $y \searrow b$ pro $x \nearrow a$; f) $y \searrow b$ pro $x \searrow a$;
g) $y \nearrow b$ pro $x \to \infty$; h) $y \nearrow b$ pro $x \to -\infty$; i) $y \nearrow b$ pro $x \to +\infty$;
j) $y \searrow b$ pro $x \to \infty$; k) $y \searrow b$ pro $x \to -\infty$; l) $y \searrow b$ pro $x \to +\infty$.

Najděte odpovídající příklady.

408. Nechť

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

kde a_i $(i=0,1,\ldots,n; n\geq 1, a_0\neq 0)$ jsou reálná čísla.

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$.

409. Nechť $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, kde $a_0\neq 0$ a $b_0\neq 0$.

Dokažte, že

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty & \text{pro } n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{pro } n=m,\\ 0 & \text{pro } n<m.\end{cases}$$

410. Nechť $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy v x a nechť

$$P(a)=Q(a)=0.$$

Jakých hodnot může nabýt výraz

$$\lim_{x\to a}R(x)?$$

Najděte hodnoty následujících výrazů:

411. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m a n jsou přirozená čísla).

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

419. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

421. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

423. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

424.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m a n jsou přirozená čísla).

426. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n je přirozené číslo).

427. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n je přirozené číslo).

428. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m a n jsou přirozená čísla).

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\ldots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)^2+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)^2+\ldots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

NÁVOD: Viz úloha **2**.

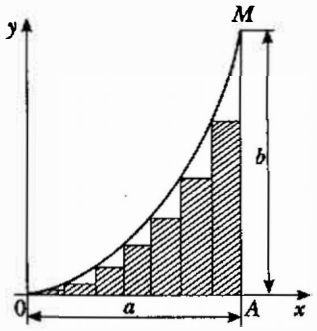
431. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$.

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

NÁVOD: Viz úloha **3**.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\ldots+(3n-2)]^2}$.

434. Vypočtěte obsah křivočarého trojúhelníka OAM (viz obr. 3), který je vymezen parabolou $y = b(x/a)^2$, osou x a přímkou $x = a$, tak, že jej budete považovat za limitu součtu obsahů obdélníků se stranou a/n pro $n \to \infty$.



Obr. 3

Najděte následující limity:

435. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a > 0)$.

440. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

443. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n je přirozené číslo).

445. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m a n jsou přirozená čísla).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m a n jsou přirozená čísla).

454. Nechť $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ a m je přirozené číslo.

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$.

Najděte následující limity:

455. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m a n jsou přirozená čísla).

455.1 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\ldots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$.

458. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

460. $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$.

461. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

463. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}]$.

464. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\ldots(x+a_n)}-x\right]$.

466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ (n je přirozené číslo).

467. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n je přirozené číslo).

468. Vyšetřete chování kořenů x_1 a x_2 kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, v níž se koeficient a blíží k nule a koeficienty b a c jsou konstantní, přičemž $b\neq 0$.

469. Určete konstanty a a b z podmínky

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

470. Určete konstanty a_i a b_i $(i=1,2)$ z podmínek

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0$$

a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0.$$

Najděte následující limity:

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

472. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m a n jsou přirozená čísla).

474. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

474.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

474.2 $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{cotg}3x$.

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

476. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

478. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

479. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

480. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

481. Dokažte následující rovnosti:

a) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; b) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$; c) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}a$

$\left(a\neq\dfrac{2n-1}{2}\pi;\ n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\right)$.

Najděte následující limity:

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

483. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}$.

485. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$.

487. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg}a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{cotg}(a+2x)-2\operatorname{cotg}(a+x)+\operatorname{cotg}a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

494. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\,\cos 2x\,\cos 3x}{1-\cos x}$.

495. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

496. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

498. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\operatorname{cotg}^3 x}{2-\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}^3 x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

503. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

506. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

507. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

508. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

510. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$.

511. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

512. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$.

514. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

516. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}$ $(a_1>0,\ a_2>0)$.

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}^2x}$.

518. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x}$.

519. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$.

519.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

521. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

523. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{cotg}x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

527. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$.

528. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

530. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$.

537. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

538. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

539. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

540.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(nx+\sqrt{1-n^2x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$.

541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

542. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

543. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

544. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\,2^x}{1+x\,3^x}\right)^{1/x^2}$.

545.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{cotg}^3 x}$.

545.2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

545.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi\,2^x)}{\ln[\cos(\pi\,2^x)]}$.

546. $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

547. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$.

549. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ $(a>0,b>0,c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x}$ $(a>0,b>0,c>0)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x}$ $(a>0,b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. Dokažte, že

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad (a>1,n>0).$$

565. Dokažte, že

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0 \quad (a>1,\varepsilon>0).$$

Najděte následující limity:

566. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

568. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

569. $\lim\limits_{x\searrow 0}\left[\ln(x\ln a)\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]$ $(a>1)$.

570. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

572. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

573. $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{x/(x+1)}-1)^{(x^2+1)/x}$.

574. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec(\pi x/2)}$.

575. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

576. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x-1}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tgh} x}{x}$ (viz úloha **340**).

576.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh^2 x}{\ln(\cosh 3x)}$ (viz úloha **340**).

577. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x}$.

577.1 a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sinh x-\sinh a}{x-a}$; b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cosh x-\cosh a}{x-a}$.

577.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cosh x}{\ln\cos x}$.

578. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\cosh x)$.

579. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tgh} x}$.

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cosh\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

581. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

582. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

583. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

584. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

585. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

589. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$

591. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-1/x^2}$.

592. $\lim\limits_{x\searrow 0}x\ln x$.

593. a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

594. a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$; b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$.

594.1 Vypočtěte $h=\lim_{x\to+\infty} f(x)-\lim_{x\to-\infty} f(x)$, je-li

$$f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}.$$

595. a) $\lim_{x\nearrow 1}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$; b) $\lim_{x\searrow 1}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$.

596. a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{1/x}}$; b) $\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

597. a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

598. Dokažte, že

a) $\frac{2x}{1+x}\searrow 2$ pro $x\to-\infty$; b) $\frac{2x}{1+x}\nearrow 2$ pro $x\to+\infty$.

599. Dokažte, že a) $2^x\nearrow 1$ pro $x\nearrow 0$; b) $2^x\searrow 1$ pro $x\searrow 0$.

600. Najděte $f(1)$, $\lim_{x\nearrow 1} f(x)$; $\lim_{x\searrow 1} f(x)$, je-li $f(x)=x+[x^2]$.

601. Najděte $f(n)$, $\lim_{x\nearrow n} f(x)$, $\lim_{x\searrow n} f(x)$ $(n=0,\pm 1,\ldots)$, je-li $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$.

Najděte následující limity:

602. $\lim_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$.

603. $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

604. $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

605. $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

606. $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n\text{-krát}}x$.

607. Nechť $\lim_{x\to a}\varphi(x)=A$ a $\lim_{x\to A}\psi(x)=B$. Vyplývá z toho, že

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B?$$

Uvažujte funkce $\varphi(x)=1/q$ pro $x=p/q$, kde p a q jsou vzájemně nesoudělná celá čísla, a $\varphi(x)=0$ pro x iracionální; $\psi(x)=1$ pro $x\neq 0$, $\psi(x)=0$ pro $x=0$; přičemž $x-0$.

608. Dokažte tvrzení Cauchyho věty: Je-li je funkce $f(x)$ s definičním oborem $(a,+\infty)$ omezená na každém omezeném otevřeném intervalu (a,b), pak

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geq C>0)$

za předpokladu, že limity na pravých stranách rovností existují.

609. Dokažte, že platí tvrzení: Jestliže a) funkce $f(x)$ má definiční obor $x>a$; b) funkce $f(x)$ je omezená na každém omezeném intervalu $a<x<b$ a c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$, pak

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty.$$

610. Dokažte, že platí tvrzení: Jestliže a) funkce $f(x)$ má definiční obor $x>a$; b) funkce $f(x)$ je omezená na každém omezeném intervalu $a<x<b$ a c) pro některé přirozené číslo n existuje vlastní nebo nevlastní limita

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

pak

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

611. Dokažte, že platí

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

612. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)=2\pi.$$

NÁVOD: Použijte vztah (*) z úlohy **72**.

Sestrojte grafy následujících funkcí:

613. a) $y=1-x^{100}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})$ $(-1\leq x\leq 1)$.

614. a) $y=\dfrac{x^{100}}{1+x^{100}}$ $(x\geq 0)$; b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x\geq 0)$.

615. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ $(x\neq 0)$.

616. $x=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$.

617. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\geq 0)$.

618. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\geq 0)$.

619. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$ $(x\geq 0)$.

620. a) $y=\sin^{1000}x$; b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$ $(x\geq 0)$.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$.

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

624. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

625. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x}$ $(x>0)$.

625.1 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+1}$ $(x\geq 0)$.

625.2 $y=\lim\limits_{n\to\infty}x\operatorname{sgn}\left|\sin^2(n!\pi x)\right|$.

625.3 Sestrojte křivku

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1.$$

626. *Asymptotou* křivky $y=f(x)$ nazýváme přímku $y=kx+b$, pro kterou

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

Použijte tuto rovnost a najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci asymptoty.

627. Najděte asymptoty a sestrojte grafy následujících křivek:

a) $y=\dfrac{x^3}{x^2+x-2}$;

b) $y=\sqrt{x^2+x}$;

c) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$;

d) $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$;

e) $y=\ln(1+e^x)$;

f) $y=x+\arccos\dfrac{1}{x}$.

Najděte následující limity:

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

629. $\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})]$, je-li $|x|<1$.

630. $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\dots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

631. Nechť $\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$, kde $\psi(x)>0$, a nechť $\alpha_{mn}\to 0$ $(m=1,2,\dots)$ pro $n\to\infty$, tj. $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ pro každé $m=1,2,\dots$ a $n>N(\varepsilon)$.

Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\dots+\varphi(\alpha_{nn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\dots+\psi(\alpha_{nn})] \qquad (1)$$

za předpokladu, že limita na pravé straně rovnosti (1) existuje.

Použijte předchozí tvrzení a najděte následující limity:

632. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

633. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

634. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a^{k/n^2}-1)$ $(a>0)$.

635. $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

636. $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

637. Členy číselné posloupnosti x_n jsou definovány rovnostmi

$$x_1=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\ x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \dots\ (a>0).$$

Vypočtěte její limitu $\lim_{n\to\infty}x_n$.

637.1 Členy číselné posloupnosti x_n jsou definovány rekurentním vztahem:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})\ (n=2,3,\dots).$$

Vypočtěte její limitu $\lim_{n\to\infty}x_n$.

637.2 Členy číselné posloupnosti y_n jsou definovány pomocí členů posloupnosti x_n rovnostmi

$$y_0=x_0,\ y_n=x_n-\alpha x_{n-1}\ (n=1,2,\dots),$$

kde $|\alpha|<1$. Vypočtěte limitu $\lim_{n\to\infty}x_n$, je-li $\lim_{n\to\infty}y_n=b$.

637.3 Členy číselné posloupnosti x_n jsou definovány rekurentním vztahem:

$$x_0 = 1\,,\ x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}}\ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Vypočtěte její limitu $\lim_{n\to\infty} x_n$.

NÁVOD: Vyšetřete rozdíl mezi x_n a kořeny rovnice $x = \frac{1}{1+x}$.

638. Posloupnost funkcí

$$y_n = y_n(x)\ \ (0 \le x \le 1)$$

je definovaná rekurentním vztahem:

$$y_1 = \frac{x}{2},\ y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2}\ \ (n = 2, 3, \ldots).$$

Vypočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} y_n$.

639. Posloupnost funkcí $y_n = y_n(x)\ \ (0 \le x \le 1)$ je definovaná rekurentním vztahem:

$$y_1 = \frac{x}{2},\ y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}\ \ (n = 2, 3, \ldots).$$

Vypočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} y_n$.

639.1 Nechť $x > 0$ a $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dokažte, že je-li $y_i > 0$ $(i = 0, 1)$, pak posloupnost y_n konverguje a

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

NÁVOD: Vyšetřete rozdíl $\frac{1}{x} - y_n$.

639.2 Hodnota $y = \sqrt{x}$, kde $x > 0$, se počítá následujícím způsobem: nechť $y_0 > 0$ je libovolné kladné číslo a

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right)\ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Dokažte, že pak $\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}$.

NÁVOD: Použijte identitu

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2\ \ (n \ge 1).$$

640. Pro přibližné řešení *Keplerovy rovnice*

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \tag{1}$$

použijeme následující rekurentní vztahy:

$$x_0 = m,\ x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \ldots,\ x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \ldots$$

(*metodu postupných aproximací*).

Dokažte, že existuje číslo $\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$ a že toto číslo je jediným kořenem rovnice (1).

641. Je-li $\omega_h[f]$ oscilace funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $|x - \xi| \le h$ $(h > 0)$, pak číslo

$$\omega_0[f] = \lim_{h \to 0} \omega_h[f]$$

nazýváme *oscilací funkce* $f(x)$ *v bodě* ξ.

Určete oscilaci funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$, je-li $f(0) = 0$ a pro $x \neq 0$ platí:

a) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x}$; c) $f(x) = x\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$;

d) $f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; e) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$; f) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$; g) $f(x) = (1 + |x|)^{1/x}$.

642. Nechť $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Dokažte, že ke každému číslu α, pro které $-1 \le \alpha \le 1$, existuje posloupnost $x_n \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ taková, že $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$.

643. Vypočtěte

$$l = \underline{\lim_{x \to 0}} f(x) \text{ a } L = \overline{\lim_{x \to 0}} f(x),$$

je-li:

a) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; b) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$; c) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2(1/x)}$.

644. Vypočtěte

$$l = \underline{\lim_{x \to \infty}} f(x) \text{ a } L = \overline{\lim_{x \to \infty}} f(x),$$

je-li:

a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = x^2 \cos^2 x$; c) $f(x) = 2^{\sin x^2}$; d) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$ $(x \ge 0)$.

§ 6. Používání symbolu O

1. Zápisem

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ pro } x \in X$$

vyjadřujeme, že existuje konstanta A taková, že

$$|\varphi(x)| \leq A\,|\psi(x)| \text{ pro každé } x \in X. \tag{1}$$

Analogicky píšeme

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ pro } x \to a, \tag{2}$$

platí-li nerovnost (1) v nějakém okolí U_a bodu a $(x \neq a)$. Navíc, je-li $\psi(x) \neq 0$ pro $x \in U_a$ $(x \neq a)$, pak vztah (2) platí, existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. Takový případ označujeme zápisem $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$.

Je-li

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \ (p > 0),$$

nazýváme funkci $\varphi(x)$ *nekonečně malou stupně* p vzhledem k nekonečně malé proměnné x.

Analogicky, je-li

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0 \ (p > 0),$$

nazýváme funkci $\psi(x)$ *nekonečně velkou stupně* p vzhledem k nekonečně velké proměnné x.

2. Zápis

$$\varphi(x) = o(\psi(x)) \text{ pro } x \to a$$

vyjadřuje, že platí rovnost

$$\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x) \ (x \in U_a,\ x \neq a), \tag{3}$$

kde $\alpha(x) \to 0$ pro $x \to a$. Je-li $\psi(x) \neq 0$ pro $x \in U_a$, $x \neq a$, je rovnost (3) ekvivalentní tvrzení

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3. Funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ se nazývají *ekvivalentní* $(\varphi(x) \sim \psi(x))$ pro $x \to a$, jestliže

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \text{ pro } x \to a. \tag{4}$$

Je-li $\psi(x) \neq 0$ pro $x \in U_a$, $x \neq a$, vyplývá z rovnosti (4), že

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

Pro $x \to 0$ platí následující vztahy ekvivalence:

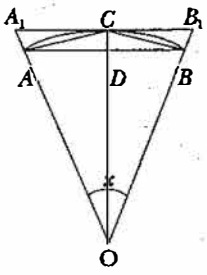
$$\sin x \sim x;\ \operatorname{tg} x \sim x;\ a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0);\ \ln(1+x) \sim x;\ \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Obecně platí

$$\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x).$$

Při počítání limity podílu dvou nekonečně malých (nebo nekonečně velkých) funkcí pro $x \to a$ můžeme tyto funkce nahradit ekvivalentními.

645. Považujeme-li středový úhel kruhové výseče $\triangle AOB = x$ (viz obr. 4) za nekonečně malou veličinu prvního stupně, určete stupně malosti následujících veličin: a) délky sečny AB; b) výšky CD; c) obsahu trojúhelníka AOB; d) obsahu trojúhelníka ABC; e) obsahu lichoběžníka ABB_1A_1; f) obsahu kruhové úseče ABC.



Obr. 4

646. Nechť $o(f(x))$ je libovolná funkce, která má pro $x \to a$ menší stupeň růstu než funkce $f(x)$, a nechť $O(f(x))$ je libovolná funkce, která má pro $x \to a$ stejný stupeň růstu jako funkce $f(x)$, kde $f(x) > 0$. Dokažte, že platí

a) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; b) $O(o(f(x))) = o(f(x))$; c) $o(O(f(x))) = o(f(x))$;

d) $O(O(f(x))) = O(f(x))$; e) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

647. Nechť $x \to 0$ a $n > 0$. Dokažte, že platí

a) $cO(x^n) = O(x^n)$ ($c \neq 0$ je konstanta); b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n < m)$;

c) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

648. Nechť $x \to +\infty$ a $n > 0$. Dokažte, že platí

a) $cO(x^n) = O(x^n)$; b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n > m)$; c) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. Dokažte, že relace $\sim$ má vlastnosti ekvivalence: 1) je reflexivní: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; 2) je symetrická: je-li $\varphi(x) \sim \psi(x)$, pak $\psi(x) \sim \varphi(x)$ a 3) je tranzitivní: je-li $\varphi(x) \sim \psi(x)$ a $\psi(x) \sim \chi(x)$, pak $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. Nechť $x \to 0$. Dokažte následující rovnosti:

a) $2x - x^2 = O(x)$; b) $x \sin\sqrt{x} = O(x^{3/2})$; c) $x \sin\dfrac{1}{x} = O(|x|)$;

d) $\ln x = o\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$; e) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$; f) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = O(1)$;

g) $(1 + x)^n = 1 + nx + o(x)$.

651. Nechť $x \to +\infty$. Dokažte následující rovnosti:

a) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$; b) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$; c) $x + x^2 \sin x = O(x^2)$;

d) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; e) $\ln x = o(x^{\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$; f) $x^p e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

g) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$; h) $x^2 + x\ln^{1000} x \sim x^2$.

652. Dokažte, že pro dostatečně velké $x > 0$ platí následující nerovnosti:

a) $x^2 + 10x + 100 < 0{,}001x^3$; b) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$; c) $x^{10} e^x < e^{2x}$.

652.1 Dokažte asymptotickou rovnost

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

pro $x \to +\infty$.

653. Nechť $x \to 0$. Najděte hlavní člen tvaru cx^n (kde c je konstanta) a určete stupně malosti následujících funkcí vzhledem k proměnné x:

a) $2x - 3x^3 + x^5$; b) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$; c) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$; d) $\operatorname{tg} x - \sin x$.

654. Nechť $x \to 0$. Ukažte, že nekonečně malé funkce

a) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; b) $f(x) = e^{-1/x^2}$

nelze srovnávat podle stupně malosti s nekonečně malou funkcí x^n $(n > 0)$ pro žádné n, tj. pro žádné přirozené číslo n neplatí, že $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = k$, kde k je konečné číslo různé od nuly.

655. Nechť $x \to 1$. Najděte hlavní člen tvaru $c(x-1)^n$ a určete stupně malosti následujících funkcí vzhledem k nekonečně malé funkci $x - 1$:

a) $x^3 - 3x + 2$; b) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$; c) $\ln x$; d) $e^x - e$; e) $x^x - 1$.

656. Nechť $x \to +\infty$. Najděte hlavní člen tvaru cx^n a určete stupně velikosti následujících funkcí vzhledem k nekonečně velké proměnné x:

a) $x^2 + 100x + 10000$; b) $\dfrac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$; c) $\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$; d) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

657. Nechť $x \to +\infty$. Najděte hlavní člen tvaru $c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ a určete stupně malosti následujících funkcí vzhledem k nekonečně malé funkci $\dfrac{1}{x}$:

a) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; c) $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$; d) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

658. Nechť $x \to 1$. Najděte hlavní člen tvaru $c\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$ a určete stupně velikosti následujících funkcí vzhledem k nekonečně velké funkci $\dfrac{1}{x-1}$:

a) $\frac{x^2}{x^2-1}$; b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; c) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; d) $\frac{1}{\sin \pi x}$; e) $\frac{\ln x}{(1-x)^2}$.

659. Nechť $x \to +\infty$ a $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dokažte, že: 1) každá z funkcí $f_n(x)$ roste rychleji než předchozí funkce $f_{n-1}(x)$; 2) funkce e^x roste rychleji než jakákoli funkce $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

660. Nechť $x \to +\infty$ a $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dokažte, že: 1) každá z funkcí $f_n(x)$ roste pomaleji než předchozí funkce $f_{n-1}(x)$; 2) funkce $f(x) = \ln x$ roste pomaleji než jakákoli funkce $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

661. Dokažte, že ke každé posloupnosti funkcí

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \quad (x_0 < x < +\infty)$$

lze sestrojit funkci $f(x)$, která pro $x \to +\infty$ roste rychleji než jakákoli z funkcí $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

§ 7. Spojitost funkce

1. SPOJITOST FUNKCE. Říkáme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* x_0, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

tj. funkce $f(x)$ je definovaná v bodě $x = x_0$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, že pro $|x - x_0| < \delta$ a pro všechny hodnoty $f(x)$, které mají smysl, platí nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Funkci $f(x)$ nazýváme *spojitou na dané množině* $X = \{x\}$ (otevřeném, uzavřeném intervalu apod.), je-li tato funkce spojitá v každém bodě množiny X.

Jestliže pro nějaký bod $x = x_0$ z definičního oboru $X = \{x\}$ funkce $f(x)$ nebo pro nějaký hromadný bod této množiny není splněna rovnost (1) (tj. buď a) funkce není definovaná v bodě $x = x_0$, nebo b) neexistuje limita $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nebo c) obě strany rovnosti (1) mají smysl, ale nerovnají se), pak bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti* funkce $f(x)$.

Rozlišujeme:

1) *body nespojitosti prvního druhu* x_0, pro které existují konečné jednostranné limity

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \text{ a } \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

2) *body nespojitosti druhého druhu* (ostatní). Rozdíl

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) - \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$$

nazýváme *skokem funkce* $f(x)$ v bodě x_0.

Platí-li rovnost

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x),$$

nazýváme bod nespojitosti x_0 *bodem odstranitelné nespojitosti*. Je-li jedna z limit $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ nebo $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ nevlastní (rovna symbolu ∞), nazýváme bod x_0 bodem *nekonečné nespojitosti*.

Platí-li rovnost

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ (nebo } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)),$$

říkáme, že je funkce $f(x_0)$ *spojitá zleva (nebo zprava)* v bodě x_0. K tomu, aby byla funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0, je nutné a stačí, aby platila rovnost následujících tří čísel:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. **SPOJITOST ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ.** Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě $x = x_0$, jsou také funkce

$$\text{a) } f(x) \pm g(x); \text{ b) } f(x)g(x); \text{ c) } \frac{f(x)}{g(x)} \ (g(x_0) \neq 0)$$

spojité v bodě $x = x_0$.

Speciálně: a) polynomiální funkce (polynom)

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

je spojitá v libovolném bodě x; b) lomená racionální funkce

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

je spojitá v každém bodě, v němž její jmenovatel není roven nule.

Všechny elementární funkce: x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Ještě obecnější tvrzení je: Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x = x_0$ a nechť funkce $g(y)$ je spojitá v bodě $y = f(x_0)$. Pak je funkce $g(f(x))$ spojitá v bodě $x = x_0$.

3. **ZÁKLADNÍ VĚTY O SPOJITÝCH FUNKCÍCH.** Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, platí následující tvrzení: 1) funkce $f(x)$ je na tomto intervalu omezená; 2) nabývá na něm svého infima m a suprema M (Weierstrassova věta); 3) na každém intervalu $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ nabývá všech hodnot mezi $f(\alpha)$ a $f(\beta)$ (Cauchyova věta). Speciálně, je-li $f(\alpha)f(\beta) < 0$, pak existuje taková hodnota γ $(\alpha < \gamma < \beta)$, pro kterou $f(\gamma) = 0$.

662. Je dán graf spojité funkce $y = f(x)$. Pro daný bod a a číslo $\varepsilon > 0$ sestrojte graficky $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, jakmile $|x - a| < \delta$.

663. Je potřeba vyrobit kovový čtverec s délkou strany $x_0 = 10\,\text{cm}$. V jakém rozsahu lze měnit délku strany čtverce x, aby se jeho obsah $y = x^2$ nelišil od plánovaného obsahu $y_0 = 100\,\text{cm}^2$ o více než a) $\pm 1\,\text{cm}^2$; b) $\pm 0{,}1\,\text{cm}^2$; c) $\pm 0{,}01\,\text{cm}^2$ nebo d) $\pm \varepsilon\,\text{cm}^2$?

664. Délka hrany krychle je v rozmezí 2 m až 3 m. S jakou absolutní chybou Δ můžeme změřit hranu x krychle, abychom mohli určit její objem y s relativní přesností nepřevyšující $\varepsilon\,\mathrm{m}^3$, je-li a) $\varepsilon = 0{,}1\,\mathrm{m}^3$; b) $\varepsilon = 0{,}01\,\mathrm{m}^3$ nebo c) $\varepsilon = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$?

665. V jakém maximálním okolí bodu $x_0 = 100$ bude první souřadnice bodu z grafu funkce $y = \sqrt{x}$, jehož druhá souřadnice se liší od hodnoty $y_0 = 10$ o méně než $\varepsilon = 10^{-n}$ $(n \geq 0)$? Určete tato okolí pro $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

666. Pomocí definice spojitosti funkce dokažte, že funkce $f(x) = x^2$ je spojitá v bodě $x = 5$. Doplňte chybějící hodnoty do následující tabulky:

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

667. Nechť $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a $\varepsilon = 0{,}001$. Pro hodnoty $x_0 = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots$ najděte co největší kladná čísla $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ taková, aby z nerovnosti $|x - x_0| < \delta$ vyplývala nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Existuje pro $\varepsilon = 0{,}001$ taková hodnota $\delta > 0$, pro kterou by tyto nerovnosti platily pro všechny hodnoty x_0 z intervalu $(0,1)$, tj. taková hodnota, pro kterou by z $|x - x_0| < \delta$ vyplývala nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ nezávisle na hodnotě $x_0 \in (0,1)$?

668. Pomocí definice spojitosti funkce zformulujte bez použití negací následující tvrzení: Funkce $f(x)$ definovaná v bodě x_0 není v tomto bodě spojitá.

669. Nechť pro některé hodnoty čísla $\varepsilon > 0$ existují čísla $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ taková, že platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, jakmile $|x - x_0| < \delta$. Můžeme tvrdit, že je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0, jestliže: a) množina těchto čísel ε je konečná; b) čísla ε vytvářejí nekonečnou posloupnost zlomků $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$?

670. Nechť $f(x) = x + 0{,}001\,[x]$. Ukažte, že ke každému číslu $\varepsilon > 0{,}001$ lze najít takové číslo $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, že platí $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, jakmile $|x' - x| < \delta$, a že pro $0 < \varepsilon \leq 0{,}001$ nelze takové δ najít. Ve kterých bodech tato funkce není spojitá?

671. Nechť ke každému dostatečně malému číslu $\delta > 0$ existuje takové $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, že je-li $|x - x_0| < \delta$, pak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Vyplývá z toho, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x = x_0$? Jaká vlastnost funkcí $f(x)$ je popsána těmito nerovnostmi?

672. Nechť ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, že je-li $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, pak $|x - x_0| < \delta$. Vyplývá z toho, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x = x_0$? Jaká vlastnost funkce $f(x)$ je popsána těmito nerovnostmi?

673. Nechť ke každému číslu $\delta > 0$ existuje číslo $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ tak, že je-li $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, pak $|x - x_0| < \delta$. Vyplývá z toho, že je funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x = x_0$? Jaká vlastnost funkce $f(x)$ je popsána těmito nerovnostmi?

Uvažujte následující příklad:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \text{ pro } x \text{ racionální,} \\ \pi - \operatorname{arctg} x \text{ pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

674. Pomocí definice spojitosti funkce dokažte spojitost následujících funkcí:

a) $ax + b$; b) x^2; c) x^3; d) $\sqrt{x}$; e) $\sqrt[3]{x}$; f) $\sin x$; g) $\cos x$; h) $\operatorname{arctg} x$.

Rozhodněte, zda jsou následující funkce spojité, a sestrojte jejich grafy:

675. $f(x) = |x|$.

676. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ pro } x \neq 2, \\ A \text{ pro } x = 2. \end{cases}$

677. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x)^2}$, je-li $x \neq -1$, a $f(-1)$ je libovolná hodnota.

678. a) $f_1(x) = \left| \dfrac{\sin x}{|x|} \right|$, je-li $x \neq 0$, a $f_1(0) = 1$; b) $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, je-li $x \neq 0$, a $f_2(0) = 1$.

679. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, je-li $x \neq 0$, a $f(0)$ je libovolná hodnota.

680. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, je-li $x \neq 0$, a $f(0) = 0$.

681. $f(x) = e^{-1/x^2}$, je-li $x \neq 0$, a $f(0) = 0$.

682. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/(x-1)}}$, je-li $x \neq 1$, a $f(1)$ je libovolná hodnota.

683. $f(x) = x \ln x^2$, je-li $x \neq 0$, a $f(0) = a$.

684. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

685. $f(x) = [x]$.

686. $f(x) = \sqrt{x} - \left[\sqrt{x}\right]$.

Najděte body nespojitosti následujících funkcí a určete charakter těchto nespojitostí:

687. $y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

688. $y = \dfrac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y = \dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

690. $y = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$.

691. $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

692. $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$.

693. $y = \cos^2 \dfrac{1}{x}$.

694. $y = \operatorname{sgn}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$.

695. $y = \dfrac{\cos \dfrac{\pi}{x}}{\cos \dfrac{\pi}{x}}$.

696. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

697. $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

698. $y = e^{x+1/x}$.

699. $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

700. $y = \dfrac{1}{1-e^{x/(1-x)}}$.

Rozhodněte, zda jsou následující funkce spojité, a sestrojte jejich grafy:

701. $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

702. $y = x - [x]$.

703. $y = x[x]$.

704. $y = [x] \sin \pi x$.

705. $y = x^2 - [x^2]$.

706. $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$.

707. $y = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

708. $y = \operatorname{sgn}\left(\cos \dfrac{1}{x}\right)$.

709. $y = \left[\dfrac{1}{x^2}\right] \operatorname{sgn}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$.

710. $y = \operatorname{cotg} \dfrac{\pi}{x}$.

711. $y = \sec^2 \dfrac{1}{x}$.

712. $y = (-1)^{[x^2]}$.

713. $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}\right)$.

714. $y = \dfrac{1}{x^2 \sin^2 x}$.

715. $y = \dfrac{1}{\sin(x^2)}$.

716. $y = \ln \dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

717. $y = e^{-1/x}$.

718. $y = 1 - e^{-1/x^2}$.

719. $y = \operatorname{tgh} \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Rozhodněte, zda jsou následující funkce spojité, a sestrojte jejich grafy:

720. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$ $(x \geq 0)$.

721. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$.

722. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

723. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n} x$.

724. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

725. $y = \lim\limits_{n\to\infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{cotg} x)]$.

726. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

727. $y = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

728. $y = \lim\limits_{t\to+\infty} (1+x)\operatorname{tgh} tx$.

729. Rozhodněte, zda je následující funkce spojitá:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{pro } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

730. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{pro } x < 0, \\ a+x & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Pro jaké hodnoty čísla a je funkce $f(x)$ spojitá?

731. Rozhodněte, zda je funkce $f(x)$ spojitá, a určete charakter bodů nespojitosti, je-li:

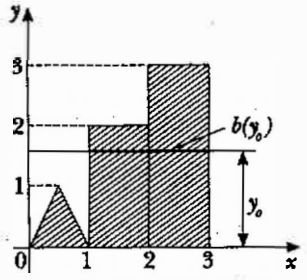
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{pro } 1 < x \leq 2; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{pro } |x| > 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{pro } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{pro } |x| > 1; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{cotg}^2 \pi x & \text{pro necelé } x, \\ 0 & \text{pro celé } x; \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{pro racionální } x, \\ 0 & \text{pro iracionální } x. \end{cases}$

732. Funkce $d = d(x)$ vyjadřuje nejkratší vzdálenost nějakého bodu osy x od množiny jejích bodů tvořené dvěma intervaly $0 \le x \le 1$ a $2 \le x \le 3$. Najděte analytické vyjádření funkce d, sestrojte její graf a rozhodněte, zda je spojitá.

733. Obrazec E se skládá z rovnoramenného trojúhelníka s délkou základny 1, výškou 1 a dvou obdélníků o základnách 1 a výškách po řadě 2 a 3 (viz obr. 5). Funkce $S = S(y_0)$ $(0 \le y_0 < +\infty)$ definována jako obsah části obrazce E vymezené rovnoběžnými přímkami $y = 0$ a $y = y_0$; funkce $b = b(y_0)$ $(0 \le y_0 < +\infty)$ je rovna délce úsečky, kterou přímka $y = y_0$ protíná obrazec E. Najděte analytická vyjádření funkcí S a b, sestrojte jejich grafy a rozhodněte, zda jsou spojité.



Obr. 5

734. Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x) = \lim_{m \to \infty} \left\{ \lim_{n \to \infty} \cos^n (\pi m! x) \right\}$ je nespojitá v každém bodě x.

735. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = x\chi(x),$$

kde $\chi(x)$ je Dirichletova funkce, spojitá (viz předcházející úloha). Načrtněte graf této funkce.

736. Dokažte, že Riemannova funkce, která je dána předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pro } x = \dfrac{m}{n}, \text{ kde } m \text{ a } n \text{ jsou vzájemně nesoudělná celá čísla, } n > 0, \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální,} \end{cases}$$

je nespojitá pro každé racionální x a je spojitá pro každé iracionální x. Načrtněte graf této funkce.

737. Rozhodněte, zda je spojitá funkce $f(x)$, která je dána následujícím předpisem:

$$f(x) = \frac{nx}{n+1},$$

je-li x racionální zlomek $\frac{m}{n}$ $(n \geq 1)$ tvořený nesoudělnými čísly, a

$$f(x) = |x|,$$

je-li x iracionální číslo. Načrtněte graf této funkce.

738. Funkce $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ je definovaná pro všechny hodnoty argumentu x kromě případu $x = 0$. Jakou hodnotou bychom měli dodefinovat funkci $f(x)$ v bodě $x = 0$, aby byla spojitá?

739. Ukažte, že pro libovolně zvolenou hodnotu $f(1)$ bude funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nespojitá v bodě $x = 1$.

740. Funkce $f(x)$ není definována pro $x = 0$. Určete číslo $f(0)$ tak, aby funkce $f(x)$ byla v bodě $x = 0$ spojitá, je-li:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$; b) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$; c) $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$; d) $f(x) = (1+x)^{1/x}$;

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2}$; f) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$; g) $f(x) = x \ln^2 x$.

741. Je pravda, že v daném bodě x_0 bude součet dvou funkcí $f(x) + g(x)$ nespojitý, pokud: a) funkce $f(x)$ je spojitá a funkce $g(x)$ nespojitá v bodě $x = x_0$; b) obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou nespojité v bodě $x = x_0$? Najděte odpovídající příklady.

742. Je pravda, že v daném bodě x_0 bude mít součin dvou funkcí $f(x)g(x)$ nespojitost, pokud: a) je funkce $f(x)$ spojitá a funkce $g(x)$ nespojitá v tomto bodě; b) obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou nespojité v bodě $x = x_0$? Najděte odpovídající příklady.

743. Je pravda, že druhá mocnina nespojité funkce je také nespojitá? Najděte příklad všude nespojité funkce, jejíž druhá mocnina je spojitou funkcí.

744. Rozhodněte, zda jsou funkce $f[g(x)]$ a $g[f(x)]$ spojité, je-li:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a $g(x) = 1 + x^2$;

b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a $g(x) = x(1 - x^2)$;

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a $g(x) = 1 + x - [x]$.

745. Rozhodněte, zda je spojitá složená funkce $y = f(u)$, kde $u = \varphi(x)$, je-li

$$f(u) = \begin{cases} u \text{ pro } 0 < u \leq 1, \\ 2 - u \text{ pro } 1 < u < 2 \end{cases}$$

a

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \text{ pro } x \text{ racionální}, \\ 2 - x \text{ pro } x \text{ iracionální} \end{cases} (0 < x < 1).$$

746. Dokažte, že je-li $f(x)$ spojitá funkce, pak je $F(x) = |f(x)|$ také spojitá funkce.

747. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ spojitá, pak je funkce

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{je-li } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{je-li } |f(x)| \le c, \\ c, & \text{je-li } f(x) > c, \end{cases}$$

kde c je libovolné kladné číslo, také spojitá.

748. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak jsou funkce

$$m(x) = \inf_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\} \text{ a } M(x) = \sup_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\}$$

také spojité na intervalu $[a,b]$.

749. Dokažte, že jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité, pak jsou funkce

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \text{ a } \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

také spojité.

750. Nechť je funkce $f(x)$ definovaná a omezená na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Dokažte, že funkce

$$m(x) = \inf_{a \le \xi < x} \{f(\xi)\} \text{ a } M(x) = \sup_{a \le \xi < x} \{f(\xi)\}$$

jsou spojité zleva na intervalu $[a,b]$.

751. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $a \le x < +\infty$ a existuje-li konečná limita $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, pak je tato funkce na daném intervalu omezená.

752. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a omezená na otevřeném intervalu $(x_0, +\infty)$. Dokažte, že k libovolnému číslu T existuje taková posloupnost $x_n \to +\infty$, že platí

$$\lim_{n \to \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. Nechť jsou $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ spojité periodické funkce definované pro $-\infty < x < +\infty$ a nechť

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Dokažte, že $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

754. Dokažte, že všechny body nespojitosti omezené monotónní funkce jsou body nespojitosti prvního druhu.

755. Dokažte, že má-li funkce $f(x)$ následující vlastnosti: 1) je definovaná a monotónní na uzavřeném intervalu $[a,b]$; 2) v jejím oboru hodnot jsou všechna čísla mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak je tato funkce spojitá na intervalu $[a,b]$.

756. Ukažte, že funkce $f(x) = \sin\dfrac{1}{x-a}$ pro $x \ne a$ a $f(a) = 0$ nabývá na libovolném uzavřeném intervalu $[a,b]$ všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$, a přesto není na intervalu $[a,b]$ spojitá.

757. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na otevřeném intervalu (a,b) a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou libovolná čísla z tohoto intervalu, pak mezi hodnotami $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$ a $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ existuje takové číslo ξ, že platí

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

758. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na otevřeném intervalu (a,b) a

$$l = \underline{\lim_{x \to a}} f(x) \text{ a } L = \overline{\lim_{x \to a}} f(x).$$

Dokažte, že k libovolnému číslu λ, pro které je $l \le \lambda \le L$, existuje taková posloupnost $x_n \to a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, že platí

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§ 8. Inverzní funkce. Funkce zadané parametricky

1. **EXISTENCE A SPOJITOST INVERZNÍ FUNKCE.** Má-li funkce $y = f(x)$ následující vlastnosti: 1) je definovaná a spojitá na otevřeném intervalu (a,b); 2) je na tomto intervalu ostře monotónní, pak existuje jednoznačná inverzní funkce $x = f^{-1}(y)$, která je definovaná, spojitá a stejným způsobem ostře monotónní na otevřeném intervalu (A,B), kde $A = \lim_{x \to a} f(x)$ a $B = \lim_{x \to b} f(x)$.

Pojmem *jednoznačná spojitá větev* mnohoznačné inverzní funkce dané spojité funkce $y = f(x)$ se rozumí libovolná jednoznačná spojitá funkce $x = g(y)$, která je definovaná na maximálním definičním oboru a na něm vyhovuje rovnosti $f[g(y)] = y$.

2. **SPOJITOST FUNKCE ZADANÉ PARAMETRICKY.** Jsou-li funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ definované a spojité na otevřeném intervalu (α, β) a funkce $\varphi(t)$ je ostře monotónní na tomto intervalu, je systémem rovnic

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$$

na otevřeném intervalu (a,b), kde $a = \lim_{t \to \alpha} \varphi(t)$ a $b = \lim_{t \to \beta} \varphi(t)$, definovaná y jako jednoznačná a spojitá funkce proměnné x předpisem

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

759. Najděte inverzní funkci k lineární lomené funkci

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

V jakém případě je tato inverzní funkce rovna původní funkci?

760. Najděte inverzní funkci $x = x(y)$, je-li

$$y = x + [x].$$

761. Ukažte, že existuje jednoznačně určená spojitá funkce $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, která vyhovuje *Keplerově rovnici*

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \le \varepsilon < 1).$$

762. Ukažte, že rovnice $\operatorname{cotg} x = kx$ má pro každé reálné číslo k $(-\infty < k < +\infty)$ na intervalu $0 < x < \pi$ jediný kořen $x = x(k)$, který je spojitou funkcí proměnné k.

763. Je pravda, že funkce $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, která není monotónní, může mít jednoznačnou inverzní funkci? Uvažujte případ:

$$y = \begin{cases} x \text{ pro } x \text{ racionální,} \\ -x \text{ pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

764. V jakém případě představují funkce $y = f(x)$ a její inverzní funkce $x = f^{-1}(y)$ jednu a tutéž funkci?

765. Ukažte, že inverzní funkce k nespojité funkci $y = (1 + x^2)\operatorname{sgn} x$ je funkce spojitá.

766. Ukažte, že je-li funkce $f(x)$ definovaná a ostře monotónní na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a platí-li

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \le x_n \le b),$$

pak

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Určete jednoznačné spojité větve inverzních funkcí k následujícím funkcím:

767. $y = x^2$.

768. $y = 2x - x^2$.

769. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

770. $y = \sin x$.

771. $y = \cos x$.

772. $y = \operatorname{tg} x$.

773. Ukažte, že obor hodnot spojité funkce $y = 1 + \sin x$ pro argument z intervalu $(0 < x < 2\pi)$ je uzavřený interval.

774. Dokažte rovnost

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Dokažte rovnost

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \ne 0).$$

776. Dokažte větu o skládání funkce arctg:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy} + \varepsilon\pi,$$

kde $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ je funkce, která nabývá jedné z hodnot 0, 1, -1. Pro jaké hodnoty y při pevném x je funkce ε nespojitá? Najděte v rovině xy množiny bodů spojitosti funkce ε a určete hodnotu této funkce na nich.

777. Dokažte větu o skládání funkce arcsin:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi \quad (|x| \le 1,\ |y| \le 1),$$

kde

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{ je-li } xy \le 0 \text{ nebo } x^2 + y^2 \le 1, \\ \operatorname{sgn} x, \text{ je-li } xy > 0 \text{ a } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

778. Dokažte větu o skládání funkce arccos:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^{\varepsilon} \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + 2\pi\varepsilon \quad (|x| \le 1,\ |y| \le 1),$$

kde

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 \text{ pro } x + y \ge 0, \\ 1 \text{ pro } x + y < 0. \end{cases}$$

779. Sestrojte grafy následujících funkcí:

a) $y = \arcsin x - \arcsin\sqrt{1-x^2}$; b) $y = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - 2\arcsin x$.

780. Najděte funkci $y = y(x)$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$x = \operatorname{arctg} t,\ y = \operatorname{arccotg} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Jaký je definiční obor této funkce?

781. Nechť $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ $(-\infty < t < +\infty)$. Pro jaké hodnoty parametru t je proměnná y jednoznačnou funkcí proměnné x? Najděte vyjádření funkce y na těchto různých množinách.

782. Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro to, aby systém parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ určoval y jako jednoznačnou funkci x? Uvažujte případ $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

783. Za jakých podmínek určují následující dva systémy parametrických rovnic

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

a

$$x = \varphi(\chi(\tau)),\ y = \psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

tutéž funkci $y = y(x)$?

784. Nechť jsou funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ definované a spojité na otevřeném intervalu (a, b), $A = \inf_{a<x<b} \varphi(x)$ a $B = \sup_{a<x<b} \varphi(x)$. V jakém případě existuje jednoznačná funkce $f(x)$, definovaná na intervalu (A, B), pro kterou platí

$$\psi(x) = f(\varphi(x)) \text{ pro } a < x < b?$$

§ 9. Stejnoměrná spojitost funkce

1. **DEFINICE STEJNOMĚRNÉ SPOJITOSTI.** Funkce $f(x)$ se nazývá *stejnoměrně spojitou* na dané množině (otevřeném nebo uzavřeném intervalu apod.) $X=\{x\}$, je-li definovaná na X a ke každému $\varepsilon>0$ existuje takové $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, že pro libovolné dva prvky x', $x''\in X$ vyplývá z nerovnosti

$$|x'-x''|<\delta$$

nerovnost

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

2. **CANTOROVA VĚTA.** Funkce $f(x)$, která je definovaná a spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$, je stejnoměrně spojitá na tomto intervalu.

785. Podnik vyrábí čtvercové destičky, jejichž strany x mohou mít velikost od 1 do 10 cm. S jakou maximální tolerancí δ je možné opracovávat strany těchto destiček, aby se nezávisle na jejich délce (v daných mezích velikosti) lišil jejich obsah y od plánovaného obsahu o méně než ε? Vyčíslete tuto toleranci pro hodnoty: a) $\varepsilon=1\,\text{cm}^2$; b) $\varepsilon=0{,}01\,\text{cm}^2$; c) $\varepsilon=0{,}0001\,\text{cm}^2$.

786. Plášť válce, jehož průměr je ε a výška δ, je nasazen na křivku $y=\sqrt[3]{x}$ a klouže po ní tak, že osa válce zůstává rovnoběžná s osou x. Jaká musí být velikost δ, aby plášť válce volně prošel úsek křivky, který je určen nerovností $-10\le x\le 10$, je-li: a) $\varepsilon=1$; b) $\varepsilon=0{,}1$; c) $\varepsilon=0{,}01$; d) ε libovolně malé?

787. Zformulujte pomocí definice stejnoměrné spojitosti bez použití negací následující tvrzení: Funkce $f(x)$ je spojitá na nějaké množině (otevřeném nebo uzavřeném intervalu apod.), ale není na této množině stejnoměrně spojitá.

788. Ukažte, že funkce $f(x)=1/x$ je spojitá na otevřeném intervalu $(0,1)$, ale není na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

789. Ukažte, že funkce $f(x)=\sin(\pi/x)$ je spojitá a omezená na otevřeném intervalu $(0,1)$, ale není na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

790. Ukažte, že funkce $f(x)=\sin x^2$ je spojitá a omezená na neomezeném intervalu $-\infty<x<+\infty$, ale není na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

791. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ definovaná a spojitá na intervalu $a\le x<+\infty$ a existuje-li konečná limita

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

je funkce $f(x)$ na této oblasti i stejnoměrně spojitá.

792. Ukažte, že neomezená funkce

$$f(x)=x+\sin x$$

je stejnoměrně spojitá na celé ose $-\infty<x<+\infty$.

793. Rozhodněte, zda platí, že funkce $f(x)=x^2$ je stejnoměrně spojitá na intervalu: a) $(-l,l)$, kde l je libovolně velké kladné číslo; b) na intervalu $(-\infty,+\infty)$?

Rozhodněte, zda jsou následující funkce stejnoměrně spojité na uvedených intervalech:

794. $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$ $(-1\le x\le 1)$.

795. $f(x)=\ln x$ $(0<x<1)$.

796. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $(0<x<\pi)$.

797. $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}$ $(0<x<1)$.

798. $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

799. $f(x)=\sqrt{x}$ $(1\le x<+\infty)$.

800. $f(x)=x\sin x$ $(0\le x<+\infty)$.

801. Ukažte, že funkce $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ je stejnoměrně spojitá na intervalech $J_1=(-1,0)$ a $J_2=(0,1)$, ale není stejnoměrně spojitá na jejich sjednocení $J_1\cup J_2=(-1,1)\setminus\{0\}$.

801.1 Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ stejnoměrně spojitá na uzavřených intervalech $[a,c]$ a $[c,b]$, je tato funkce stejnoměrně spojitá i na sjednocení těchto intervalů $[a,b]$.

802. Najděte ke každému $\varepsilon>0$ (nějaké!) $\delta=\delta(\varepsilon)$, které vyhovuje definici stejnoměrné spojitosti pro funkci $f(x)$ v daném intervalu, je-li:

a) $f(x)=5x-3$ $(-\infty<x<+\infty)$;

b) $f(x)=x^2-2x-1$ $(-2\le x\le 5)$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(0{,}1\le x\le 1)$;

d) $f(x)=\sqrt{x}$ $(0\le x<+\infty)$;

e) $f(x)=2\sin x-\cos x$ $(-\infty<x<+\infty)$;

f) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ a $f(0)=0$ $(0\le x\le\pi)$.

803. Na kolik stejných částí stačí rozdělit uzavřený interval $[1,10]$, aby byla oscilace funkčních hodnot funkce $f(x)=x^2$ na každé z těchto částí menší než 0,0001?

804. Dokažte, že součet a součin konečného počtu funkcí stejnoměrně spojitých na otevřeném intervalu (a,b) jsou také stejnoměrně spojité funkce na tomto intervalu.

805. Dokažte, že je-li omezená a monotónní funkce $f(x)$ spojitá na omezeném nebo neomezeném intervalu (a,b), je tato funkce na (a,b) stejnoměrně spojitá.

806. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ stejnoměrně spojitá na omezeném intervalu (a,b), existují limity

$$A = \lim_{x \searrow a} f(x) \text{ a } B = \lim_{x \nearrow b} f(x).$$

Platí tato věta také pro neomezený interval (a,b)?

806.1 Dokažte, že funkci $f(x)$, která je definovaná a spojitá na omezeném otevřeném intervalu (a,b), je možné spojitě prodloužit na uzavřený interval $[a,b]$ právě tehdy, když je $f(x)$ stejnoměrně spojitá na intervalu (a,b).

807. *Modulem spojitosti* funkce $f(x)$ na otevřeném intervalu (a,b) se nazývá funkce

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|,$$

kde x_1 a x_2 probíhá prvky z (a,b), pro které platí $|x_1 - x_2| \le \delta$. Dokažte, že aby funkce $f(x)$ byla v intervalu (a,b) stejnoměrně spojitá, je nutné a stačí, aby platilo

$$\lim_{\delta \searrow 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. Odhadněte velikost modulu spojitosti $\omega_f(\delta)$ (viz předchozí úloha) ve tvaru

$$\omega_f(\delta) \le C\,\delta^{\alpha},$$

kde C a α jsou konstanty, je-li:

a) $f(x) = x^3$ $(0 \le x \le 1)$; b) $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 \le x \le a$ anebo $a < x < +\infty)$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$ $(0 \le x \le 2\pi)$.

§ 10. Funkcionální rovnice

809. Dokažte, že jediná spojitá funkce $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, která splňuje pro všechna reálná čísla x a y rovnost

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

je lineární homogenní funkce $f(x) = ax$, kde $a = f(1)$ je libovolná konstanta.

810. Dokažte, že monotónní funkce $f(x)$, která vyhovuje rovnosti (1), je lineární homogenní funkce.

811. Dokažte, že funkce $f(x)$, která vyhovuje rovnosti (1) a která je omezená na libovolně malém otevřeném intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, je lineární homogenní funkce.

812. Dokažte, že jediná funkce $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, která není identicky rovna nule a která vyhovuje pro všechna x a y rovnosti

$$f(x+y) = f(x)f(y), \tag{2}$$

je exponenciální funkce $f(x) = a^x$, kde $a = f(1)$ je kladná konstanta.

813. Dokažte, že funkce $f(x)$, která není identicky rovna nule a která je omezená na otevřeném intervalu $(0,\varepsilon)$ a vyhovuje rovnosti (2), je funkce exponenciální.

814. Dokažte, že jediná funkce $f(x)$ $(0<x<+\infty)$, která není identicky rovna nule a která vyhovuje pro všechna kladná čísla x a y rovnosti

$$f(xy)=f(x)+f(y),$$

je logaritmická funkce $f(x)=\log_a x$, kde a je kladná konstanta $(a\neq 1)$.

815. Dokažte, že jediná funkce $f(x)$ $(0<x<+\infty)$, která není identicky rovna nule a která vyhovuje pro všechna kladná čísla x a y rovnosti

$$f(xy)=f(x)f(y), \tag{3}$$

je mocninná funkce $f(x)=x^a$, kde a je konstanta.

816. Najděte všechny spojité funkce $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, které vyhovují pro všechna reálná čísla x a y rovnosti (3).

817. Ukažte, že nespojitá funkce $f(x)=\operatorname{sgn}x$ vyhovuje rovnosti (3).

818. Najděte všechny spojité funkce $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, které vyhovují pro všechna reálná čísla x a y rovnosti

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

819. Najděte všechny spojité a omezené funkce $f(x)$ a $g(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, které vyhovují pro všechna reálná čísla x a y následujícímu systému rovnic:

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

a počátečním podmínkám:

$$f(0)=1 \text{ a } g(0)=0.$$

NÁVOD: Uvažujte funkci

$$F(x)=f^2(x)+g^2(x).$$

820. Nechť $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ a $\Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$ jsou konečné diference prvního a druhého řádu funkce $f(x)$. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ spojitá a platí-li $\Delta^2 f(x)\equiv 0$, je tato funkce lineární, tj. $f(x)=ax+b$, kde a a b jsou konstanty.

KAPITOLA II

Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

§ 1. Derivace funkce

1. **DEFINICE DERIVACE.** Nechť x a $x_1 = x + \Delta x$ jsou dvě hodnoty nezávisle proměnné. Pak se rozdíl

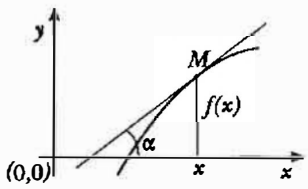
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

nazývá *přírůstkem* funkce $y = f(x)$ na uzavřeném intervalu $[x, x_1]$. Výraz

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1}$$

má-li smysl, se nazývá *derivací* a samotná funkce $f(x)$ se v tomto případě nazývá *diferencovatelnou* funkcí.

Geometricky představuje hodnota $f'(x)$ tangens úhlu, který svírá tečna grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x s osou x ($\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$) (viz obr. 6).



Obr. 6

2. **ZÁKLADNÍ PRAVIDLA PRO DERIVOVÁNÍ FUNKCÍ.** Je-li c konstanta a funkce $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ jsou diferencovatelné, platí následující vztahy:

1) $c' = 0$;

2) $(cu)' = cu'$;

3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

4) $(uv)' = u'v + v'u$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n je konstanta);

7) jsou-li funkce $y = f(u)$ a $u = \varphi(x)$ diferencovatelné, platí $y'_x = y'_u u'_x$.

3. **ZÁKLADNÍ VZTAHY.** Je-li x nezávisle proměnná, platí

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n je konstanta).

II. $(\sin x)' = \cos x$.

III. $(\cos x)' = -\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

V. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

IX. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

XI. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1; x > 0)$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

XII. $(\sinh x)' = \cosh x$.

XIII. $(\cosh x)' = \sinh x$.

XIV. $(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

XV. $(\operatorname{cotgh} x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$.

4. **JEDNOSTRANNÉ DERIVACE.** Výrazy

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se nazývají *derivací zleva*, respektive *zprava* funkce $f(x)$ v bodě x.

Pro existenci derivace $f'(x)$ je nutné a stačí, aby platilo

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5. **NEVLASTNÍ DERIVACE.** Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě x a platí-li

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x *nevlastní derivaci*. V tomto případě je tečna grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x kolmá k vodorovné ose.

821. Určete přírůstek Δx argumentu x a odpovídající přírůstek Δy funkce $y = \log x$, mění-li se x od 1 do 1000.

822. Určete přírůstek Δx argumentu x a odpovídající přírůstek Δy funkce $y = 1/x^2$, mění-li se x od 0,01 do 0,001.

823. Proměnná x se změní o přírůstek Δx. Určete přírůstek Δy, je-li:

a) $y = ax + b$; b) $y = ax^2 + bx + c$; c) $y = a^x$.

824. Dokažte, že platí:

a) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$; b) $\Delta[f(x)g(x)] = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$.

825. Body $A = (2, 4)$ a $A' = (2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ křivky $y = x^2$ je vedena sečna AA'. Najděte tangens úhlu této sečny, je-li: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0{,}1$; c) $\Delta x = 0{,}01$; d) Δx libovolně malý. Čemu je roven tangens úhlu tečny k dané křivce v bodě A?

826. Uzavřený interval $1 \le x \le 1 + h$ osy x je pomocí funkce $y = x^3$ zobrazen na osu y. Určete průměrné natažení obrazu tohoto intervalu a vypočtěte jeho hodnotu, je-li: a) $h = 0{,}1$; b) $h = 0{,}01$; c) $h = 0{,}001$. Čemu je roven koeficient natažení pro toto zobrazení v bodě $x = 1$?

827. Zákon pohybu hmotného bodu po ose x je dán vzorcem

$$x = 10t + 5t^2,$$

kde t je čas v sekundách a x je vzdálenost v metrech. Určete průměrnou rychlost pohybu v časovém intervalu $20 \le t \le 20 + \Delta t$ a vypočtěte ji, je-li: a) $\Delta t = 1$; b) $\Delta t = 0{,}1$; c) $\Delta t = 0{,}01$. Jaká je rychlost pohybu bodu v čase $t = 20$?

828. Pomocí definice derivace najděte derivace těchto základních funkcí:

a) x^2; b) x^3; c) $\frac{1}{x}$; d) $\sqrt{x}$; e) $\sqrt[3]{x}$; f) $\operatorname{tg} x$; g) $\operatorname{cotg} x$; h) $\arcsin x$;

i) $\arccos x$; j) $\operatorname{arctg} x$.

829. Vypočtěte $f'(1)$, $f'(2)$ a $f'(3)$, je-li

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3.$$

830. Vypočtěte $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2 \sin(x - 2)$.

831. Vypočtěte $f'(1)$, je-li $f(x) = x + (x - 1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

832. Najděte $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná v bodě a.

833. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná a n je přirozené číslo, pak platí:

$$\lim_{n \to \infty} n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'(x). \qquad (1)$$

Naopak, existuje-li pro funkci $f(x)$ limita (1), vyplývá z toho, že je tato funkce diferencovatelná? Uvažujte případ Dirichletovy funkce (viz kapitola 1, úloha 734).

Pomocí tabulek derivací najděte derivace následujících funkcí:

834. $y = 2 + x - x^2$.

Čemu jsou rovny $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

Pro jaké hodnoty x platí: a) $y'(x) = 0$; b) $y'(x) = -2$; c) $y'(x) = 10$?

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

837. $y = \frac{ax + b}{a + b}$.

838. $y = (x - a)(x - b)$.

839. $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$.

840. $y = (x \sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

841. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

842. $y = (1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^3)^3$.

842.1 $y = (5 + 2x)^{10}(3 - 4x)^{20}$.

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

844. Dokažte vztah $\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2}$.

Najděte derivace následujících funkcí:

845. $y = \frac{2x}{1 - x^2}$.

846. $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$.

847. $y = \frac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^3}$.

848. $y = \frac{(2 - x^2)(2 - x^3)}{(1 - x)^2}$.

849. $y = \frac{(1 - x)^p}{(1 + x)^q}$.

850. $y = \frac{x^p(1 - x)^q}{1 + x}$.

851. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

852. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

854. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

855. $y = (1 + x)\sqrt{2 + x^2}\sqrt[3]{3 + x^3}$.

856. $y = \sqrt[m+n]{(1 - x)^m(1 + x)^n}$.

857. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

858. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

859. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

860. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

861. $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

862. $y = \cos 2x - 2\sin x$.

863. $y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$.

864. $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$.

865. $y = \sin^n x \cos nx$.

866. $y = \sin(\sin(\sin x))$.

867. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

868. $y = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

869. $y = \dfrac{1}{\cos^n x}$.

870. $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

871. $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}$.

872. $y = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

873. $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{cotg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{cotg}^8 x}$.

874. $y = \sec^2\dfrac{x}{a} + \operatorname{cosec}^2\dfrac{x}{a}$.

875. $y = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$.

876. $y = e^{-x^2}$.

877. $y = 2^{\operatorname{tg} 1/x}$.

878. $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

879. $y = \left[\dfrac{1-x^2}{2}\sin x - \dfrac{(1-x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

880. $y = e^x\left(1 + \operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}\right)$.

881. $y = \dfrac{\ln 3\,\sin x + \cos x}{3^x}$.

882. $y = e^{ax}\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

883. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$.

884. $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$ $(a>0, b>0)$.

885. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ $(a>0)$.

886. $y = \log^3 x^2$.

887. $y = \ln(\ln(\ln x))$.

888. $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$.

889. $y = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2(1+x)}$.

890. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

891. $y = \dfrac{1}{4(1+x^4)} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$.

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$ $(0<k<1)$.

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

895. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

896. $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

897. $y=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x$.

898. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

899. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ $(a>0, b>0)$.

900. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

901. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

902. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

903. $y=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x+\ln\sin x$.

904. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

905. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

906. $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$ $(0\le|\alpha|<|b|)$.

907. $y=\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

908. $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$.

909. $y=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)+3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}\right)$.

910. $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

911. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

912. $y=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\cos x\ln(\operatorname{tg} x)$.

913. $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

914. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

915. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a}$.

916. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccotg}\frac{\sqrt{2}}{x}$.

917. $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

918. $y=x+\sqrt{1-x^2}\arccos x$.

919. $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

920. $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

921. $y=\arcsin(\sin x)$.

922. $y=\arccos(\cos^2 x)$.

923. $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$.

924. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

925. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

926. $y=\operatorname{arccotg}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

927. $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$ $(a>b\geq 0)$.

928. $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

929. $y=\dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

930. $y=\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)$.

931. $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\operatorname{arctg}(\sin x)$.

932. $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

933. $y=\ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b}$ $(b\neq 0)$.

934. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$.

935. $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

936. $y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

937. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

938. $y=\dfrac{\arccos x}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

939. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

940. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

941. $y=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

942. $y=\dfrac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arccotg}x^6$.

943. $y = \ln \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \dfrac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$.

944. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$.

945. $y = \operatorname{arccotg} \dfrac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}$ $(a > 0)$.

946. $y = \dfrac{3 - x}{2}\sqrt{1 - 2x - x^2} + 2 \arcsin \dfrac{1 + x}{\sqrt{2}}$.

947. $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x} - \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x}$.

948. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

949. $y = \sqrt{1 - x^2} \ln \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$.

950. $y = x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \dfrac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2$.

951. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$.

952. $y = \operatorname{arccotg}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

953. $y = \arcsin\left(\dfrac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$.

954. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{3}} \ln \dfrac{\sqrt{x^2 + 2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 2} + x\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}$.

955. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{\sqrt{1 + x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4} + x\sqrt{2}}$.

956. $y = \dfrac{x\sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x^2}}$.

957. $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$.

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

959. $y = e^{m \arcsin x}[\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)]$.

960. $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}$.

960.1 $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$.

960.2 $y = \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cotg} \dfrac{1}{x^2}}}$.

960.3 $y=\ln^2\left(\sec 2\sqrt[3]{x}\right)$.

961. $y=x+x^x+x^{x^x}\ (x>0)$.

962. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}\ (a>0,x>0)$.

963. $y=\sqrt[x]{x}\ (x>0)$.

964. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

965. $y=(\ln x)^x/x^{\ln x}$.

965.1 $y=\left[\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

966. $y=\log_x e$.

967. $y=\ln(\cosh x)+\dfrac{1}{2\cosh^2 x}$.

968. $y=\dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x}-\ln\left(\operatorname{cotgh}\dfrac{x}{2}\right)$.

969. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

970. $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\cosh x}\right)$.

971. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tgh}\dfrac{x}{2}\right)\ (0\le|b|<a)$.

972. Zaveďte pomocnou proměnnou $u=\cos^2 x$ a derivujte funkci

$$y=\ln\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right).$$

Postupem uvedeným v úloze **972** derivujte následující funkce:

973. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\dfrac{1}{2}\right]$.

974. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{1+x^4}\right)+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

975. $y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1-e^{-2x^2}\right)$.

976. $y=\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}-\dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arccotg}(a^{-x})$.

977. Najděte derivace a sestrojte grafy funkcí a jejich derivací, je-li
a) $y=|x|$; b) $y=x|x|$; c) $y=\ln|x|$.

978. Najděte derivace následujících funkcí:
a) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$; b) $y=|\sin^3 x|$; c) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$; d) $y=[x]\sin^2\pi x$.

Najděte derivace následujících funkcí, sestrojte grafy těchto funkcí i jejich derivací:

979. $y=\begin{cases} 1-x & \text{pro } -\infty<x<1, \\ (1-x)(2-x) & \text{pro } 1\le x\le 2, \\ -(2-x) & \text{pro } 2<x<+\infty. \end{cases}$

980. $y=\begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } a\le x\le b, \\ 0 & \text{vně uzavřeného intervalu } [a,b]. \end{cases}$

981. $y=\begin{cases} x & \text{pro } x<0, \\ \ln(1+x) & \text{pro } x\ge 0. \end{cases}$

982. $y=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{pro } |x|\le 1, \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2} & \text{pro } |x|>1. \end{cases}$

983. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & \text{pro } |x|\le 1, \\ \frac{1}{e} & \text{pro } |x|>1. \end{cases}$

984. Derivace logaritmu dané funkce $y=f(x)$ se nazývá *logaritmickou derivací* této funkce:

$$\frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Najděte logaritmickou derivaci funkce y, je-li:

a) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; b) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$; c) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

d) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

985. Nechť $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou diferencovatelné funkce proměnné x. Najděte derivaci funkce y, je-li:

a) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; b) $y=\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; c) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x)\ne 0;\ \psi(x)>0)$;

d) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

986. Najděte y', je-li:

a) $y=f(x^2)$; b) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$; c) $y=f(e^x)\,e^{f(x)}$; d) $y=f\{f[f(x)]\}$,

kde $f(u)$ je diferencovatelná funkce.

986.1 Vypočtěte $f'(0)$, je-li

$$f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-1000).$$

987. Dokažte následující pravidlo pro derivování determinantu n-tého řádu:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. Najděte $F'(x)$, je-li

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

989. Najděte $F'(x)$, je-li

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

990. Je-li dán graf funkce, sestrojte přibližně graf její derivace.

991. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má nespojitou derivaci.

992. Za jakých podmínek funkce

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ a } f(0) = 0$$

a) je spojitá v bodě $x = 0$; b) je diferencovatelná v bodě $x = 0$; c) má spojitou derivaci v bodě $x = 0$?

993. Za jakých podmínek má funkce

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \text{ a } f(0) = 0 \quad (m > 0)$$

a) omezenou derivaci v okolí počátku soustavy souřadnic; b) neomezenou derivaci v tomto okolí?

994. Najděte $f'(a)$, je-li

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

kde $\varphi(x)$ je funkce spojitá v bodě $x = a$.

995. Ukažte, že funkce

$$f(x) = |x - a|\,\varphi(x),$$

kde $\varphi(x)$ je spojitá funkce taková, že $\varphi(a) \neq 0$, nemá v bodě a derivaci. Čemu jsou rovny jednostranné derivace $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$?

996. Najděte příklad spojité funkce, která nemá derivaci v daných bodech $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

997. Ukažte, že funkce

$$f(x) = x^2 \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| \quad (x \neq 0) \text{ a } f(0) = 0$$

má v libovolném okolí bodu $x = 0$ body, v nichž není diferencovatelná, a přesto je v tomto bodě diferencovatelná. Načrtněte graf této funkce.

998. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \text{ racionální,} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální,} \end{cases}$$

je diferencovatelná pouze v bodě $x = 0$.

999. Vyšetřete, zda jsou následující funkce diferencovatelné:

a) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; b) $y = |\cos x|$; c) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$;

d) $y = \arcsin(\cos x)$;

e) $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{pro } |x| \leq 1; \\ |x| - 1 & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$

Pro funkci $f(x)$ určete její derivaci zleva $f'_-(x)$ a derivaci zprava $f'_+(x)$, je-li:

1000. $f(x) = |x|$.

1001. $f(x) = [x] \sin \pi x$.

1002. $f(x) = x \left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$.

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

1004. $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$.

1005. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

1006. $f(x) = |\ln|x||$ $(x \neq 0)$.

1007. $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1008. $f(x) = (x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ $(x \neq 2)$, $f(2) = 0$.

1009. Ukažte, že přestože je funkce $f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$ spojitá v bodě $x = 0$, nemá v tomto bodě derivaci zleva ani zprava.

1009.1 Nechť x_0 je bod nespojitosti prvního druhu funkce $f(x)$. Pak výrazy

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)}{h}$$

a

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)}{h}$$

nazýváme *zobecněnými jednostrannými derivacemi* (zleva nebo zprava) funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Najděte $f'_-(x_0)$ a $f'_+(x_0)$ v bodech nespojitosti x_0 funkce $f(x)$, je-li:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x^3}{x}}$; b) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$; c) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$.

1010. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \le x_0, \\ ax + b & \text{pro } x > x_0. \end{cases}$$

Najděte koeficienty a a b tak, aby byla funkce $f(x)$ spojitá a měla derivaci v bodě $x = x_0$.

1011. Nechť

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \le x_0, \\ ax + b & \text{pro } x > x_0, \end{cases}$$

kde funkce $f(x)$ má derivaci zleva v bodě $x = x_0$. Najděte koeficienty a a b tak, aby byla funkce $F(x)$ spojitá a měla derivaci v bodě x_0.

1012. Na uzavřeném intervalu $a \le x \le b$ sestrojte spojité a hladké napojení dvou polopřímek

$$y = k_1(x - a) \quad (-\infty < x < a),$$
$$y = k_2(x - b) \quad (b < x < +\infty)$$

pomocí kubické paraboly

$$y = A(x - a)(x - b)(x - c)$$

a vyjádřete závislost parametrů A a c na ostatních parametrech úlohy.

1013. Doplňte část křivky $y = \frac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ pomocí paraboly

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \le c)$$

tak, aby výsledná křivka byla grafem hladké funkce (a a b jsou neznámé parametry).

1014. Můžeme tvrdit, že součet funkcí $F(x)=f(x)+g(x)$ nemá derivaci v bodě $x=x_0$, jestliže: a) funkce $f(x)$ má derivaci v bodě x_0 a funkce $g(x)$ v tomto bodě derivaci nemá; b) ani jedna z funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v tomto bodě derivaci nemá?

1015. Můžeme tvrdit, že součin funkcí

$$F(x)=f(x)g(x)$$

nemá derivaci v bodě $x=x_0$, jestliže: a) funkce $f(x)$ má derivaci v bodě x_0 a funkce $g(x)$ v tomto bodě derivaci nemá; b) ani jedna z funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v tomto bodě derivaci nemá?

Uvažujte případy následujících funkcí v bodě $x_0=0$: a) $f(x)=x$, $g(x)=|x|$;

b) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$.

1016. Co můžeme říci o derivaci funkce

$$F(x)=f(g(x))$$

v daném bodě $x=x_0$, jestliže: a) funkce $f(x)$ má derivaci v bodě $x=g(x_0)$ a funkce $g(x)$ nemá derivaci v bodě $x=x_0$; b) funkce $f(x)$ nemá derivaci v bodě $x=g(x_0)$ a funkce $g(x)$ má derivaci v bodě $x=x_0$; c) funkce $f(x)$ nemá derivaci v bodě $x=g(x_0)$ a funkce $g(x)$ nemá derivaci v bodě $x=x_0$?

Uvažujte případy následujících funkcí v bodě $x_0=0$: a) $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$;

b) $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$; c) $f(x)=2x+|x|$, $g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$.

1017. Ve kterých bodech má graf funkce $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ svislé tečny?

Sestrojte tento graf.

1018. Může mít funkce $f(x)$ ve svém bodě nespojitosti a) konečnou derivaci; b) nevlastní derivaci? Uvažujte případ funkce $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

1019. Je-li $f(x)$ funkce diferencovatelná na omezeném intervalu (a,b) a $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, je pak nutně

$$1)\ \lim_{x\to a} f'(x)=\infty;\quad 2)\ \lim_{x\to a} |f'(x)|=+\infty?$$

Uvažujte případ funkce $f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$ pro $x\to 0$.

1020. Je-li $f(x)$ funkce diferencovatelná na omezeném intervalu (a,b) a $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$, je pak nutně

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty?$$

Uvažujte případ funkce $f(x)=\sqrt[3]{x}$ pro $x\to 0$.

1021. Nechť funkce $f(x)$ je diferencovatelná na intervalu $(x_0, +\infty)$ a nechť existuje $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Vyplývá z toho, že existuje $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$? Uvažujte případ funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$.

1022. Nechť je omezená funkce $f(x)$ diferencovatelná na intervalu $(x_0, +\infty)$ a nechť existuje $\lim_{x\to\infty} f'(x)$. Vyplývá z toho, že existuje konečná nebo nevlastní $\lim_{x\to\infty} f(x)$? Uvažujte případ funkce $f(x) = \cos(\ln x)$.

1023. Zachovává se derivací nerovnost mezi funkcemi?

1024. Najděte hodnoty následujících součtů:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

a

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}.$$

NÁVOD: Uvažujte derivaci $(x + x^2 + \ldots + x^n)'$.

1025. Najděte hodnoty následujících součtů:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$

a

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx.$$

1025:1 Najděte hodnotu součtu

$$S_n = \cosh x + 2\cosh 2x + \ldots + n\cosh nx.$$

NÁVOD: $S_n = (\sinh x + \sinh 2x + \ldots + \sinh nx)'$.

1026. Využitím rovnosti

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}}$$

najděte hodnotu součtu

$$S_n = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

1027. Dokažte, že derivace diferencovatelné sudé funkce je funkce lichá a že derivace diferencovatelné liché funkce je funkce sudá. Interpretujte výsledek geometricky.

1028. Dokažte, že derivace diferencovatelné periodické funkce je periodická funkce se stejnou periodou, jakou má funkce původní.

1029. Vypočtěte, jakou rychlostí roste obsah kruhu v okamžiku, kdy je jeho poloměr $R = 10\,\text{cm}$, jestliže poloměr kruhu roste rovnoměrně rychlostí $2\,\text{cm/s}$.

1030. Vypočtěte, jakou rychlostí se mění obsah a délka uhlopříčky obdélníka v okamžiku, kdy jsou délky jeho stran $x = 20\,\text{m}$ a $y = 15\,\text{m}$, jestliže se délka první strany zmenšuje rychlostí $1\,\text{m/s}$ a délka druhé strany se zvětšuje rychlostí $2\,\text{m/s}$.

1031. Parník A vyplul z přístavu na sever a parník B na východ. Jakou rychlostí roste jejich vzájemná vzdálenost, jestliže rychlost parníku A je 30 km/h a rychlost parníku B je 40 km/h.

1032. Nechť

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{pro } 0\le x\le 2,\\ 2x-2 & \text{pro } 2<x<+\infty \end{cases}$$

a nechť $S(x)$ je obsah oblasti vymezené křivkou $y=f(x)$, osou x a přímkou, která je kolmá na osu x v bodě x $(x\ge 0)$. Najděte analytické vyjádření funkce $S(x)$, vypočtěte její derivaci $S'(x)$ a sestrojte graf funkce $y=S'(x)$.

1033. Nechť je $S(x)$ obsah oblasti vymezené křivkou $y=\sqrt{a^2-x^2}$, osou x a dvěma přímkami, které jsou kolmé na osu x v bodech 0 a x $(|x|\le a)$. Najděte analytické vyjádření funkce $S(x)$, vypočtěte derivaci $S'(x)$ a sestrojte její graf.

§ 2. Derivace inverzní funkce. Derivace funkce zadané parametricky. Derivace implicitní funkce

1. **DERIVACE INVERZNÍ FUNKCE.** Diferencovatelná funkce $y=f(x)$ $(a<x<b)$ s derivací $f'(x)\neq 0$ má jednoznačně určenou spojitou inverzní funkci $x=f^{-1}(y)$, která je rovněž diferencovatelná, a platí

$$x_y'=\frac{1}{y_x'}.$$

2. **DERIVACE FUNKCE ZADANÉ PARAMETRICKY.** Soustava rovnic

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}\ (\alpha<t<\beta),$$

kde $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou diferencovatelné funkce a $\varphi'(t)\neq 0$, definuje na nějaké množině y jako diferencovatelnou funkci proměnné x:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

přičemž derivace této funkce je rovna

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}.$$

3. **DERIVACE IMPLICITNÍ FUNKCE.** Je-li $y=y(x)$ diferencovatelná funkce, která vyhovuje rovnici

$$F(x,y)=0,$$

pak derivaci $y'=y'(x)$ této implicitní funkce lze vyjádřit z rovnice

$$\frac{d}{dx}[F(x,y)]=0,$$

kde na funkci $F(x,y)$ pohlížíme jako na složenou funkci nezávisle proměnné x.

(Více podrobností o derivování implicitních funkcí najdete v části II, kapitola VI, §3).

1034. Dokažte, že existuje jednoznačně určená funkce $y=y(x)$, která vyhovuje rovnici $y^3+3y=x$, a vypočtěte její derivaci y'_x.

1035. Dokažte, že existuje jednoznačně určená funkce $y=y(x)$, která vyhovuje rovnici $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0\le\varepsilon<1)$, a vypočtěte její derivaci y'_x.

1036. Určete definiční obor inverzní funkce $x=x(y)$ a vypočtěte její derivaci, je-li: a) $y=x+\ln x$ $(x>0)$; b) $y=x+e^x$; c) $y=\sinh x$; d) $y=\operatorname{tgh} x$.

1037. Najděte jednoznačně určené spojité větve inverzní funkce $x=x(y)$, vypočtěte jejich derivace a sestrojte jejich grafy, je-li:

a) $y=2x^2-x^4$; b) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; c) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

1038. Načrtněte graf funkce $y=y(x)$ a vypočtěte její derivaci y'_x, je-li: $x=-1+2t-t^2$, $y=2-3t+t^3$. Čemu se rovná derivace $y'_x(x)$ v bodech $x=0$ a $x=-1$? Pro který bod (x,y) je $y'_x(x)=0$?

Najděte derivaci y'_x funkce $y(x)$ zadané parametricky (s kladnými hodnotami parametru), je-li:

1039. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

1040. $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$.

1041. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

1042. $x=a\cosh t$, $y=b\sinh t$.

1043. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

1044. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1045. $x=e^{2t}\cos^2 t$, $y=e^{2t}\sin^2 t$.

1046. $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. Ukažte, že funkce $y=y(x)$ určená soustavou rovnic

$$x=2t+|t|,\quad y=5t^2+4t|t|$$

je diferencovatelná v bodě $t=0$, přestože nelze její derivaci v tomto bodě určit standardním způsobem.

Najděte derivace y'_x následujících implicitních funkcí:

1048. $x^2+2xy-y^2=2x$.

Čemu je rovna y' pro $x=2$ a $y=4$ a pro $x=2$ a $y=0$?

1049. $y^2=2px$ (parabola).

1050. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (elipsa).

1051. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (parabola).

1052. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (astroida).

1053. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (logaritmická spirála).

1054. Najděte y'_x, je-li: a) $r = a\varphi$ (Archimedova spirála);

b) $r = a(1+\cos\varphi)$ (kardioida); c) $r = ae^{m\varphi}$ (logaritmická spirála),

kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ a $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ jsou polární souřadnice.

§ 3. Geometrický význam derivace

1. **ROVNICE TEČNY A NORMÁLY.** Rovnice *tečny* MT a *normály* MN ke grafu diferencovatelné funkce $y = f(x)$ v bodě $M = (x,y)$ tohoto grafu (viz obr. 7), mají tvar:

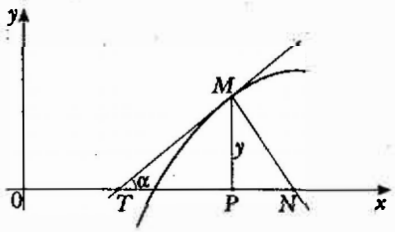
$$Y - y = y'(X - x)$$

a

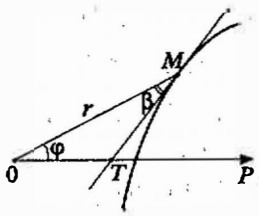
$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

kde X a Y jsou proměnné souřadnice bodu tečny, resp. normály, a kde $y' = f'(x)$ je hodnota derivace funkce v bodě dotyku.

2. **ÚSEČKY VYMEZENÉ TEČNOU NEBO NORMÁLOU.** Pro úsečky, které jsou vymezeny tečnou a normálou a které nazýváme: PT – subtangenta, PN – subnormála, MT – úsek tečny, MN – úsek normály (viz obr. 7), dostáváme užitím vztahu $\operatorname{tg}\alpha = y'$ následující vztahy:



Obr. 7



Obr. 8

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|,\ PN = |yy'|,\ MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},\ MN = |y|\sqrt{1+y'^2}.$$

3. **ÚHEL MEZI TEČNOU A VEKTOREM PRŮVODIČE BODU DOTYKU.** Jestliže $r = f(\varphi)$ je rovnice křivky v polárních souřadnicích a β je úhel mezi tečnou MT a vektorem průvodiče OM bodu dotyku M (viz obr. 8), pak platí

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'}.$$

1055. Najděte rovnice tečny a normály ke křivce $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ v bodech: a) $(-1,0)$; b) $(2,3)$; c) $(3,0)$.

1056. Ve kterých bodech je tečna křivky $y=2+x-x^2$ a) rovnoběžná s osou x; b) rovnoběžná s osou souměrnosti prvního kvadrantu?

1057. Dokažte, že parabola

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \quad (a\neq 0, x_1<x_2)$$

protíná osu x pod stejnými úhly α a β $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$.

1058. Na křivce $y=2\sin x$ $(-\pi\leq x\leq\pi)$ najděte ty části, kde je strmost křivky (tj. $|y'|$) větší než 1.

1059. Funkce $y=x$ a $y_1=x+0{,}01\sin(1000\pi x)$ se neliší jedna od druhé o více než 0,01. Co můžeme říci o maximální hodnotě rozdílu derivací těchto funkcí? Sestrojte odpovídající grafy.

1060. Pod jakým úhlem protíná křivka $y=\ln x$ osu x?

1061. Pod jakým úhlem se protínají křivky

$$y=x^2 \text{ a } x=y^2?$$

1062. Pod jakým úhlem se protínají křivky

$$y=\sin x \text{ a } y=\cos x?$$

1063. Pro jakou hodnotu parametru n protíná křivka

$$y=\operatorname{arctg} nx \quad (n>0)$$

osu x pod úhlem větším než 89°?

1063.1 Ukažte, že se křivka $y=|x|^\alpha$

a) pro $0<\alpha<1$ dotýká osy y; b) pro $1<\alpha<+\infty$ dotýká osy x.

1063.2 Ukažte, že limitní poloha sečny grafu funkce

$$y=\begin{cases}|x|^\alpha & \text{pro } x\neq 0, \text{ kde } \alpha\neq 0,\\ 1 & \text{pro } x=0,\end{cases}$$

která prochází bodem $(0,1)$, je osa y.

1064. Vypočtěte úhel mezi tečnami zleva a zprava ke křivce

a) $y=\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}$ v bodě $x=0$; b) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ v bodě $x=1$.

1065. Ukažte, že tečna logaritmické spirály $r=ae^{m\varphi}$ (a a m jsou konstanty) svírá s vektorem průvodiče jejího bodu dotyku konstantní úhel.

1066. Pomocí výpočtu délky subtangenty navrhněte způsob sestrojení tečny ke křivce $y=ax^n$.

1067. Dokažte, že pro parabolu $y^2=2px$

a) je délka subtangenty rovna dvojnásobku délky první souřadnice bodu dotyku.

b) je délka subnormály konstantní.
Navrhněte způsob sestrojení tečny k této parabole.

1068. Dokažte, že křivka exponenciální funkce

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

má konstantní subtangentu. Navrhněte způsob sestrojení tečny k této křivce.

1069. Vypočtěte délku úseku normály řetězovky

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

v jejím libovolném bodě (x_0, y_0).

1070. Dokažte, že délka úseku tečny astroidy

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0),$$

který je vymezený osami souřadnic, je konstantní veličina.

1071. V jakém vztahu musí být koeficienty a, b a c, aby se parabola $y = ax^2 + bx + c$ dotýkala osy x?

1072. Za jaké podmínky se kubická parabola $y = x^3 + px + q$ dotýká osy x?

1073. Pro jakou hodnotu parametru a se parabola $y = ax^2$ dotýká křivky $y = \ln x$?

1074. Dokažte, že se křivky

$$y = f(x) \ (f(x) > 0) \text{ a } y = f(x) \sin ax,$$

kde $f(x)$ je diferencovatelná funkce, dotýkají ve svých společných bodech.

1075. Ukažte, že třídy hyperbol $x^2 - y^2 = a$ a $xy = b$ vytvářejí *ortogonální síť*, tj. tyto křivky se protínají vždy pod pravým úhlem.

1076. Dokažte, že třídy parabol

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0) \text{ a } y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$$

vytvářejí ortogonální síť.

1077. Najděte rovnice tečny a normály ke křivce

$$x = 2t - t^2, \ y = 3t - t^3$$

v bodech a) $t = 0$; b) $t = 1$.

1078. Najděte rovnice tečny a normály ke křivce

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \ y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

v bodech a) $t = 0$; b) $t = 1$; c) $t = \infty$.

1079. Najděte rovnici tečny k cykloidě

$$x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t)$$

v libovolném bodě $t = t_0$. Popište způsob sestrojení tečny k cykloidě.

1080. Dokažte, že křivka traktrix

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right),\ y = a\sin t \quad (a > 0,\ 0 < t < \pi)$$

má úsek tečny o konstantní délce.

Sestavte rovnice tečny a normály v zadaných bodech k následujícím křivkám:

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ v bodě (6, 6,4). **1082.** $xy + \ln y = 1$ v bodě (1, 1).

§ 4. Diferenciál funkce

1. **DIFERENCIÁL FUNKCE.** Můžeme-li přírůstek funkce $y = f(x)$ nezávislé proměnné x napsat ve tvaru

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

kde $dx = \Delta x$, pak lineární část tohoto přírůstku nazveme *diferenciálem funkce* y a označujeme symbolem

$$dy = A(x)dx.$$

Pro existenci diferenciálu funkce $y = f(x)$ je nutné a stačí, aby existovala konečná derivace $y' = f'(x)$, přičemž platí

$$dy = y'dx. \qquad (1)$$

Vztah (1) platí i v případě, že proměnná x je funkcí další nezávisle proměnné (*invariantní vlastnost prvního diferenciálu*).

2. **ODHAD (NEKONEČNĚ) MALÉHO PŘÍRŮSTKU FUNKCE.** Pro odhad velikosti malého přírůstku diferencovatelné funkce $f(x)$ lze použít vztah

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

jehož relativní chyba je zanedbatelně malá pro dostatečně malé hodnoty $|\Delta x|$, jestliže $f'(x) \neq 0$. Navíc, jestliže je nezávisle proměnná x určena s limitní absolutní chybou Δ_x, pak limitní absolutní, resp. relativní chyby Δ_y a δ_y funkce $y = f(x)$ splňují přibližné rovnosti

$$\Delta_y = |y'|\Delta_x$$

a

$$\delta_y = \left|\frac{y'}{y}\right|\Delta_x.$$

1083. Pro funkci

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

vypočtěte: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$ a porovnejte jejich hodnoty, je-li: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0,1$; c) $\Delta x = 0,01$.

1084. Rovnice pohybu má tvar

$$x = 5t^2,$$

kde t měříme v sekundách a x v metrech. Vypočtěte pro časový okamžik $t = 2s$

přírůstek Δx a diferenciál vzdálenosti dx a porovnejte jejich hodnoty, je-li:
a) $\Delta t = 1\,\text{s}$; b) $\Delta t = 0{,}1\,\text{s}$; c) $\Delta t = 0{,}001\,\text{s}$.

Najděte diferenciál funkce y, je-li:

1085. $y = \frac{1}{x}$.

1086. $y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$.

1087. $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

1088. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$.

1089. $y = \arcsin\frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$.

1090. Vypočtěte:

a) $d(xe^x)$; b) $d(\sin x - x\cos x)$; c) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$; d) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; e) $d\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)$;

f) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; g) $d(\ln(1-x^2))$; h) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$;

i) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

Nechť u, v a w jsou diferencovatelné funkce proměnné x. Najděte diferenciál funkce y, je-li:

1091. $y = uvw$.

1092. $y = \frac{u}{v^2}$.

1093. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

1094. $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

1095. $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$.

1096. Vypočtěte: a) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$; b) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; c) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$;

d) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{cotg} x)}$; e) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

1097. Kruhová výseč má poloměr $R = 100\,\text{cm}$ a úhel $\alpha = 60°$. Jak se změní její obsah, jestliže se a) zvětší její poloměr R o 1 cm nebo b) zmenší úhel α o 30′? Najděte přesné a přibližné řešení.

1098. Dobu kyvu matematického kyvadla (v sekundách) vypočteme podle vzorce $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kde l je délka kyvadla v metrech a $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ gravitační zrychlení. Jak musíme změnit délku kyvadla $l = 20\,\mathrm{cm}$, aby se doba kyvu T zvětšila o 0,05 s?

Nahrazením přírůstku funkce diferenciálem vypočtěte přibližné hodnoty následujících výrazů:

1099. $\sqrt[3]{1{,}02}$. **1100.** $\sin 29°$. **1101.** $\cos 151°$.

1102. $\operatorname{arctg} 1{,}05$. **1103.** $\log 11$.

1104. Dokažte, že platí vztah

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0),$$

kde $|x| \ll a$ (symbol $A \ll B$ pro kladné A a B označuje, že hodnota A je podstatně menší ve srovnání s hodnotou B). Pomocí tohoto vztahu vypočtěte přibližně hodnoty a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{34}$; c) $\sqrt{120}$ a výsledky porovnejte s tabulkovými hodnotami.

1104.1 Dokažte, že platí vztah

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r \quad (a > 0, x > 0),$$

kde

$$0 < r < \frac{x^2}{8a^3}.$$

1105. Dokažte přibližnou rovnost

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0), \text{ kde } |x| \ll a.$$

Pomocí tohoto vztahu vypočtěte přibližně následující hodnoty:

a) $\sqrt[3]{9}$; b) $\sqrt[4]{80}$; c) $\sqrt[7]{100}$; d) $\sqrt[10]{1000}$.

1106. Naměřená hodnota délky strany čtverce je $x = 2{,}4\,\mathrm{m} \pm 0{,}05\,\mathrm{m}$. S jakou limitní absolutní, respektive relativní chybou lze určit obsah tohoto čtverce?

1107. S jakou relativní chybou je nutno změřit poloměr koule R, aby bylo možno určit její objem s přesností na 1%?

1108. Pro určení velikosti gravitačního zrychlení pomocí matematického kyvadla se používá vzorec $g = 4\pi^2 l/T^2$, kde l je jeho délka a T je doba kyvu. Jaký vliv má na výslednou hodnotu zrychlení g relativní chyba δ při měření a) délky l nebo b) doby kyvu kyvadla T?

1109. Určete absolutní chybu výpočtu dekadického logaritmu čísla x $(x>0)$, jestliže relativní chyba jeho určení je rovna δ.

1110. Dokažte, že úhly lze určit přesněji podle tabulky funkce tangens než podle tabulky funkce sinus se stejným počtem desetinných míst.

§ 5. Derivace a diferenciály vyšších řádů

1. **ZÁKLADNÍ DEFINICE.** *Derivace vyšších řádů* funkce $y=f(x)$ vypočteme pomocí následujícího vztahu (přitom předpokládáme, že odpovídající operace mají smysl!):

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}',\ (n=2,3,\ldots).$$

Má-li funkce $f(x)$ spojitou derivaci $f^{(n)}(x)$ na otevřeném intervalu (a,b), píšeme $f(x)\in C^{(n)}(a,b)$. Má-li funkce $f(x)$ všechny derivace spojité na otevřeném intervalu (a,b), pak používáme označení $f(x)\in C^{(\infty)}(a,b)$. Analogicky určíme *diferenciály vyšších řádů* funkce $y=f(x)$ postupně vztahy

$$d^n y=d(d^{n-1}y)\ \ (n=2,3,\ldots),$$

kde $d^1 y=dy=y'dx$.

Je-li x nezávisle proměnná, položíme

$$d^2x=d^3x=\ldots=0.$$

Pak platí vztahy

$$d^n y=y^{(n)}dx^n \text{ a } y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}.$$

2. **ZÁKLADNÍ VZTAHY.**

I. $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\quad (a>0);\quad (e^x)^{(n)}=e^x.$

II. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$

III. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$

IV. $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$

V. $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

3. **LEIBNIZOVA FORMULE.** Mají-li funkce $u=\varphi(x)$ a $v=\psi(x)$ derivace n-tého řádu (jsou n-krát diferencovatelné), pak platí

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(i)}v^{(n-i)},$$

kde $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$.

Analogicky pro diferenciál $d^n(uv)$ platí vztah

$$d^n(uv)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}d^{n-i}u\,d^i v,$$

kde $d^0u=u$ a $d^0v=v$.

Vyjádřete y'', je-li:

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

1112. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1113. $y = e^{-x^2}$.

1114. $y = \operatorname{tg} x$.

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

1116. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y = x \ln x$.

1118. $y = \ln(f(x))$.

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

1120. Najděte $y(0)$, $y'(0)$ a $y''(0)$, je-li

$$y = e^{\sin x}\cos(\sin x).$$

Nechť $u = \varphi(x)$ a $v = \psi(x)$ jsou dvakrát diferencovatelné funkce. Vyjádřete y'', je-li:

1121. $y = u^2$.

1122. $y = \ln \dfrac{u}{v}$.

1123. $y = \sqrt{u^2+v^2}$.

1124. $y = u^v \quad (u > 0)$.

Nechť $f(x)$ je třikrát diferencovatelná funkce. Vyjádřete y'' a y''', je-li:

1125. $y = f(x^2)$.

1126. $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1127. $y = f(e^x)$.

1128. $y = f(\ln x)$.

1129. $y = f(\varphi(x))$, kde $\varphi(x)$ má derivace dostatečně vysokých řádů.

1130. Najděte d^2y pro funkci $y = e^x$, jestliže: a) x je nezávisle proměnná; b) x je funkcí (argumentem) jiné proměnné.

Najděte d^2y, je-li x nezávisle proměnná a platí:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}$.

1132. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

1133. $y = x^x$.

Nechť u a v jsou dvakrát diferencovatelné funkce proměnné x. Najděte d^2y, je-li:

1134. $y = uv$.

1135. $y = \dfrac{u}{v}$.

1136. $y = u^m v^n$ (m a n jsou konstanty).

1137. $y = a^u \quad (a > 0)$.

1138. $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1139. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v}$.

Najděte derivace y'_x, y''_{x^2} a y'''_{x^3} funkce $y=y(x)$ zadané parametricky, je-li:

1140. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

1141. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

1142. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1143. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$.

1144. $x=f'(t)$, $y=tf'(t)-f(t)$.

1145. Nechť $y=f(x)$ má derivace dostatečně vysokých řádů. Najděte x', x'', x''' a $x^{(4)}$ inverzní funkce $x=f^{-1}(y)$ za předpokladu, že uvedené derivace existují.

Najděte y'_x, y''_{x^2} a y'''_{x^3} následujících implicitních funkcí $y=y(x)$:

1146. $x^2+y^2=25$. Čemu se rovnají y', y'' a y''' v bodě $(3,4)$?

1147. $y^2=2px$.

1148. $x^2-xy+y^2=1$.

Najděte y'_x a y''_x, je-li:

1149. $y^2+2\ln y=x^4$.

1150. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg} y/x}$ $(a>0)$.

1151. Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a dvakrát diferencovatelná pro $x\le x_0$. Určete koeficienty a, b a c tak, aby byla funkce

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{pro } x\le x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c & \text{pro } x>x_0 \end{cases}$$

dvakrát diferencovatelná.

1152. Hmotný bod se pohybuje po přímce v závislosti na čase

$$s=10+20t-5t^2.$$

Vypočtěte jeho rychlost a zrychlení. Čemu se rovnají jeho rychlost a zrychlení v čase $t=2$?

1153. Hmotný bod $M=(x,y)$ se rovnoměrně pohybuje po kružnici $x^2+y^2=a^2$ rychlostí jedna otáčka za T sekund. Spočítejte rychlost v a zrychlení j projekce bodu M na osu x, jestliže v čase $t=0$ byl bod v poloze $M_0=(a,0)$.

1154. Hmotný bod $M=(x,y)$ je v rovině xy vržen pod úhlem α vzhledem k horizontální ose počáteční rychlostí v_0. Sestavte rovnici pohybu hmotného bodu (zanedbejte přitom odpor vzduchu), určete jeho trajektorii, rychlost v a zrychlení j. Jaká bude největší dosažená výška a vzdálenost dopadu?

1155. Rovnice pohybu hmotného bodu mají tvar

$$x=4\sin\omega t-3\cos\omega t,\quad y=3\sin\omega t+4\cos\omega t$$ (ω je konstantní veličina).

Najděte jeho trajektorii, rychlost a zrychlení.

Najděte derivace požadovaného řádu následujících funkcí:

1156. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; najděte $y^{(6)}$ a $y^{(7)}$.

1157. $y = \frac{a}{x^m}$; najděte y'''.

1158. $y = \sqrt{x}$; najděte $y^{(10)}$.

1159. $y = \frac{x^2}{1-x}$; najděte $y^{(8)}$.

1160. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; najděte $y^{(100)}$.

1161. $y = x^2 e^{2x}$; najděte $y^{(20)}$.

1162. $y = \frac{e^x}{x}$; najděte $y^{(10)}$.

1163. $y = x \ln x$; najděte $y^{(5)}$.

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$; najděte $y^{(5)}$.

1165. $x^2 \sin 2x$; najděte $y^{(50)}$.

1166. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; najděte y'''.

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; najděte $y^{(10)}$.

1168. $y = x \sinh x$; najděte $y^{(100)}$.

1169. $y = e^x \cos x$; najděte $y^{(4)}$.

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; najděte $y^{(6)}$.

V následujících příkladech najděte diferenciály požadovaného řádu. Považujte přitom x za nezávisle proměnnou.

1171. $y = x^5$; najděte d^5y.

1172. $y = 1/\sqrt{x}$; najděte d^3y.

1173. $y = x \cos 2x$; najděte $d^{10}y$.

1174. $y = e^x \ln x$; najděte d^4y.

1175. $y = \cos x \cosh x$; najděte d^6y.

V následujících příkladech najděte diferenciály požadovaného řádu za předpokladu, že u má jako funkce proměnné x derivace dostatečně vysokých řádů.

1176. $y = u^2$; najděte $d^{10}y$.

1177. $y = e^u$; najděte d^4y.

1178. $y = \ln u$; najděte d^3y.

1179. Najděte d^2y, d^3y a d^4y funkce $y = f(x)$. Považujte přitom x za funkci nějaké nezávisle proměnné.

1180. Vyjádřete derivace y'' a y''' funkce $y = f(x)$ pomocí odpovídajících diferenciálů proměnných x a y a nepovažujte přitom x za nezávisle proměnnou.

1181. Ukažte, že funkce $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty, je řešením rovnice $y'' + y = 0$.

1182. Ukažte, že funkce $y = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty, je řešením rovnice $y'' - y = 0$.

1183. Ukažte, že funkce $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty, je řešením rovnice

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$$

(λ_1 a λ_2 jsou konstanty).

1184. Ukažte, že funkce

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)],$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty, je řešením rovnice

$$x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$$

(n je konstanta).

1185. Ukažte, že funkce

$$y = e^{x/\sqrt{2}}\left(C_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-x/\sqrt{2}}\left(C_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

kde C_1, C_2, C_3 a C_4 jsou libovolné konstanty, je řešením rovnice $y^{(4)} + y = 0$.

1186. Dokažte, že jestliže funkce $f(x)$ má derivaci n-tého řádu, pak platí

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b).$$

1187. Najděte $P^{(n)}(x)$, je-li

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Najděte $y^{(n)}$, je-li:

1188. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

1189. $y = \dfrac{1}{x(1 - x)}$.

1190. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

NÁVOD: Rozložte funkci na parciální zlomky.

1191. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$.

1192. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x}}$.

1193. $y = \sin^2 x$.

1194. $y = \cos^2 x$.

1195. $y = \sin^3 x$.

1196. $y = \cos^3 x$.

1197. $y = \sin ax \sin bx$.

1198. $y = \cos ax \cos bx$.

1199. $y = \sin ax \cos bx$.

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1202. $y = x \cos ax$.

1203. $y = x^2 \sin ax$.

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

1205. $y = e^x / x$.

1206. $y = e^x \cos x$.

1207. $y = e^x \sin x$.

1208. $y = \ln\dfrac{a + bx}{a - bx}$.

1209. $y = e^{ax} P(x)$, kde $P(x)$ je polynom.

1210. $y = x \sinh x$.

Najděte $d^n y$, je-li

1211. $y = x^n e^x$. **1212.** $y = \frac{\ln x}{x}$.

1213. Dokažte rovnosti:

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\sin(bx+c+n\varphi)$$

a

$$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\cos(bx+c+n\varphi),$$

$$\text{kde } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ a } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1214. Najděte $y^{(n)}$, je-li:

a) $y = \cosh ax \cos bx$; b) $y = \cosh ax \sin bx$.

1215. Převedením funkce $f(x) = \sin^{2p} x$, kde p je přirozené číslo, na trigonometrický polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx$ vypočtěte $f^{(n)}(x)$.

NÁVOD: Uvažujte výraz $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, kde $t = \cos x + i\sin x$ a $\bar{t} = \cos x - i\sin x$, a použijte Moivreovu větu.

1216. Najděte $f^{(n)}(x)$, je-li:

a) $f(x) = \sin^{2p+1} x$; b) $f(x) = \cos^{2p} x$; c) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

kde p je přirozené číslo (viz předchozí příklad).

Pro $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, kde i je komplexní jednotka a $f_1(x)$, $f_2(x)$ jsou reálné funkce reálné proměnné x, definujeme

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x).$$

1217. Pomocí rovnosti

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

dokažte, že

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}\sin[(n+1)\operatorname{arccotg} x].$$

NÁVOD: Použijte Moivreovu větu.

1218. Najděte n-tou derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Vypočtěte $f^{(n)}(0)$, je-li:

1219. a) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$; b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

1220. a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; c) $f(x) = \arcsin x$.

1221. a) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$; b) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

1222. a) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$; b) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1223. Vypočtěte $f^{(n)}(a)$, je-li

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x),$$

kde funkce $\varphi(x)$ má v okolí bodu a spojitou derivaci řádu $n-1$.

1224. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

(n je přirozené číslo) má v bodě $x = 0$ všechny derivace až do n-tého řádu včetně a nemá derivaci řádu $n+1$.

1225. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má v bodě $x = 0$ derivace všech řádů. Sestrojte graf této funkce.

1226. Dokažte, že *Čebyševovy polynomy*

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

jsou řešením rovnice

$$(1-x^2) T_m''(x) - x T_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

1227. Dokažte, že *Legendreovy polynomy*

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

jsou řešením rovnice

$$(1-x^2) P_m''(x) - 2x P_m'(x) + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

NÁVOD: Derivujte $(m+1)$-krát rovnost $(x^2-1)u' = 2mxu$, kde $u = (x^2-1)^m$.

1228. *Laguerreovy polynomy* jsou definovány vztahem

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Najděte explicitní vyjádření polynomu $L_m(x)$. Dokažte, že $L_m(x)$ je řešením rovnice

$$x L_m''(x) + (1-x) L_m'(x) + m L(x) = 0.$$

NÁVOD: Uvažujte rovnost $xu' + (x-m)u = 0$, kde $u = x^m e^{-x}$.

1229. Nechť $y=f(u)$ a $u=\varphi(x)$, kde $f(u)$ a $\varphi(x)$ jsou n-krát diferencovatelné funkce. Dokažte, že platí

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n} A_k(x) f^{(k)}(u),$$

kde koeficienty $A_k(x)$ $(k=1,\ldots,n)$ nezávisí na volbě funkce $f(u)$.

1230. Dokažte, že pro n-tou derivaci složené funkce $y=f(x^2)$ platí vztah

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2)+\ldots$$

1231. *Hermiteovy polynomy* jsou definovány vztahem

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)} \quad (m=0,1,2,\ldots).$$

Najděte explicitní vyjádření polynomu $H_m(x)$. Dokažte, že $H_m(x)$ je řešením rovnice

$$H_m''(x)-2xH_m'(x)+2mH_m(x)=0.$$

NÁVOD: Uvažujte rovnost $u'+2xu=0$, kde $u=e^{-x^2}$.

1232. Dokažte rovnost

$$(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{1/x}.$$

NÁVOD: Použijte metodu matematické indukce.

1232.1 Dokažte vztah

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n\ln x)=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \quad (x>0).$$

1232.2 Dokažte vztah

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x],$$

kde

$$C_n(x)=1-\frac{x^2}{}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

a

$$S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. Nechť $\frac{d}{dx}=D$ označuje operaci derivování a nechť

$$f(D)=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)D^k$$

je symbolický diferenciální polynom, kde $p_k(x)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ jsou spojité funkce proměnné x. Dokažte, že platí

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda\mathrm{I})u(x),$$

kde λ je konstanta a I identický operátor.

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULTY
Matematické oddělení
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

1234. Dokažte, že jestliže do rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y_x^{(k)} = 0$$

dosadíme $x = e^t$, kde t je nezávisle proměnná, pak tato rovnice bude mít tvar

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-I)\dots(D-kI+I)y = 0,$$

kde $D = \frac{d}{dt}$ a I identický operátor.

§ 6. Rolleova, Lagrangeova a Cauchyova věta

1. **ROLLEOVA VĚTA.** Jestliže jsou splněny následující podmínky: 1) funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$; 2) $f(x)$ má konečnou derivaci $f'(x)$ uvnitř tohoto intervalu a 3) $f(a) = f(b)$, pak existuje nejméně jedna hodnota c z intervalu (a,b) tak, že

$$f'(c) = 0.$$

2. **LAGRANGEOVA VĚTA.** Jestliže jsou splněny následující podmínky: 1) funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$; 2) $f(x)$ má konečnou derivaci $f'(x)$ na intervalu (a,b), pak

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \text{ kde } a < c < b$$

(*věta o střední hodnotě*).

3. **CAUCHYOVA VĚTA.** Jestliže jsou splněny následující podmínky: 1) funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definované a spojité na uzavřeném intervalu $[a,b]$; 2) $f(x)$ a $g(x)$ mají konečné derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ na intervalu (a,b); 3) $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ pro $a < x < b$ a 4) $g(a) \neq g(b)$, pak

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ kde } a < c < b.$$

1235. Ověřte platnost Rolleovy věty na příkladu funkce

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

1236. Funkce $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ je rovna nule v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$, a přesto platí $f'(x) \neq 0$ pro $-1 \leq x \leq 1$. Vysvětlete zdánlivý rozpor s Rolleovou větou.

1237. Nechť funkce $f(x)$ má konečnou derivaci $f'(x)$ v každém bodě omezeného nebo neomezeného intervalu (a,b) a nechť

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x).$$

Dokažte, že $f'(c) = 0$ pro nějaký bod c z intervalu $(a;b)$.

1238. Nechť 1) funkce $f(x)$ je definovaná a má spojitou derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n-1$ na uzavřeném intervalu $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ má derivaci řádu $f^{(n)}(x)$ na intervalu (x_0, x_n) a 3) platí rovnosti

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

Dokažte, že pak v intervalu (x_0, x_n) existuje nejméně jeden bod ξ tak, že $f^{(n)}(\xi) = 0$.

1239. Nechť 1) funkce $f(x)$ je definovaná a má spojitou derivaci $f^{(p+q)}(x)$ řádu $p+q$ na uzavřeném intervalu $[a,b]$; 2) $f(x)$ má derivaci $f^{(p+q+1)}(x)$ řádu $p+q+1$ na intervalu (a,b) a 3) platí rovnosti

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0$$

a

$$f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Dokažte, že pak $f^{(p+q+1)}(c) = 0$, kde c je nějaký bod intervalu (a,b).

1240. Dokažte, že jsou-li všechny kořeny polynomu

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

s reálnými koeficienty a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ reálné, pak i derivace $P_n'(x), P_n''(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ mají pouze reálné kořeny.

1241. Dokažte, že všechny kořeny Legendreova polynomu

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

jsou reálné a leží v intervalu $(-1, 1)$.

1242. Dokažte, že všechny kořeny Laguerreova polynomu

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

jsou kladné.

1243. Dokažte, že všechny kořeny Hermiteova polynomu

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

jsou reálné.

1244. Najděte na křivce $y = x^3$ bod, ve kterém je tečna ke křivce rovnoběžná s tětivou, která spojuje body $(-1, -1)$ a $(2, 8)$.

1245. Platí věta o střední hodnotě i pro funkci $f(x) = 1/x$ na intervalu $[a,b]$, je-li $ab < 0$?

1246. Najděte funkci $\theta = \theta(x, \Delta x)$ tak, aby platilo

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

je-li: a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$; b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = 1/x$; d) $f(x) = e^x$.

1246.1 Nechť $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ a pro libovolné x a h platí rovnost

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x).$$

Dokažte, že pak $f(x) = ax + b$, kde a a b jsou konstanty.

1246.2 Nechť $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ a pro libovolné x a h platí rovnost

$$f(x+h) - f(x) = hf'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Dokažte, že pak $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b a c jsou konstanty.

1247. Dokažte, že pokud $x \geq 0$, pak

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}},$$

kde

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$$

přičemž $\lim_{x \searrow 0} \theta(x) = 1/4$ a $\lim_{x \to +\infty} \theta(x) = 1/2$.

1248. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{pro } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Vypočtěte hodnotu c z věty o střední hodnotě pro funkci $f(x)$ na intervalu $[0, 2]$.

1249. Nechť $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, kde $0 < \xi(x) < x$. Dokažte, že je-li $f(x) = x \sin(\ln x)$ pro $x > 0$ a $f(0) = 0$, pak je funkce $\xi = \xi(x)$ nespojitá na libovolně malém intervalu $(0, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$.

1250. Nechť funkce $f(x)$ má spojitou derivaci $f'(x)$ na intervalu (a, b). Lze pak ke každému bodu ξ z intervalu (a, b) najít dvojici bodů x_1 a x_2 z tohoto intervalu tak, aby platilo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

Uvažujte funkci $f(x) = x^3$ $(-1 \leq x \leq 1)$ a $\xi = 0$.

1251. Dokažte následující nerovnosti:

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$; b) $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$, je-li $0 < y < x$ a $p > 1$;

c) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|$; d) $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, je-li $0 < b < a$.

1252. Vysvětlete proč neplatí Cauchyova věta pro funkce

$$f(x)=x^2 \text{ a } g(x)=x^3$$

na uzavřeném intervalu $[-1,1]$.

1253. Nechť je funkce $f(x)$ diferencovatelná na uzavřeném intervalu $[x_1,x_2]$, přičemž $x_1x_2>0$. Dokažte, že

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

kde $x_1<\xi<x_2$.

1254. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná, ale není omezená na omezeném intervalu (a,b), pak ani její derivace $f'(x)$ není omezená na intervalu (a,b). Obrácené tvrzení neplatí (najděte protipříklad).

1255. Dokažte, že má-li funkce $f(x)$ na omezeném nebo neomezeném intervalu (a,b) omezenou derivaci $f'(x)$, pak je $f(x)$ na intervalu (a,b) stejnoměrně spojitá.

1256. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná na neomezeném intervalu $(x_0,+\infty)$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, pak je $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, tj. $f(x)=o(x)$ pro $x\to+\infty$.

1257. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ diferencovatelná na neomezeném intervalu $(x_0,+\infty)$ a $f(x)=o(x)$ pro $x\to+\infty$, pak $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$. Speciálně, jestliže existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=k$, pak $k=0$.

1258. a) Dokažte, že pokud: 1) je funkce $f(x)$ definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $[x_0,X]$; 2) má funkce $f(x)$ konečnou derivaci $f'(x)$ na intervalu (x_0,X) a 3) existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim\limits_{x\searrow x_0} f'(x)$, pak existuje konečná, respektive nekonečná jednostranná derivace $f'_+(x_0)$ a $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\searrow x_0} f'(x)$.

b) Ukažte, že pro funkci

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad (x\neq 1) \text{ a } f(1)=0$$

existuje konečná limita $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$, a přesto funkce $f(x)$ nemá jednostranné derivace $f'_-(1)$ a $f'_+(1)$. Interpretujte toto tvrzení geometricky. Naproti tomu v tomto bodě existují zobecněné jednostranné derivace (viz úloha **1009.1**).

1259. Dokažte, že jestliže $f'(x)=0$ pro $a<x<b$, pak $f(x)=\text{const}$ pro $a<x<b$.

1260. Dokažte, že jediná funkce $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, která má konstantní derivaci $f'(x) = k$, je lineární funkce tvaru $f(x) = kx + b$.

1261. Co můžeme říci o funkci $f(x)$, je-li $f^{(n)}(x) = 0$?

1261.1 Nechť $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$ a ke každému x existuje přirozené číslo n_x $(n_x \leq n)$ tak, že

$$f^{(n_x)}(x) = 0.$$

Dokažte, že funkce $f(x)$ je polynom.

1262. Dokažte, že jediná funkce $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, která vyhovuje rovnici

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{const}),$$

je exponenciální funkce $y = Ce^{\lambda x}$, kde C je libovolná konstanta.

NÁVOD: Uvažujte derivaci $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. Ověřte, že funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \text{ a } g(x) = \operatorname{arctg} x$$

mají stejné derivace v oblastech 1) $x<1$ a 2) $x>1$. Najděte vztah mezi těmito funkcemi.

1264. Dokažte následující rovnosti:

a) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$ pro $|x| \geq 1$;

b) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ pro $|x| \leq \frac{1}{2}$.

1265. Dokažte, že pokud funkce $f(x)$: 1) je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$; 2) má konečnou derivaci $f'(x)$ uvnitř tohoto intervalu a 3) není na něm lineární, pak v intervalu (a,b) existuje nejméně jeden bod c tak, že

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

Interpretujte toto tvrzení geometricky.

1266. Dokažte, že pokud 1) funkce $f(x)$ má druhou derivaci $f''(x)$ na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a 2) platí $f'(a) = f'(b) = 0$, pak v intervalu (a,b) existuje aspoň jeden bod c tak, že

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

1267. Automobil se začal pohybovat z nějakého počátečního bodu a za čas t sekund urazil vzdálenost s metrů. Dokažte, že v některém časovém okamžiku musela být absolutní hodnota okamžitého zrychlení automobilu větší nebo rovna $\frac{4s}{t^2}\,\mathrm{ms}^{-2}$.

§ 7. Monotónní funkce. Nerovnosti

1. **ROSTOUCÍ A KLESAJÍCÍ FUNKCE.** Funkci $f(x)$ nazýváme *ostře rostoucí (ostře klesající)* na uzavřeném intervalu $[a,b]$, jestliže

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ pro } a \le x_1 < x_2 \le b$$

(resp. $f(x_2) < f(x_1)$ pro $a \le x_1 < x_2 \le b$).

Jestliže diferencovatelná funkce $f(x)$ roste (klesá) na uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak je $f'(x) \ge 0$ pro $a \le x \le b$ (resp. $f'(x) \le 0$ pro $a \le x \le b$).

2. **POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA MONOTONIE FUNKCE.** Jestliže je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a uvnitř tohoto intervalu má kladnou (zápornou) derivaci $f'(x)$, pak je $f(x)$ rostoucí (resp. klesající) na $[a,b]$.

Určete intervaly ostré monotonie následujících funkcí:

1268. $y = 2 + x - x^2$.

1269. $y = 3x - x^3$.

1270. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1271. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \ge 0)$.

1272. $y = x + \sin x$.

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

1274. $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$.

1275. $y = \dfrac{x^2}{2^x}$.

1276. $y = x^n e^{-x} \quad (n > 0,\ x \ge 0)$.

1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

1278. $f(x) = x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sin\ln x\right)$, je-li $x > 0$, a $f(0) = 0$.

1279. Dokažte, že s rostoucím počtem stran n obvod p_n pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice roste a obvod P_n pravidelného n-úhelníku této kružnici opsaného klesá. Použijte toto tvrzení a dokažte, že p_n a P_n mají společnou limitu pro $n \to \infty$.

1280. Dokažte, že funkce $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ roste na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, +\infty)$.

1281. Dokažte, že polynomiální funkce

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad (n \ge 1, a_n \ne 0)$$

je ostře monotónní funkcí na intervalech $(-\infty, -x_0)$ a $(x_0, +\infty)$, kde x_0 je dostatečně velké kladné číslo.

1282. Dokažte, že racionální lomená funkce

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}\quad (a_nb_m\neq 0),$$

která není konstantní, je ostře monotónní na intervalech $(-\infty, -x_0)$ a $(x_0, +\infty)$, kde x_0 je dostatečně velké kladné číslo.

1283. Platí, že derivace monotónní funkce je monotónní funkcí?
Uvažujte případ funkce $f(x)=x+\sin x$.

1284. Dokažte, že je-li $\varphi(x)$ rostoucí diferencovatelná funkce a

$$|f'(x)|\leq\varphi'(x) \text{ pro } x\geq x_0,$$

pak

$$|f(x)-f(x_0)|\leq\varphi(x)-\varphi(x_0) \text{ pro } x\geq x_0.$$

Interpretujte toto tvrzení geometricky.

1285. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $a\leq x<+\infty$ a $f'(x)>k>0$ pro $x>a$, kde k je konstanta. Dokažte, že je-li $f(a)<0$, pak má rovnice $f(x)=0$ právě jedno reálné řešení v intervalu $\left(a, a-\frac{f(a)}{k}\right)$.

1286. Funkci $f(x)$ *nazýváme rostoucí v bodě* x_0, když v nějakém okolí $|x-x_0|<\delta$ je znaménko přírůstku funkce $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ identické se znaménkem přírůstku argumentu $\Delta x_0=x-x_0$. Dokažte, že pokud funkce $f(x)$ $(a<x<b)$ roste v každém bodě nějakého omezeného nebo neomezeného intervalu (a, b), pak je funkce na tomto intervalu rostoucí.

1287. Dokažte, že funkce

$$f(x)=x+x^2\sin\frac{2}{x} \text{ pro } x\neq 0 \text{ a } f(0)=0,$$

je rostoucí v bodě $x=0$, ale není rostoucí na žádném intervalu tvaru $(-\varepsilon, \varepsilon)$, který tento bod obsahuje, přičemž $\varepsilon>0$ je libovolně malá veličina. Načrtněte graf této funkce.

1288. Dokažte tvrzení: pokud 1) jsou funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ n-krát diferencovatelné; 2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ a 3) $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$ pro $x>x_0$, pak platí nerovnost

$$\varphi(x)>\psi(x) \text{ pro } x>x_0.$$

1289. Dokažte následující nerovnosti:

a) $e^x>1+x$ pro $x\neq 0$; b) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ pro $x>0$;

c) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ pro $x > 0$; d) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ pro $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

e) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ pro $x > 0$, $y > 0$ a $0 < \alpha < \beta$.

Interpretujte nerovnosti a) až d) geometricky.

1290. Dokažte nerovnost

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \text{ pro } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

1291. Dokažte, že pro $x > 0$ platí nerovnost

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. Aritmetická a geometrická posloupnost mají stejný počet členů. Všechny členy jsou kladné a odpovídající první a poslední členy jsou stejné. Dokažte, že součet členů takovéto aritmetické posloupnosti je větší než součet členů geometrické posloupnosti.

1293. Pomocí nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

kde x, a_k a b_k $(k = 1, \ldots, n)$ jsou reálná čísla, dokažte *Cauchyovu nerovnost*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

1294. Dokažte, že aritmetický průměr kladných čísel je menší nebo roven jejich kvadratickému průměru, tj.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

1295. Dokažte, že geometrický průměr kladných čísel je menší nebo roven aritmetickému průměru těchto čísel, tj.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

NÁVOD: Užijte metody matematické indukce.

1296. *Průměrem s-tého stupně* dvou kladných čísel a a b nazýváme funkci

$$\Delta_s(a,b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{1/s}, \text{ je-li } s \neq 0,$$

a

$$\Delta_0(a,b) = \lim_{s \to 0} \Delta_s(a,b).$$

Pro $s = -1$ obdržíme harmonický průměr; pro $s = 0$ geometrický průměr (ověřte!); pro $s = 1$ aritmetický průměr a pro $s = 2$ kvadratický průměr.

Dokažte, že platí následující tvrzení:

1) $\min(a,b) \le \Delta_s(a,b) \le \max(a,b)$;

2) funkce $\Delta_s(a,b)$ je pro $a \neq b$ rostoucí funkcí proměnné s;

3) $\lim_{s \to -\infty} \Delta_s(a,b) = \min(a,b)$; $\lim_{s \to +\infty} \Delta_s(a,b) = \max(a,b)$.

NÁVOD: Uvažujte výraz $\frac{d}{ds}[\ln \Delta_s(a,b)]$.

1297. Dokažte následující nerovnosti:

a) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ pro $\alpha \ge 2$, $x > 1$; b) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$ pro $n > 1$, $x > a > 0$;

c) $1 + 2\ln x \le x^2$ pro $x > 0$.

§ 8. Konvexní a konkávní funkce. Inflexní body

1. **POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY PRO KONVEXITU A KONKÁVNOST.** Graf diferencovatelné funkce $y = f(x)$ se nazývá *konvexním (konkávním)* na uzavřeném intervalu $[a,b]$, jestliže se odpovídající úsek její křivky

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

nachází nad (respektive pod) tečnou v libovolném bodě tohoto intervalu. Postačující podmínkou proto, aby funkce byla konvexní (respektive konkávní), je za předpokladu existence druhé derivace $f''(x)$ na $a \le x \le b$ splnění nerovnosti

$$f''(x) > 0 \text{ (respektive } f''(x) < 0) \text{ pro } a < x < b.$$

2. **POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA PRO EXISTENCI INFLEXNÍHO BODU.** Bod, ve kterém se mění konvexita grafu funkce v konkávnost nebo opačně, nazýváme *inflexním bodem*. Bod x_0, pro který buď $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje, přičemž $f'(x_0)$ je definována, je inflexním bodem funkce, pokud $f''(x)$ mění v tomto bodě x_0 znaménko.

1298. Vyšetřete konvexitu a konkávnost křivky

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

v bodech $(-1,0)$, $(1,2)$ a $(0,0)$.

Najděte intervaly konvexity a konkávnosti a inflexní body následujících funkcí:

1299. $y = 3x^2 - x^3$.

1300. $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$.

1301. $y = x + x^{5/3}$.

1302. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1303. $y = x + \sin x$.

1304. $y = e^{-x^2}$.

1305. $y = \ln(1 + x^2)$.

1306. $y = x \sin(\ln x)$ $(x > 0)$.

1307. $y = x^x$ $(x > 0)$.

1308. Ukažte, že křivka

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

má tři inflexní body, které leží na jedné přímce. Sestrojte graf této funkce.

1309. Pro jaký parametr h má „pravděpodobnostní křivka"

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \quad (h>0)$$

inflexní body $x = \pm\sigma$?

1310. Vyšetřete konvexnost a konkávnost cykloidy

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (a>0).$$

1311. Nechť je funkce $f(x)$ na intervalu $a \le x < +\infty$ dvakrát diferencovatelná, přičemž 1) $f(a) = A > 0$; 2) $f'(a) < 0$; 3) $f''(x) \le 0$ pro $x > a$. Dokažte, že rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu $(a, +\infty)$ právě jeden reálný kořen.

1312. Funkci $f(x)$ nazýváme *ostře konvexní* (*ostře konkávní*) na otevřeném intervalu (a,b), jestliže pro libovolné dva body z tohoto intervalu x_1 a x_2 a libovolnou dvojici čísel λ_1 a λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) platí nerovnost

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

respektive

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Dokažte, že platí: 1) funkce $f(x)$ je ostře konvexní na (a,b), je-li $f''(x) > 0$ pro $a < x < b$; 2) $f(x)$ je ostře konkávní na (a,b), je-li $f''(x) < 0$ pro $a < x < b$.

1313. Ukažte, že funkce x^n $(n>1)$, e^x, $x\ln x$ jsou ostře konvexní na intervalu $(0, +\infty)$ a funkce x^n $(0<n<1)$, $\ln x$ jsou ostře konkávní na intervalu $(0, +\infty)$.

1314. Dokažte následující nerovnosti a objasněte jejich geometrický význam:

a) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ $(x>0, y>0, x\ne y, n>1)$; b) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{(x+y)/2}$ $(x \ne y)$;

c) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$, je-li $x>0$ a $y>0$.

1314.1 Nechť $f''(x) \ge 0$ pro $a \le x \le b$. Dokažte, že

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

pro každé x_1 a $x_2 \in [a,b]$.

1315. Dokažte, že každá omezená konvexní či konkávní funkce je všude spojitá a má jednostranné derivace zleva i zprava.

1316. Nechť je funkce $f(x)$ dvakrát diferencovatelná na intervalu (a,b) a nechť $f''(\xi) \neq 0$ pro nějaký bod $a < \xi < b$. Dokažte, že v intervalu (a,b) existují dva různé body x_1 a x_2 tak, že platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ dvakrát diferencovatelná na neomezeném intervalu $(x_0, +\infty)$ a

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

pak v intervalu $(x_0, +\infty)$ existuje aspoň jeden bod ξ, pro který $f''(\xi) = 0$.

§ 9. Výpočet limit pomocí l'Hospitalova pravidla

PRVNÍ L'HOSPITALOVO PRAVIDLO (výpočet limit typu $\frac{0}{0}$). Jestliže 1) funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány a spojité na nějakém okolí U_ε [1] bodu a (a je reálné číslo nebo symbol ∞) a pro $x \to a$ obě funkce konvergují k nule:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0;$$

2) v okolí U_ε bodu a existují derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ (s možnou výjimkou samotného bodu a), přičemž se nikde v tomto okolí nerovnají nule; 3) existuje konečná nebo nevlastní limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DRUHÉ L'HOSPITALOVO PRAVIDLO (výpočet limit typu $\frac{\infty}{\infty}$) Jestliže:
1) funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají pro $x \to a$ nevlastní limitu

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

(a je reálné číslo nebo symbol ∞);

2) pro všechna x z nějakého okolí U_ε bodu a existují derivace $f'(x)$ a $g'(x)$, přičemž platí

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \text{ pro } x \in U_\varepsilon \text{ a } x \neq a;$$

[1] Okolím U_ε bodu a se rozumí množina čísel x, která vyhovují nerovnosti: $0 < |x - a| < \varepsilon$, je-li a reálné číslo, a $|x| > 1/\varepsilon$, je-li a symbol ∞.

3) existuje konečná nebo nevlastní limita

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogická pravidla platí i pro limity zleva a zprava.

Výpočet limit typu $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^{0} atd.: pomocí algebraických transformací a logaritmování se tyto neurčité výrazy převedou na dva základní typy $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Vypočtěte hodnoty následujících výrazů:

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

1319. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x-\cos x}{x^2}$.

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

1321. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

1322. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$.

1323. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2}$.

1324. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

1325. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

1327. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$.

1330. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tgh}x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{argsinh}(\sinh x)-\operatorname{argsinh}(\sin x)}{\sinh x-\sin x}$, kde $\operatorname{argsinh}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon>0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,\ n>0)$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-0{,}01x}$.

1340. $\lim\limits_{x\nearrow 1}\ln x\ln(1-x)$.

1341. $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\varepsilon}\ln x \quad (\varepsilon>0)$.

1342. $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x-1}$.

1344. $\lim\limits_{x\to 0}(x^{x^x}-1)$.

1345. $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{k/(1+\ln x)}$.

1346. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$.

1347. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\pi x/2}$.

1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg}x)^{\sin x}$.

1350. $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$.

1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{cotg}(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{1/x^2}$.

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\quad(a>0)$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\quad(a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$.

1362. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{tgh}x)^x$.

1363. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{argsinh}x}{x}\right)^{1/x^2}$, kde $\operatorname{argsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1364. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$.

1365. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

1366. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/x^2}$.

1367. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cosh x}{\sqrt[m]{\cosh x}-\sqrt[n]{\cosh x}}$.

1368. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cotgh} x}$.

1368.1 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

1369. $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\,\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

1370. $\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+1/x}-x^{1+1/(x+a)}\right]$.

1371. Najděte $\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}$, jestliže křivka $y=f(x)$ prochází pro $x\to 0$ počátkem soustavy souřadnic $(0,0)$ $(\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0)$ pod úhlem α.

1372. Dokažte, že pokud graf spojité funkce $y=f(x)$ prochází pro $x\searrow 0$ počátkem soustavy souřadnic $(\lim_{x\searrow 0} f(x)=0)$ a pro $0<x<\varepsilon$ je celý uvnitř ostrého úhlu sevřeného přímkami $y=-kx$ a $y=kx$ $(k\neq\infty)$, pak $\lim_{x\searrow 0} x^{f(x)}=1$.

1373. Dokažte, že jestliže funkce $f(x)$ má druhou derivaci $f''(x)$, pak

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

1373.1 Vyšetřete, zda je následující funkce diferencovatelná v bodě $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1} & \text{pro } x\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{pro } x=0.\end{cases}$$

1373.2 Najděte asymptotu křivky $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ $(x>0)$.

1374. Vyšetřete, zda se dá některé l'Hospitalovo pravidlo použít k výpočtu následujících limit:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$; c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

1375. Najděte limitu podílu obsahu kruhové úseče s tětivou délky b a výškou h a obsahu rovnoramenného trojúhelníka, který je do úseče vepsaný, jestliže se délka oblouku příslušné části kružnice při konstantním poloměru R blíží nule. Pomocí získaného vztahu odvoďte přibližný vzorec pro obsah kruhové úseče ve tvaru

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

§ 10. Taylorova věta

1. **LOKÁLNÍ TAYLOROVA VĚTA.** Jestliže funkce $f(x)$ 1) je definována na nějakém okolí $|x - x_0| < \varepsilon$ bodu x_0; 2) má v tomto okolí derivace $f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$ do řádu $n-1$ včetně; 3) v bodě x_0 má derivaci n-tého řádu $f^{(n)}(x_0)$, pak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n, \tag{1}$$

kde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Speciálně pro $x_0 = 0$ dostaneme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{2}$$

Vyjádření (1) je za uvedených podmínek jednoznačné.

Jestliže v bodě x_0 existuje derivace $f^{(n+1)}(x_0)$, pak je možné vyjádřit zbytkový člen ve vzorci (1) ve tvaru $O^*((x - x_0)^{n+1})$.

Pomocí lokální Taylorovy věty (2) je možné odvodit pět následujících důležitých rozvojů:

I. $e = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$

IV. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$

V. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$

2. **TAYLOROVA VĚTA.** Jestliže funkce $f(x)$ 1) je definována na uzavřeném intervalu $[a, b]$; 2) má na tomto intervalu spojité derivace $f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$; 3) pro $a < x < b$ má konečnou derivaci $f^{(n)}(x)$, pak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_n(x) \quad (a \le x \le b),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0<\theta<1)$$

(zbytkový člen v Lagrangeově tvaru) nebo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n \quad (0<\theta_1<1)$$

(zbytkový člen v Cauchyově tvaru).

1376. Rozložte polynom $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ na celé nezáporné mocniny dvojčlenu $x + 1$.

Najděte rozklad následujících funkcí na celé nezáporné mocniny proměnné x až do daného členu včetně:

1377. $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ do členu s x^4. Čemu se rovná $f^{(4)}(0)$?

1378. $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ do členu s x^2.

1379. $\sqrt[m]{a^m + x}$ $(a>0)$ do členu s x^2.

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ do členu s x^3.

1381. e^{2x-x^2} do členu s x^5.

1382. $\dfrac{x}{e^x - 1}$ do členu s x^4.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ do členu s x^{13}.

1384. $\ln\cos x$ do členu s x^6.

1385. $\sin(\sin x)$ do členu s x^3.

1386. $\operatorname{tg} x$ do členu s x^5.

1387. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ do členu s x^6.

1388. Najděte první tři členy rozkladu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ na celé nezáporné mocniny rozdílu $x - 1$.

1389. Rozložte funkci $f(x) = x^x - 1$ na celé nezáporné mocniny rozdílu $x - 1$ do členu s $(x-1)^3$.

1390. Funkci $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$ aproximujte v okolí bodu $x = 0$ parabolou druhého stupně.

1391. Rozložte funkci $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x \quad (x>0)$ na celé nezáporné mocniny zlomku $\frac{1}{x}$ do členu s $\frac{1}{x^3}$.

1392. Najděte rozklad funkce $f(h)=\ln(x+h) \quad (x>0)$ na celé nezáporné mocniny přírůstku h do členu s h^n, kde n je přirozené číslo.

1393. Nechť

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

přičemž $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. Dokažte, že pak $\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

1393.1 Nechť pro $x\to 0$ je $f(x)=1+kx+o(x)$. Dokažte, že $\lim_{x\to 0}[f(x)]^{1/x}=e^k$.

1393.2 Nechť $f(x)\in C^{(2)}[0,1]$ a $f(0)=f(1)=0$, přičemž $|f''(x)|\le A$ pro $x\in(0,1)$. Dokažte, že $|f'(x)|\le\frac{A}{2}$ pro $0\le x\le 1$.

1393.3 Nechť $f(x) \quad (-\infty<x<+\infty)$ je dvakrát diferencovatelná funkce a $M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty \quad (k=0,1,2)$. Dokažte nerovnost $M_1^2\le 2M_0M_2$.

1394. Odhadněte absolutní chybu v následujících přibližných vztazích:

a) $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ pro $0\le x\le 1$; b) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$ pro $|x|\le\frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{tg}x\approx x+\frac{x^3}{3}$ pro $|x|\le 0{,}1$; d) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ pro $0\le x\le 1$.

1395. Pro jaké hodnoty x platí přibližný vztah $\cos x=1-\frac{x^2}{2}$ s přesností na 0,0001?

1395.1 Dokažte vztah

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a+\frac{x}{na^{n-1}}-r \quad (n\ge 2,\ a>0,\ x>0),\ 0<r<\frac{n-1}{2n^2}\,\frac{x^2}{2^{n-1}}.$$

1396. Pomocí Taylorovy věty vypočítejte přibližně hodnotu následujících výrazů:

a) $\sqrt[3]{30}$; b) $\sqrt[5]{250}$; c) $\sqrt[12]{4000}$; d) $\sqrt{e}$; e) $\sin 18°$; f) $\ln 1{,}2$; g) $\operatorname{arctg}0{,}8$; h) $\arcsin 0{,}45$; i) $(1{,}1)^{1{,}2}$ a odhadněte chybu jejich výpočtu.

1397. Vypočítejte hodnotu následujících výrazů:

a) e s přesností na 10^{-9}; b) $\sin 1°$ s přesností na 10^{-8};

c) $\cos 9°$ s přesností na 10^{-5}; d) $\sqrt{5}$ s přesností na 10^{-4};

e) $\log 11$ s přesností na 10^{-5}.

Pomocí rozvojů I. – V. vypočtěte následující limity:

1398. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

1399. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

1400. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

1401. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

1403. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$.

1404. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

1405. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

1406. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{cotg} x\right)$.

1406.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

1406.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

1406.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh(\operatorname{tg} x)-x}{x^3}$.

Pro $x\to 0$ určete hlavní člen rozvoje následujících funkcí ve tvaru Cx^n, kde C je konstanta.

1407. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)$.

1408. $y=(1+x)^x-1$.

1409. $y=1-\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}$.

1410. Pro jaké hodnoty koeficientů a a b bude výraz

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

nekonečně malou veličinou 5. řádu vzhledem k proměnné x?

1410.1 Najděte koeficienty A a B tak, aby pro $x\to 0$ platila asymptotická rovnost

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5).$$

1410.2 Pro jaké koeficienty A, B, C a D platí pro $x\to 0$ asymptotická rovnost

$$e^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O(x^5)?$$

1411. Považujte $|x|$ za malou veličinu a odvoďte jednoduché přibližné vztahy pro hodnoty následujících výrazů:

a) $\dfrac{1}{R^2}-\dfrac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$; b) $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}}$; c) $\dfrac{A}{x}\left[1-\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^{-n}\right]$;

d) $\dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\dfrac{x}{101}\right)}$.

1412. Považujte absolutní hodnotu x za malou veličinu a odvoďte přibližný tvar vztahu $x=\alpha\sin x+\beta\operatorname{tg}x$ s přesností do členu s x^5. Použijte tento vztah pro přibližný výpočet délky oblouku s malým úhlem.

1413. Odhadněte relativní chybu *Čebyševova vzorce:* délka kruhového oblouku se přibližně rovná součtu délek ramen rovnoramenného trojúhelníka sestrojeného na tětivě tohoto oblouku, který má s výšku rovnou $\sqrt{4/3}$ výšky kruhové úseče.

§ 11. Extrémy funkce. Maximální a minimální hodnoty funkce

1. **NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE EXTRÉMU.** Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 extrém (*maximum*, resp. *minimum*), je-li definována v oboustranném okolí bodu x_0 a $f(x)<f(x_0)$ (resp. $f(x)>f(x_0)$) pro všechny body x z množiny $0<|x-x_0|<\delta$.
Jestliže v bodě extrému existuje derivace, pak pro ni platí $f'(x_0)=0$.

2. **POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE EXTRÉMU.**
První pravidlo. Jestliže 1) funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na nějakém okolí $|x-x_0|<\delta$ bodu x_0, pro který platí $f'(x_0)=0$ nebo ve kterém derivace neexistuje (*kritický bod*); 2) $f(x)$ má konečnou derivaci $f'(x)$ na množině $0<|x-x_0|<\delta$; 3) derivace $f'(x)$ má konstantní znaménko vlevo od bodu x_0 a vpravo od bodu x_0, pak je vztah funkce $f(x)$ k extrému charakterizován přehledem v následující tabulce:

	Znaménko derivace $f'(x)$		Tvrzení
	$x<x_0$	$x>x_0$	
I	+	+	v bodě není extrém
II	+	−	maximum
III	−	+	minimum
IV	−	−	v bodě není extrém

Druhé pravidlo. Jestliže funkce $f(x)$ má druhou derivaci $f''(x)$ a v některém bodě x_0 jsou splněny podmínky

$$f'(x_0)=0 \text{ a } f''(x_0)\neq 0,$$

pak má funkce $f(x)$ v tomto bodě *extrém*, a to: *maximum*, je-li $f''(x_0)<0$, a *minimum*, je-li $f''(x_0)>0$.

Třetí pravidlo. Nechť má funkce $f(x)$ na nějakém intervalu $|x-x_0|<\delta$ derivace $f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$ a v bodě x_0 derivaci $f^{(n)}(x_0)$, přičemž platí

$$f^{(k)}(x_0)=0\ (k=1,\ldots,n-1),\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

V takovém případě: 1) jestliže je n sudé číslo, pak v bodě x_0 má funkce $f(x)$ *extrém* a to: *maximum*, je-li $f^{(n)}(x_0) < 0$, a *minimum*, je-li $f^{(n)}(x_0) > 0$; 2) jestliže je n liché číslo, pak $f(x)$ v bodě x_0 *nemá extrém*.

3. **GLOBÁLNÍ EXTRÉM.** Spojitá funkce $f(x)$ nabývá největší (nejmenší) hodnoty na uzavřeném intervalu $[a,b]$ buď ve svém kritickém bodě (tj. tam, kde derivace $f'(x)$ je rovna nule nebo neexistuje) nebo v hraničních bodech a a b tohoto intervalu.

Vyšetřete extrémy následujících funkcí:

1414. $y = 2 + x - x^2$.

1415. $y = (x-1)^3$.

1416. $y = (x-1)^4$.

1417. $y = x^m(1-x)^n$ (m a n jsou přirozená čísla).

1418. $y = \cos x + \cosh x$.

1419. $y = (x+1)^{10} e^{-x}$.

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ (n je přirozené číslo).

1421. $y = |x|$.

1422. $y = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$.

1423. Vyšetřete, zdali má funkce

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

extrém v bodě x_0 (n je přirozené číslo). Předpokládejte, že funkce $\varphi(x)$ je spojitá v bodě $x = x_0$ a $\varphi(x_0) \neq 0$.

1424. Nechť $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ a x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $P_1(x_0) = 0$ a $Q(x_0) \neq 0$. Dokažte, že $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0)$.

1425. Můžeme říci, že pokud funkce $f(x)$ má v bodě x_0 maximum, pak v nějakém dostatečně malém okolí je funkce $f(x)$ vlevo od bodu x_0 rostoucí a vpravo od něj klesající? Uvažujte případ funkce

$$f(x) = 2 - x^2\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right) \text{ pro } x \neq 0 \text{ a } f(0) = 2.$$

1426. Dokažte, že funkce

$$f(x) = e^{-1/x^2} \text{ pro } x \neq 0 \text{ a } f(0) = 0$$

má v bodě $x=0$ minimum a funkce

$$g(x)=xe^{-1/x^2} \text{ pro } x\neq 0 \text{ a } g(0)=0$$

nemá v bodě $x=0$ extrém, ačkoli platí

$$f^{(n)}(0)=0,\ g^{(n)}(0)=0\ \ (n=1,2,\ldots).$$

Sestrojte grafy těchto funkcí.

1427. Najděte extrémy funkce

a) $f(x)=e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2}+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ pro $x\neq 0$ a $f(0)=0$;

b) $f(x)=e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$ pro $x\neq 0$ a $f(0)=0$.

Sestrojte grafy těchto funkcí.

1428. Vyšetřete, zda má v bodě $x=0$ extrém funkce

$$f(x)=|x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) \text{ pro } x\neq 0 \text{ a } f(0)=0.$$

Sestrojte graf této funkce.

Najděte extrémy následujících funkcí:

1429. $y=x^3-6x^2+9x-4$.

1430. $y=2x^2-x^4$.

1431. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

1432. $y=x+\dfrac{1}{x}$.

1433. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1434. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

1435. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

1436. $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

1437. $y=xe^{-x}$.

1438. $y=\sqrt{x}\ln x$.

1439. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$

1440. $y=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

1441. $y=\dfrac{10}{1+\sin^2 x}$.

1442. $y=\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1443. $y=e^x\sin x$.

1444. $y=|x|e^{-|x-1|}$.

Najděte nejmenší a největší hodnoty následujících funkcí:

1445. $f(x)=2^x$ na uzavřeném intervalu $[-1;\ 5]$.

1446. $f(x)=x^2-4x+6$ na uzavřeném intervalu $[-3;\ 10]$.

1447. $f(x)=|x^2-3x+2|$ na uzavřeném intervalu $[-10;\ 10]$.

1448. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ na uzavřeném intervalu $[0{,}01;\ 100]$.

1449. $f(x)=\sqrt{5-4x}$ na uzavřeném intervalu $[-1;\ 1]$.

Najděte infima a suprema následujících funkcí:

1450. $f(x)=xe^{-0{,}01x}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

1451. $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

1452. $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

1453. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

1454. Určete infimum a supremum funkce $f(\xi)=\frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ na intervalu $x<\xi<+\infty$.

Sestrojte grafy funkcí $M(x)=\sup\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$ a $m(x)=\inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$.

1454.1 Nechť $M_k=\sup\limits_{x}|f^{(k)}(x)|$, $k=0,1,2,\ldots$ Najděte M_0, M_1 a M_2, je-li $f(x)=e^{-x^2}$.

1455. Určete hodnotu největšího členu následujících posloupností:

a) $\frac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1,2,\ldots)$; b) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000}$ $(n=1,2,\ldots)$; c) $\sqrt[n]{n}$ $(n=1,2,\ldots)$.

1456. Dokažte následující nerovnosti:

a) $|3x-x^3|\le 2$ pro $|x|\le 2$; b) $\frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$ pro $0\le x\le 1$ a $p>1$;

c) $x^m(a-x)^n\le\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$ pro $m>0$, $n>0$ a $0\le x\le a$;

d) $\frac{x+a}{2^{(n-1)/n}}\le\sqrt[n]{x^n+a^n}\le x+a$ $(x>0,\ a>0,\ n>1)$; e) $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}$.

1456.1 Dokažte nerovnost

$$\frac{2}{3}\le\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\le 2 \text{ pro } -\infty<x<+\infty.$$

1457. Určete „odchylku od nuly" polynomu $P(x)=x(x-1)^2(x+2)$ na uzavřeném intervalu $[-2,1]$, tj.

$$E_P=\sup_{-2\le x\le 1}|P(x)|.$$

1458. Pro jaký koeficient q má polynom

$$P(x) = x^2 + q$$

nejmenší odchylku od nuly na uzavřeném intervalu $[-1, 1]$,
tj. $E_P = \sup_{-1 \le x \le 1} |P(x)|$ je minimální?

1459. *Absolutní odchylkou* dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$ se nazývá číslo $\Delta = \sup_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$. Určete absolutní odchylku funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^3$ na uzavřeném intervalu $[0, 1]$.

1460. Funkci $f(x) = x^2$ přibližně nahraďte na intervalu $[x_1, x_2]$ lineární funkcí

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

tak, aby absolutní odchylka funkcí $f(x)$ a $g(x)$ (viz předcházející úloha) byla minimální, a určete tuto nejmenší absolutní odchylku.

1461. Určete minimum funkce

$$f(x) = \max\{2|x|, |1 + x|\}.$$

Určete počet reálných kořenů následujících rovnic a separujte tyto kořeny:

1462. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

1463. $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0$.

1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

1465. $x^5 - 5x = a$.

1466. $\ln x = kx$.

1467. $e = ax^2$.

1468. $\sin^3 x \cos x = a$ pro $0 \le x \le \pi$.

1469. $\cosh x = kx$.

1470. Za jakých podmínek má rovnice $x^3 + px + q = 0$: a) jeden reálný kořen; b) tři reálné kořeny? Vyznačte odpovídající množiny v rovině (p, q).

§ 12. Vyšetřování průběhu funkce

Abychom sestrojili graf funkce $y = f(x)$, postupujeme v následujících krocích: 1) určíme definiční obor této funkce a vyšetříme chování funkce v jeho hraničních bodech; 2) rozhodneme o symetrii grafu a jeho periodičnosti; 3) najdeme body nespojitosti a intervaly, na kterých je funkce spojitá; 4) určíme nulové body funkce a množiny definičního oboru s konstantním znaménkem; 5) najdeme extrémy funkce a zjistíme intervaly, na kterých je funkce rostoucí a klesající; 6) určíme inflexní body funkce a zjistíme intervaly konvexnosti a konkávnosti grafu funkce; 7) najdeme asymptoty funkce, jestliže existují; 8) ukážeme další speciální vlastnosti grafu funkce. Ve zvláštních případech se toto obecné schéma zjednoduší.

V úlohách, které jsou označeny hvězdičkou, určete inflexní body pouze přibližně.

Sestrojte grafy následujících funkcí:

1471. $y = 3x - x^3$.

1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

1473. $y = (x+1)(x-2)^2$.

1474.* $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$.

1475.* $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

1476.* $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

1477. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

1478. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

1479. $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

1480. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

1481. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

1482.* $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$.

1483. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$.

1484. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

1485. $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$.

1485.1 $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

1486. $y = \pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487.* $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

1489. $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$.

1490. $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$.

1491. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

1492. $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2 - 1}$.

1493. $y = \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

1496.* $y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}$.

1497. $y = \sin x + \cos^2 x$.

1498. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$.

1499. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

1500. $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

1501. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1502. $y = \sin x \sin 3x$.

1503. $y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

1504. $y = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

1504.1 $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1505. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

1506. $y = e^{2x - x^2}$.

1507. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

1508. $y = x + e^{-x}$.

1509. $y = x^{2/3} e^{-x}$.

1509.1 $y = e^{-2x} \sin^2 x$.

1510. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$.

1511. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

1512. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1513. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

1514. $y = \sqrt{x^2 + 1}\,\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

1515. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1516. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

1517. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arccotg} x$.

1518. $y = x \operatorname{arctg} x$.

1519. $y = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1520. $y = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

1521. $y = (x + 2)e^{1/x}$.

1522. $y = 2^{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}$.

1523.* $y = \ln \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$.

1524. $y = a \arcsin \dfrac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$.

1525. $y = \arccos \dfrac{1 - x}{1 - 2x}$.

1526. $y = x^x$.

1527.* $y = x^{1/x}$.

1528. $y = (1 + x)^{1/x}$.

1529.* $y = x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x > 0)$.

1530.* $y = \dfrac{e^{1/(1 - x^2)}}{1 + x^2}$ (bez vyšetřování konvexity a konkávnosti).

Sestrojte křivky, které jsou zadány parametrickým popisem:

1531. $x = \dfrac{(t + 1)^2}{4}$, $y = \dfrac{(t - 1)^2}{4}$.

1532. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

1533.* $x = \dfrac{t^2}{t - 1}$, $y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$.

1534. $x = \dfrac{t^2}{1 - t^2}$, $y = \dfrac{1}{1 + t^2}$.

1535. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

1536. $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$ $(a > 0)$.

1537. $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$. **1538.** $x=t\ln t$, $y=\dfrac{\ln t}{t}$.

1539. $x=\dfrac{a}{\cos^3 t}$, $y=a\operatorname{tg}^3 t$ $(a>0)$.

1540. $x=a(\sinh t-t)$, $y=a(\cosh t-1)$ $(a>0)$.

Parametrizujte následující křivky a sestrojte je:

1541. $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$.

NÁVOD. Položte $y=tx$.

1542. $x^2+y^2=x^4+y^4$. **1543.** $x^2y^2=x^3-y^3$. **1544.** $x^y=y^x$ $(x>0, y>0)$.

1545. Sestrojte graf funkce $\cosh^2 x-\cosh^2 y=1$.

Sestrojte grafy následujících funkcí, které jsou zadány v polárních souřadnicích (φ, r), $(r\geq 0)$:

1546. $r=a+b\cos\varphi$ $(0<a\leq b)$. **1547.** $r=a\sin 3\varphi$ $(a>0)$.

1548. $r=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ $(a>0)$. **1549.*** $r=a\dfrac{\operatorname{tgh}\varphi}{\varphi-1}$, kde $\varphi>1$ $(a>0)$.

1550.* $\varphi=\arccos\dfrac{r-1}{r^2}$.

Sestrojte grafy následujících tříd křivek (a je proměnný parametr):

1551. $y=x^2-2x+a$. **1552.** $y=x+\dfrac{a^2}{x}$. **1553.** $y=x\pm\sqrt{a(1-x^2)}$.

1554. $y=\dfrac{x}{2}+e^{-ax}$. **1555.** $y=xe^{-x/a}$.

§ 13. Úlohy na maximum a minimum funkce

1556. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ nezáporná, pak má funkce $F(x)=Cf^2(x)$ $(C>0)$ přesně tytéž extremální body jako funkce $f(x)$.

1557. Dokažte, že je-li funkce $\varphi(x)$ ostře rostoucí pro $-\infty<x<+\infty$, pak mají funkce $f(x)$ a $\varphi(f(x))$ tytéž extremální body.

1558. Určete největší hodnotu součinu m-té a n-té mocniny $(m>0, n>0)$ dvou kladných čísel, jejichž součet je konstantní a roven a.

1559. Najděte nejmenší hodnotu součtu m-té a n-té mocniny $(m>0, n>0)$ dvou kladných čísel, jejichž součin je konstantní a roven a.

1560. Pro jaké základy logaritmů existuje číslo, které je rovno svému logaritmu?

1561. Ze všech obdélníků daného obsahu S určete ten, jehož obvod je nejmenší.

1562. Ze všech pravoúhlých trojúhelníků s daným součtem délek přepony a odvěsny určete ten, jehož obsah je maximální.

1563. Pro jaký poloměr a výšku bude mít uzavřená válcová nádoba daného objemu V nejmenší povrch?

1564. Do dané kruhové úseče, která není větší než půlkruh, vepište obdélník maximálního obsahu.

1565. Do elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ vepište obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné s osami elipsy a který má maximální obsah.

1566. Do trojúhelníka o základně délky b a výšce h vepište obdélník s maximálním obvodem. Proveďte diskusi řešitelnosti této úlohy.

1567. Tyč kruhového průřezu o průměru d je ořezána na hranol o obdélníkovém průřezu se základnou délky b a výškou h. Pro jaké velikosti základny a výšky bude mít výsledná tyč největší pevnost, jestliže je pevnost úměrná bh^2?

1568. Do polokoule o poloměru R vepište kvádr s čtvercovou podstavou a maximálním objemem.

1569. Do koule o poloměru R vepište válec s maximálním objemem.

1570. Do koule o poloměru R vepište válec s maximálním povrchem.

1571. Dané kouli opište kužel s minimálním objemem.

1572. Jaký je maximální objem kužele s danou délkou pláště l.

1573. Do kuželu s úhlem 2α v osovém řezu u vrcholu a poloměrem podstavy R vepište válec s maximálním povrchem.

1574. Najděte nejmenší vzdálenost daného bodu (p,p) od paraboly $y^2=2px$.

1575. Najděte nejkratší a nejdelší vzdálenost bodu $(2,0)$ od kružnice $x^2+y^2=1$.

1576. Najděte nejdelší sečnu elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$, která prochází bodem $(0,-b)$.

1577. Najděte bod (x,y) na elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, pro který tečna elipsy sestrojená v tomto bodě vymezuje s osami souřadnic trojúhelník s minimálním obsahem.

1578. Těleso se skládá z válce zakončeného polokoulí stejného poloměru. Pro jaké hodnoty poloměru a výšky válce bude při daném objemu V povrch tohoto tělesa minimální?

1579. Kanál má průřez tvaru rovnoramenného lichoběžníku. Je naplněn vodou do výšky h, plošný obsah průřezu části kanálu naplněné vodou je S. Při jakém

úhlu φ mezi bočními stěnami a vodorovnou rovinou bude mokrá část obvodu průřezu kanálu minimální?

1580. *Křivolakostí* uzavřeného obrazce o ploše S se nazývá poměr jeho obvodu a délky kružnice vymezující kruh o stejném obsahu S. Jaká je výška rovnoramenného lichoběžníka $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, který má minimální křivolakost, je-li délka jeho základny $AD = 2a$ a má-li ostrý úhel velikosti $\sphericalangle BAD = \alpha$?

1581. Jakou výseč je potřeba vyříznout z kruhu o poloměru R tak, aby bylo možné ze zbylé části svinout nálevku tvaru kužele o maximálním objemu?

1582. Továrna A je vzdálena a km vzdušnou čarou od železnice, která vede z jihu na sever a prochází městem B. Pod jakým úhlem φ k železnici je potřeba postavit vlečku, aby náklady na dopravu zboží z továrny do města byly minimální, jestliže náklady na přepravu jedné tuny zboží na vzdálenost 1 km jsou na vlečce p, na železnici q, $(p > q)$ a město B se nachází b km severně od továrny A?

1583. Dvě lodě plují konstantními rychlostmi u a v po přímých trasách, které spolu svírají úhel θ. Určete nejmenší vzdálenost, na kterou se sobě přiblíží, jestliže v určitý okamžik byly vzdáleny od průsečíku tras po řadě a a b.

1584. V bodech A a B se nacházejí zdroje světla o svítivostech S_1 a S_2. Najděte nejméně osvětlený bod M na úsečce AB o délce a.

1585. Bodový zdroj světla je umístěn na spojnici středů dvou neprotínajících se koulí o poloměrech R a r $(R > r)$, přičemž leží vně obou koulí. Při jaké poloze zdroje bude součet osvětlených částí obou koulí největší?

1586. V jaké výšce nad středem kruhového stolu o poloměru a je zapotřebí umístit elektrické svítidlo, aby osvětlení okraje stolu bylo maximálně jasné?

NÁPOVĚDA: Jasnost osvětlení je dána vzorcem

$$I = k \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

kde φ je úhel sklonu paprsků, r je vzdálenost světelného zdroje od osvětlovaného místa a k je svítivost zdroje.

1587. Kolmo k řece o šířce a m je přiveden kanál o šířce b m. Jakou maximální délku může mít kláda, která se dá splavit z řeky do tohoto kanálu?

1588. Denní náklady na plavbu lodi se skládají ze dvou částí: konstantní, která je rovna a a proměnné, která se zvětšuje úměrně třetí mocnině rychlosti. Pro jakou rychlost v lodi bude plavba nejekonomičtější?

1589. Břemeno o hmotnosti P, které leží na vodorovné drsné rovině, je třeba zdvihnout s použitím určité síly. Pro jaký sklon této síly vzhledem k vodorovné rovině bude její velikost nejmenší, jestliže koeficient tření břemene je k?

1590. Najděte rovnovážnou polohu kolíku délky l vloženého do misky tvaru polokoule o poloměru a, je-li $l > 2a$.

§ 14. Dotyky křivek. Oskulační kružnice (kružnice křivosti). Evoluta

1. **DOTYK *n*-TÉHO ŘÁDU.** Řekneme, že dvě křivky

$$y=\varphi(x) \text{ a } \tilde{y}=\psi(x)$$

mají v bodě x_0 *dotyk n-tého řádu* (v ostrém smyslu!), jestliže platí $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ a $\varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0)$. V tomto případě je pro $x\to x_0$

$$\varphi(x)-\psi(x)=O\,[x-x_0]^{n+1}.$$

2. **OSKULAČNÍ KRUŽNICE (KRUŽNICE KŘIVOSTI).** Kružnice

$$(x-\xi)^2+(y-\eta^2)=R^2,$$

která má s danou křivkou $y=f(x)$ dotyk alespoň druhého řádu, se nazývá *oskulační kružnicí* v odpovídajícím bodě. Poloměr této kružnice

$$R=\frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$

se nazývá *poloměrem křivosti* a hodnota $k=\dfrac{1}{R}$ se nazývá *křivostí*.

3. **EVOLUTA.** Geometrické místo středů oskulačních kružnic (ξ,η) (*středy křivosti*)

$$\xi=x-\frac{y'(1+(y')^2)}{y''},\quad \eta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}$$

se nazývá *evolutou* dané křivky $y=f(x)$.

1591. Najděte parametry k a b přímky $y=kx+b$ tak, aby měla s křivkou $y=x^3-3x^2+2$ dotyk řádu většího než prvního.

1592. Pro jaké koeficienty a, b a c má parabola

$$y=ax^2+bx+c$$

v bodě $x=x_0$ dotyk druhého řádu s křivkou $y=e^x$?

1593. Jaký řád dotyku s osou x mají v bodě $x=0$ následující křivky:

a) $y=1-\cos x$; b) $y=\operatorname{tg}x-\sin x$; c) $y=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$.

1594. Dokažte, že křivka $y=e^{-1/x^2}$ pro $x\neq 0$ a $y=0$ pro $x=0$ má v bodě $x=0$ s osou x dotyk nekonečně velkého řádu.

1595. Vypočtěte poloměr a střed křivosti hyperboly $xy=1$ v bodě: a) $(1,1)$; b) $(100;0{,}01)$.

Určete poloměry křivosti následujících křivek:

1596. Paraboly $y^2=2px$.

1597. Elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a\geq b>0)$.

1598. Hyperboly $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **1599.** Astroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1600. Elipsy $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

1601. Cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1602. Evolventy kružnice $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

1603. Dokažte, že poloměr křivosti křivky druhého řádu $y^2=2px-qx^2$ je úměrný třetí mocnině úseku její normály.

1604. Vyjádřete poloměr křivosti křivky zadané v polárních souřadnicích.

Určete poloměry křivosti následujících křivek zadaných v polárních souřadnicích (s kladnými parametry):

1605. Archimedovy spirály $r=a\varphi$. **1606.** Logaritmické spirály $r=ae^{m\varphi}$.

1607. Kardioidy $r=a(1+\cos\varphi)$. **1608.** Lemniskaty $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

1609. Najděte na křivce $y=\ln x$ bod, v němž je křivost maximální.

1610. Maximální křivost kubické paraboly $y=\frac{kx^3}{6}$ $(0\le x<+\infty,\ k>0)$ je rovna $\frac{1}{1000}$. Najděte bod x, ve kterém je dosaženo této křivosti.

Napište rovnice následujících křivek:

1611. Evoluty paraboly $y^2=2px$. **1612.** Evoluty elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1613. Evoluty astroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1614. Evoluty křivky traktrix $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$.

1615. Evoluty logaritmické spirály $r=ae^{m\varphi}$.

1616. Dokažte, že evoluta cykloidy

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

je také cykloida, která se od původní cykloidy liší pouze pozicí.

§ 15. Přibližné řešení rovnic

1. **METODA REGULA FALSI (METODA SEČEN).** Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a platí-li

$$f(a)f(b)<0,$$

přičemž $f'(x)\neq 0$ pro $a<x<b$, pak rovnice

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

má právě jeden reálný kořen ξ v otevřeném intervalu (a,b). Jako první aproximaci tohoto řešení můžeme vzít hodnotu

$$x_1=a+\delta_1,$$

kde

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Použitím tohoto postupu v tom z otevřených intervalů (a,x_1) nebo (x_1,b), v jehož hraničních bodech má $f(x)$ různá znaménka, získáme druhou aproximaci x_2 kořene ξ atd. Pro chybu n-té aproximace x_n platí vzorec

$$|x_n-\xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

kde $m = \inf_{a<x<b} |f'(x)|$, přičemž

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

2. **NEWTONOVA METODA (METODA TEČEN).** Jestliže na uzavřeném intervalu $[a,b]$ platí $f''(x) \neq 0$ a $f(a)f''(a) > 0$, pak za první aproximaci ξ_1 kořene ξ rovnice (1) můžeme vzít hodnotu

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Opakováním tohoto postupu získáme posloupnost aproximací ξ_n $(n = 1,2,...)$, která rychle konverguje ke kořeni ξ a jejíž přesnost je vyjádřena například vzorcem (2).
Pro hrubou orientaci je užitečné načrtnout graf funkce $y = f(x)$.

Pomocí metody sečen aproximujte s přesností na 0,001 kořeny následujících rovnic:

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$.

1618. $x^4 - x - 1 = 0$.

1619. $x - 0{,}1\sin x = 2$.

1620. $\cos x = x^2$.

Pomocí Newtonovy metody aproximujte s požadovanou přesností kořeny následujících rovnic:

1621. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (s přesností na 10^{-3}).

1622. $x \log x = 1$ (s přesností na 10^{-4}).

1623. $\cos x \cosh x = 1$ (s přesností na 10^{-3}) (pro kladný kořen).

1624. $x + e^x = 0$ (s přesností na 10^{-5}).

1625. $x \operatorname{tgh} x = 1$ (s přesností na 10^{-6}).

1626. Určete s přesností na 0,001 první tři kladné kořeny rovnice $\operatorname{tg} x = x$.

1627. Určete s přesností na 10^{-3} dva kladné kořeny rovnice $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$.

KAPITOLA III

Neurčitý integrál

§ 1. Nejjednodušší neurčité integrály

1. **Definice neurčitého integrálu.** Je-li funkce $f(x)$ definována a spojitá na otevřeném intervalu (a,b) a funkce $F(x)$ je její primitivní funkce, tj. platí, že $F'(x)=f(x)$ pro všechna $a<x<b$, pak je

$$\int f(x)dx = F(x)+C,\ a<x<b,$$

kde C je libovolná konstanta.

2. **Základní vlastnosti neurčitého integrálu:**

a) $d[\int f(x)dx]=f(x)dx$;

b) $\int d\Phi(x)=\Phi(x)+C$;

c) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \quad (A=\text{const};\ A\neq 0)$;

d) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

3. **Tabulka základních integrálů:**

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C \quad (x\neq 0)$.

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x+C, \\ -\operatorname{arccotg} x+C. \end{cases}$

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$.

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x+C, \\ -\arccos x+C. \end{cases}$

VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|+C$.

VII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq 1);\ \int e^x dx = e^x+C$.

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x+C$.

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x+C$.

X. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x+C$.

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XII. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C.$

XIII. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C.$

4. ZÁKLADNÍ METODY INTEGROVÁNÍ.

a) Integrace zavedením nového argumentu. Je-li

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

pak

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C,$$

kde $u = \varphi(x)$ je spojitě diferencovatelná funkce.

b) Integrace metodou rozkladu. Je-li

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

pak

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

c) Integrace pomocí substituce. Je-li funkce $f(x)$ spojitá, pak substitucí

$$x = \varphi(t),$$

kde $\varphi(t)$ je spojitá funkce společně se svou derivací $\varphi'(t)$, dostaneme

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

d) Integrace metodou per partes (metodou po částech). Nechť u a v jsou diferencovatelné funkce proměnné x. Pak

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Pomocí tabulky základních integrálů vypočtěte následující integrály:

1628. $\int (3 - x^2)^3\,dx.$

1629. $\int x^2 (5 - x)^4\,dx.$

1630. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)\,dx.$

1631. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx.$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx.$

1633. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\,dx.$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

1635. $\int \frac{(1 - x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

1636. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

1637. $\int\frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx.$

1638. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

1639. $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}.$

1640. $\int\frac{x^2dx}{1-x^2}.$

1641. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$

1642. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

1643. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

1644. $\int(2^x+3^x)^2dx.$

1645. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$

1646. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx.$

1647. $\int(1+\sin x+\cos x)dx.$

1648. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx\quad(0\le x\le\pi).$

1649. $\int\operatorname{cotg}^2x\,dx.$

1650. $\int\operatorname{tg}^2x\,dx.$

1651. $\int(a\sinh x+b\cosh x)dx.$

1652. $\int\operatorname{tgh}^2x\,dx.$

1653. $\int\operatorname{cotgh}^2x\,dx.$

1654. Dokažte, že pokud je $\int f(x)dx=F(x)+C$, pak

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\quad(a\neq 0).$$

Vypočtěte následující integrály:

1655. $\int\frac{dx}{x+a}.$

1656. $\int(2x-3)^{10}dx.$

1657. $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx.$

1658. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

1659. $\int\frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}.$

1660. $\int\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx.$

1661. $\int\frac{dx}{2+3x^2}.$

1662. $\int\frac{dx}{2-3x^2}.$

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

1665. $\int (e^{-x}+e^{-2x})dx$.

1666. $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)dx$.

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

1671. $\int [\sinh(2x+1)+\cosh(2x-1)]dx$.

1672. $\int \frac{dx}{\cosh^2\frac{x}{2}}$.

1673. $\int \frac{dx}{\sinh^2\frac{x}{2}}$.

Pomocí vhodné transformace integrovaného výrazu vypočtěte následující integrály:

1674. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

1676. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$.

1677. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

1678. $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$.

1679. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$.

1680. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

NÁVOD: Použijte vztah $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$.

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^2}$.

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

1685. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$.

1686. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{2/3}}$.

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1689. $\int xe^{-x^2}dx$.

1690. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

1694. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

1695. $\int \sin^5 x \cos x dx$.

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$.

1697. $\int \operatorname{tg} x dx$.

1698. $\int \operatorname{cotg} x dx$.

1699. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$.

1700. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$.

1700.1 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$.

1700.2 $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$.

1700.3 $\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}} dx$.

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}$.

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

1705. $\int \frac{dx}{\sinh x}$.

1706. $\int \frac{dx}{\cosh x}$.

1707. $\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sqrt{\sinh^4 x + \cosh^4 x}} dx$.

1708. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x \sqrt[3]{\operatorname{tgh}^2 x}}$.

1709. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$.

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$.

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

NÁVOD: Použijte vztah $\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$ **1714.** $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}.$ **1715.** $\int \frac{x^{n/2}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$

1716. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$ **1717.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$ **1718.** $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx.$

1719. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx.$ **1720.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$

Metodou rozkladu vypočtěte následující integrály:

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2dx.$ **1721.1** $\int x(1-x)^{10}dx.$ **1722.** $\int \frac{1+x}{1-x}dx.$

1723. $\int \frac{x^2}{1+x}dx.$ **1724.** $\int \frac{x^3}{3+x}dx.$ **1725.** $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx.$

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx.$ **1727.** $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx.$ **1728.** $\int \frac{x^5}{x+1}dx.$

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$ **1730.** $\int x\sqrt{2-5x}\,dx.$

NÁVOD: Použijte rovnost $x=-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}.$

1731. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$ **1732.** $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx.$ **1733.** $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

NÁVOD: Použijte rovnost $1=\frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)].$

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$ **1735.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$ **1736.** $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$

1737. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}.$ **1738.** $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}.$

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a\neq b).$

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$.

1741. $\int \sin^2 x\,dx$. **1742.** $\int \cos^2 x\,dx$. **1743.** $\int \sin x \sin(x+\alpha)\,dx$.

1744. $\int \sin 3x \sin 5x\,dx$. **1745.** $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$.

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx$. **1747.** $\int \sin^3 x\,dx$.

1748. $\int \cos^3 x\,dx$. **1749.** $\int \sin^4 x\,dx$. **1750.** $\int \cos^4 x\,dx$.

1751. $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$. **1752.** $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. **1753.** $\int \sin^2 3x \sin^3 2x\,dx$.

1754. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

NÁVOD: Použijte rovnost $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$. **1756.** $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$. **1757.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$.

1758. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **1759.** $\int \frac{dx}{1+e^x}$. **1760.** $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$.

1761. $\int \sinh^2 x\,dx$. **1762.** $\int \cosh^2 x\,dx$. **1763.** $\int \sinh x \sinh 2x\,dx$.

1764. $\int \cosh x \cosh 3x\,dx$. **1765.** $\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x}$.

Pomocí vhodné substituce vypočtěte následující integrály:

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\,dx$. **1767.** $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$. **1768.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.

1769. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$. **1770.** $\int x^5(2-5x^3)^{2/3}dx$. **1771.** $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\,dx$.

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$. **1773.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$. **1774.** $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

1775. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$. **1776.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. **1777.** $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$.

Substitucí goniometrickými funkcemi $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$, $x = a \sin^2 t$ atd. vypočtěte následující integrály (všechny parametry jsou kladné):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. **1779.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$. **1780.** $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. **1782.** $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$. **1783.** $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$.

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

NÁVOD: Použijte substituci $x - a = (b-a)\sin^2 t$.

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$.

Substitucí hyperbolickými funkcemi $x = a \sinh t$, $x = a \cosh t$ atd. vypočtěte následující integrály (všechny parametry jsou kladné):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$. **1787.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$. **1788.** $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx$.

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$. **1790.** $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$.

NÁVOD: Použijte rovnost $x + a = (b-a)\sinh^2 t$.

Metodou per partes vypočtěte následující integrály:

1791. $\int \ln x\,dx$. **1792.** $\int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq -1)$.

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$. **1794.** $\int \sqrt{x} \ln^2 x\,dx$. **1795.** $\int x e^{-x}\,dx$.

1796. $\int x^2 e^{-2x}\,dx$. **1797.** $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$. **1798.** $\int x \cos x\,dx$.

1799. $\int x^2 \sin 2x\,dx$. **1800.** $\int x \sinh x\,dx$. **1801.** $\int x^3 \cosh 3x\,dx$.

1802. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. **1803.** $\int \arcsin x\,dx$. **1804.** $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

1805. $\int x^2 \arccos x\,dx$. **1806.** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. **1807.** $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$.

1808. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\,dx$. **1809.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx$. **1810.** $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Vypočtěte následující integrály:

1811. $\int x^5 e^{x^3} dx$.

1812. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

1813. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx$.

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

1815. $\int \frac{x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$.

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

1818. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

1819. $\int \sqrt{x^2+a}\, dx$.

1820. $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2} dx$.

1821. $\int x \sin^2 x dx$.

1822. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

1823. $\int x \sin \sqrt{x} dx$.

1824. $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

1825. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

1826. $\int \sin(\ln x) dx$.

1827. $\int \cos(\ln x) dx$.

1828. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$.

1829. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$.

1830. $\int e^{2x} \sin^2 x dx$.

1831. $\int (e^x - \cos x)^2 dx$.

1832. $\int \frac{\operatorname{arccotg} e^x}{e^x} dx$.

1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.

1834. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$.

1835. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$.

Integrace následujících funkcí je založena na transformaci kvadratického trojčlenu na kanonický tvar a na použití tabulky základních integrálů:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0)$.

III. $\int \frac{x\, dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln \left| a^2 \pm x^2 \right| + C$.

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0)$.

VI. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0)$.

VII. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0).$

VIII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a>0).$

Vypočtěte následující integrály:

1836. $\int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab \neq 0).$

1837. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}.$

1838. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}.$

1839. $\int \frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}.$

1840. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx.$

1841. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

1842. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4-x^2+2}.$

1843. $\int \frac{x^5\,dx}{x^6-x^3-2}.$

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}.$

1845. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b \neq 0).$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

1848. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}.$

1850. Dokažte, že pokud $y = ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$, pak platí

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right| + C \text{ pro } a>0$$

a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \text{ pro } a<0.$$

1851. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

1853. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$.

1853.1 $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$.

1854. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$.

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

1862. $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

1863. $\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}\,dx$.

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$.

§ 2. Integrování racionálních lomených funkcí

Rozkladem na parciální zlomky vypočtěte následující integrály:

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

1867. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1868. $\int \frac{x^{10}\,dx}{x^2+x-2}$.

1869. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

1871. $\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$.

1872. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx.$

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx.$

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$

1875. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}.$

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx.$

1877. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

1879. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

1882. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}.$

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

1884. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

1885. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$

1886. $\int \frac{dx}{x^6+1}.$

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

1888. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}.$

1889. $\int \frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}.$

1890. Jakou podmínku musí splňovat parametry a, b a c, aby integrál

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$$

byl racionální lomenou funkcí?

Pomocí rozkladu na parciální zlomky vypočtěte následující integrály:

1891. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$

1892. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$

1893. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

1894. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

1895. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

1896. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$.

1897. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

Určete algebraickou část následujících integrálů:

1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$.

1899. $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

1900. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx$.

1901. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

1902. Jakou podmínku musí splňovat parametry integrované funkce, aby integrál

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}dx$$

byl racionální lomenou funkcí?

Různými postupy vypočtěte následující integrály:

1903. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$.

1904. $\int \frac{x\,dx}{x^8-1}$.

1905. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+3}$.

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx$.

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx$.

1908. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}-10)^2}$.

1909. $\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}$.

1910. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$.

1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx.$ **1913.** $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$ **1914.** $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx.$ **1916.** $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx.$

1917. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx.$ **1918.** $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx.$

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx.$ **1920.** $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

1921. Najděte rekurentní vztah pro výpočet integrálu

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a \neq 0).$$

Pomocí tohoto vztahu pak vypočtěte integrál

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

NÁVOD: Uvažujte rovnost $4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2)$.

1922. Substitucí $t = \frac{x+a}{x+b}$ vypočtěte integrál

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$$

(m a n jsou přirozená čísla). Pomocí této substituce pak vypočtěte integrál

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

1923. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n v proměnné x.

NÁVOD: Použijte Taylorovu větu.

1924. Nechť $R(x) = R^*(x^2)$, kde R^* je racionální lomená funkce. Jaké vlastnosti má rozklad funkce $R(x)$ na součet polynomu a parciálních zlomků?

1925. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

kde n je přirozené číslo.

§ 3. Integrování funkcí s odmocninami

Převeďte integrovaný výraz na racionální lomené funkce a vypočtěte následující integrály:

1926. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

1927. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

1929. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x+1}}}dx$.

1930. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$.

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

1933. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n je přirozené číslo).

1935. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

NÁVOD: Použijte rovnost $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$.

1936. Dokažte, že integrál

$$\int R[x,(x-a)^{p/n}(x-b)^{q/n}]dx,$$

kde R je racionální lomená funkce a p, q a n jsou celá čísla, je elementární funkcí, je-li $p+q=kn$, kde k je celé číslo.

Vypočtěte integrály funkcí obsahujících odmocninu kvadratického trojčlenu:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

1938. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

1939. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}.$

1940. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx.$

1941. $\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

Pomocí vztahu

$$\int \frac{P_n(x)}{y}dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda\int \frac{dx}{y},$$

kde $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ je polynom stupně n, $Q_{n-1}(x)$ je polynom stupně $n-1$ a λ je reálné číslo, vypočtěte následující integrály:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$

1944. $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx.$

1946. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

1947. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$

1948. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

1949. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}.$

1950. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

1951. Jakou podmínku musí splňovat koeficienty integrovaného výrazu, aby integrál

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

byl algebraickou funkcí?

Vypočtěte integrál $\int \frac{P(x)}{Q(x)y}dx$, kde $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, pomocí rozkladu racionální lomené funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na jednodušší zlomky.

1952. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

1953. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

1956. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

1958. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

1959. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

Pomocí transformace kvadratických trojčlenů na kanonický tvar vypočtěte následující integrály:

1961. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

1962. $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

1963. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. Pomocí substituce lineární lomenou funkcí $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ vypočtěte integrál

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1965. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Pomocí Eulerových substitucí:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$, je-li $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, je-li $c>0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$

vypočtěte následující integrály:

1966. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

1967. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

1969. $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

1970. $\int\frac{dx}{\left[1+\sqrt{x(1+x)}\right]^2}$.

Různými postupy vypočtěte následující integrály:

1971. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1972. $\int\frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

1973. $\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

1974. $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

1975. $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.

1976. $\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

1977. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

1978. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

1979. $\int\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

1980. Dokažte, že integrál

$$\int R\left(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d}\right)dx,$$

kde R je racionální lomená funkce, lze převést na integrál racionální lomené funkce.

Integrál *diferenciálního binomu*

$$\int x^p (a+bx^q)^r dx,$$

kde p, q a r jsou racionální čísla, lze převést na integraci racionálních lomených funkcí pouze v následujících třech případech (*Čebyševova věta*):

1. Je-li r celé číslo, použijeme substituci $x = z^n$, kde n je společný jmenovatel zlomků p a q.
2. Je-li $\frac{p+1}{q}$ celé číslo, použijeme substituci $a+bx^q = z^n$, kde n je jmenovatel zlomku r.
3. Je-li $\frac{p+1}{q}+r$ celé číslo, použijeme substituci $ax^{-q}+b = z^n$, kde n je jmenovatel zlomku r.

Pro $q = 1$ jsou tyto podmínky ekvivalentní podmínkám:
1) r je celé číslo; 2) p je celé číslo; 3) $p+r$ je celé číslo.

Vypočtěte následující integrály:

1981. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$.

1983. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

1984. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1987. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

1988. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

1989. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

1990. V jakých případech je integrál

$$\int \sqrt{1+x^p}\,dx,$$

kde p je racionální číslo, elementární funkcí?

§ 4. Integrování goniometrických funkcí

Integrál funkcí tvaru $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, kde m a n jsou celá čísla, lze vypočíst pomocí vhodných transformací nebo převodem na výrazy s nižšími mocninami.

Vypočtěte následující integrály:

1991. $\int \cos^5 x\,dx$.

1992. $\int \sin^6 x\,dx$.

1993. $\int \cos^6 x\,dx$.

1994. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$.

1995. $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$.

1996. $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$.

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$ **1998.** $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$ **1999.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$ **2001.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$ **2002.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$ **2004.** $\int \mathrm{tg}^5 x dx.$ **2005.** $\int \mathrm{cotg}^6 x dx.$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$ **2007.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$ **2008.** $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg} x}}.$ **2010.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\mathrm{tg} x}}.$

2011. Odvoďte rekurentní vztahy pro integrály

a) $I_n = \int \sin^n x dx$; b) $K_n = \int \cos^n x dx \quad (n > 2)$

a pomocí nich vypočtěte integrály $\int \sin^6 x dx$ a $\int \cos^8 x dx$.

2012. Odvoďte rekurentní vztahy pro integrály

a) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$; b) $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2)$

a pomocí nich vypočtěte integrály

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \text{ a } \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

Následující integrály se vypočtou s použitím těchto vztahů:

I. $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$

II. $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$

III. $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$

Vypočtěte následující integrály:

2013. $\int \sin 5x \cos x dx.$ **2014.** $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$

2015. $\int \sin x \sin\frac{x}{2} \sin\frac{x}{3} dx.$ **2016.** $\int \sin x \sin(x + a) \sin(x + b) dx.$

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx\,dx$.

2018. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x\,dx$.

Následující integrály se vypočtou pomocí rovností:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

a

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)].$$

Vypočtěte následující integrály:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x-\sin a}$.

2023. $\int \frac{dx}{\cos x+\cos a}$.

2024. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\,dx$.

Integrály tvaru

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx,$$

kde R je racionální lomená funkce, lze obecně převést na integrály racionálních lomených funkcí pomocí substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

a) Jestliže platí rovnost

$$R(-\sin x,\cos x)=R(\sin x,\cos x)$$

nebo

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

pak lze výhodně použít substituci $\cos x=t$, respektive $\sin x=t$.

b) Jestliže platí rovnost

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$$

pak lze použít substituci $\operatorname{tg} x=t$.

Vypočtěte následující integrály:

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

2026. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$.

2028. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$; *a*) $0<\varepsilon<1$; *b*) $\varepsilon>1$.

2029. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$.

2030. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

2031. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

2032. $\int \frac{\sin x\,\cos x}{\sin x + \cos x}dx$.

2033. $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$.

2034. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2036. $\int \frac{\sin^2 x\,\cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}dx$.

2037. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$.

2038. $\int \frac{\sin x\,\cos x}{1 + \sin^4 x}dx$.

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

2041. Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$ převedením jmenovatele výrazu na tvar s logaritmem.

2042. Dokažte, že platí

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C,$$

kde A, B a C jsou konstanty.

NÁVOD: Použijte rovnost

$$a_1\sin x + b_1\cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x),$$

kde A a B jsou konstanty.

Vypočtěte následující integrály:

2043. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx$.

2043.1 $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}dx$.

2044. $\int \frac{dx}{3 + 5\,\mathrm{tg}\,x}$.

2045. $\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}dx$.

2046. Dokažte, že platí

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

kde A, B a C jsou konstanty.

Vypočtěte následující integrály:

2047. $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\,dx.$

2048. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}\,dx.$

2049. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}\,dx.$

2050. Dokažte, že platí

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}\,dx = A\sin x + B\cos x + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x},$$

kde A, B a C jsou konstanty.

Vypočtěte následující integrály:

2051. $\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx.$

2052. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx.$

2053. Dokažte, že pokud $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, pak

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\,dx = A\int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B\int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

kde A, B jsou konstantní koeficienty, λ_1, λ_2 jsou kořeny rovnice

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2), u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x \text{ a } k_i = \frac{1}{a-\lambda_i} \quad (i = 1, 2).$$

Vypočtěte následující integrály:

2054. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx.$

2055. $\int \frac{(\sin x + \cos x)\,dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}.$

2056. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}\,dx.$

2057. Dokažte, že

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

kde A, B a C jsou konstantní koeficienty.

2058. Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

2059. Dokažte, že

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} \quad (|a| \neq |b|),$$

a určete koeficienty A, B a C, je-li n přirozené číslo větší než jedna.

Vypočtěte následující integrály:

2060. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx$.

2062. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$.

2063. $\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon\cos x)^2}$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

2064. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx$.

NÁVOD: Použijte substituci $t = \frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$.

2065. Odvoďte rekurentní vztah pro integrál

$$I_n = \int \left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$$ (n je přirozené číslo).

§ 5. Integrování transcendentních funkcí

2066. Dokažte, že je-li $P(x)$ polynom stupně n, pak

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \ldots + (-1)^n \frac{P^n(x)}{a^{n+1}}\right] + C.$$

2067. Dokažte, že je-li $P(x)$ polynom stupně n, pak

$$\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C$$

a

$$\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

Vypočtěte následující integrály:

2068. $\int x^3 e^{3x}\,dx$.

2069. $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x}\,dx$.

2070. $\int x^5 \sin 5x\,dx$.

2071. $\int (1+x^2)^2 \cos x\,dx$.

2072. $\int x^7 e^{-x^2}\,dx$.

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$.

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx$.

2076. $\int xe^x \sin x\,dx$.

2077. $\int x^2 e^x \cos x\,dx$.

2078. $\int xe^x \sin^2 x\,dx$.

2079. $\int (x - \sin x)^3\,dx$.

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

2081. Dokažte, že je-li R racionální lomená funkce a poměr libovolných dvou čísel z $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je racionální číslo, pak integrál

$$\int R\left(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x}\right)dx$$

je elementární funkcí.

Vypočtěte následující integrály:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

2083. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$.

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

2085. $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$.

2086. $\int \frac{1+e^{x/2}}{\left(1+e^{x/4}\right)^2}dx$.

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx.$ **2089.** $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx.$ **2090.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$

2091. Dokažte, že je-li R je racionální lomená funkce, jejíž jmenovatel má pouze reálné kořeny, pak integrál

$$\int R(x)e^{ax}dx,$$

lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí a transcendentní funkce

$$\int \frac{e^{ax}}{x}dx = \mathrm{li}\,(e^{ax})+C,$$

kde

$$\mathrm{li}\,x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

2092. Za jakých předpokladů je integrál

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx,$$

kde $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}$ a $a_0,a_1,..,a_n$ jsou konstanty, čistě elementární funkcí?

Vypočtěte následující integrály:

2093. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$ **2094.** $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx.$ **2095.** $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx.$

2096. $\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}dx.$ **2097.** $\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx.$

Vypočtěte integrály, které obsahují $\ln f(x)$, $\mathrm{arctg}\,f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, kde $f(x)$ je algebraická funkce:

2098. $\int \ln^n x\,dx$ (n je přirozené číslo). **2099.** $\int x^3\ln^3 x\,dx.$

2100. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$ **2101.** $\int \frac{\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]}{(x+a)(x+b)}\,dx.$

2102. $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$ **2103.** $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx.$

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$ **2105.** $\int x\,\mathrm{arctg}\,(x+1)dx.$

2106. $\int \sqrt{x}\,\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

2107. $\int x \arcsin(1-x)\,dx$.

2108. $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$.

2109. $\int x \arccos\frac{1}{x}\,dx$.

2110. $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

2111. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

2112. $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

2113. $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\,dx$.

2114. $\int x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

2115. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Vypočtěte integrály, které obsahují hyperbolické funkce:

2116. $\int \sinh^2 x \cosh^2 x\,dx$.

2117. $\int \cosh^4 x\,dx$.

2118. $\int \sinh^3 x\,dx$.

2119. $\int \sinh x \sinh 2x \sinh 3x\,dx$.

2120. $\int \operatorname{tgh} x\,dx$.

2121. $\int \operatorname{cotgh}^2 x\,dx$.

2122. $\int \sqrt{\operatorname{tgh} x}\,dx$.

2123. $\int \frac{dx}{\sinh x + 2\cosh x}$.

2123.1 $\int \frac{dx}{\sinh^2 x - 4\sinh x \cosh x + 9\cosh^2 x}$.

2123.2 $\int \frac{dx}{0{,}1+\cosh x}$.

2123.3 $\int \frac{\cosh x\,dx}{3\sinh x - 4\cosh x}$.

2124. $\int \sinh ax \sin bx\,dx$.

2125. $\int \sinh ax \cos bx\,dx$.

§ 6. Další příklady integrování funkcí

Vypočtěte následující integrály:

2126. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

2127. $\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$.

2128. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

2129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

2130. $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$.

2131. $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2132. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx.$

2133. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

2134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$

2135. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}.$

2136. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

2137. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2138. $\int \frac{(1+x)\,dx}{1+\sqrt{x+x^2}}.$

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx.$

2140. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx.$

2141. $\int x\ln(4+x^4)\,dx.$

2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2143. $\int \frac{x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\cdot\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

2145. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$

2147. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx.$

2148. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$

2149. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx.$

2150. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx.$

2151. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2152. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

2153. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx.$

2154. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2155. $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

2156. $\int \frac{x\operatorname{arccotg} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2157. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2}\,dx.$

2158. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$.

2159. $\int x(1+x^2)\operatorname{arccotg} x\,dx$.

2160. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$.

2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$.

2162. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx$.

2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}$.

2164. $\int \sqrt{\operatorname{tgh}^2 x+1}\,dx$.

2165. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx$.

2166. $\int |x|\,dx$.

2167. $\int x|x|\,dx$.

2168. $\int (x+|x|)^2\,dx$.

2169. $\int \{|1+x|-|1-x|\}\,dx$.

2170. $\int e^{-|x|}\,dx$.

2171. $\int \max(1,x^2)\,dx$.

2172. $\int \varphi(x)\,dx$, kde $\varphi(x)$ je vzdálenost čísla x od nejbližšího celého čísla.

2173. $\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx \quad (x \geq 0)$.

2174. $\int f(x)\,dx$, kde $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{pro } |x|\leq 1,\\ 1-|x| & \text{pro } |x|>1.\end{cases}$

2175. $\int f(x)\,dx$, kde $f(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } -\infty<x<0,\\ x+1 & \text{pro } 0\leq x\leq 1,\\ 2x & \text{pro } 1<x<+\infty.\end{cases}$

2176. Vypočtěte $\int xf''(x)\,dx$.

2177. Vypočtěte $\int f'(2x)\,dx$.

2178. Vypočtěte $f(x)$, je-li $f'(x^2)=\frac{1}{x} \quad (x>0)$.

2179. Vypočtěte $f(x)$, je-li $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

2180. Vypočtěte $f(x)$, je-li

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1 & \text{pro } 0<x\leq 1,\\ x & \text{pro } 1<x<+\infty\end{cases}$$

a $f(0)=0$.

2180.1 Nechť $f(x)$ je monotónní spojitá funkce a $f^{-1}(x)$ její inverzní funkce. Dokažte, že pokud

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

pak

$$\int f^{-1}(x)\,dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$

Uvažujte případy:

a) $f(x)=x^n \ (n>0)$; b) $f(x)=e^x$; c) $f(x)=\arcsin x$ a d) $f(x)=\operatorname{argtgh} x$.

KAPITOLA IV

Určitý integrál

§ 1. Definice určitého integrálu

1. **Definice Riemannova integrálu.** Nechť je funkce $f(x)$ definována na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a nechť $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Pak *integrálem* funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ nazýváme číslo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

kde $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ a $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Pro existenci limity (1) je nutné a stačí, aby *dolní integrální součet*

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

a *horní integrální součet*

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

kde $m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)$ a $M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)$, měly stejnou limitu pro $\max|\Delta x_i| \to 0$.

Funkce $f(x)$, pro které existují konečná limita na pravé straně rovnosti (1), která nezávisí na volbě ξ_i, se nazývají *integrovatelné* (mají vlastní integrál) na příslušném intervalu. Speciálně platí, že: a) spojitá funkce; b) omezená funkce s konečným počtem bodů nespojitosti a c) omezená monotónní funkce jsou integrovatelné na libovolném omezeném intervalu.

2. **Podmínka pro existenci integrálu.** Nutnou a postačující podmínkou pro existenci integrálu funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ je platnost rovnosti

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

kde $\omega_i = M_i - m_i$ je oscilace funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $[x_i, x_{i+1}]$.

2181. Vypočtěte integrální součet S_n funkce

$$f(x) = 1 + x$$

na intervalu $[-1, 4]$ pomocí jeho rozdělení na n stejných intervalů a výpočtu funkčních hodnot ve středech ξ_i těchto intervalů $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

2182. Pro funkci $f(x)$ vypočtěte dolní integrální součet $\underline{S}_n$ a horní integrální součet $\overline{S}_n$ na zadaných intervalech pomocí jejich rozdělení na n stejných částí, je-li:

a) $f(x) = x^3$ $[-2 \le x \le 3]$; b) $f(x) = \sqrt{x}$ $[0 \le x \le 1]$; c) $f(x) = 2^x$ $[0 \le x \le 10]$.

2183. Vypočtěte dolní integrální součet funkce $f(x)=x^4$ na uzavřeném intervalu $[1, 2]$ pomocí jeho rozdělení na n částí, jejichž délky tvoří geometrickou posloupnost. Čemu je rovna limita tohoto součtu pro $n\to\infty$?

2184. Pomocí definice integrálu vypočtěte

$$\int_0^T (v_0+gt)\,dt,$$

kde v_0 a g jsou konstanty.

Pomocí definice integrálu jako limity vhodných integrálních součtů vypočtěte následující určité integrály:

2185. $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$. **2186.** $\int_0^1 a^x\,dx$ $(a>0)$. **2187.** $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$.

2188. $\int_0^x \cos t\,dt$. **2189.** $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0<a<b)$.

NÁVOD: Uvažujte funkční hodnoty v bodech $\xi_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}$ $(i=0, 1, \ldots, n)$.

2190. $\int_a^b x^m\,dx$ $(0<a<b; m\neq -1)$.

NÁVOD: Vyberte body rozdělení intervalu tak, aby x_i tvořily geometrickou posloupnost.

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x}$ $(0<a<b)$.

2192. Vypočtěte *Poissonův integrál* $\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$ pro:

a) $|\alpha|<1$; b) $|\alpha|>1$.

NÁVOD: Použijte rozklad polynomu $\alpha^{2n}-1$ na kvadratické činitele.

2193. Nechť $f(x)$ a $\varphi(x)$ jsou spojité funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Dokažte, že

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

kde $x_i\le\xi_i\le x_{i+1}$, $x_i\le\theta_i\le x_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ a $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(x_0=a, x_n=b)$.

2193.1 Nechť $f(x)$ je omezená a monotónní funkce na uzavřeném intervalu $[0, 1]$. Dokažte, že $\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

2193.2 Nechť $f(x)$ je omezená a ostře konkávní funkce (viz úloha **1312**) na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Dokažte, že

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.3 Nechť $f(x) \in C^{(2)}[1, +\infty)$ a $f(x) \ge 0$, $f'(x) \ge 0$, $f''(x) \le 0$ pro $x \in [1, +\infty)$. Dokažte, že $\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2} f(n) + \int_1^n f(x)dx + O(1)$ pro $n \to \infty$.

2193.4 Nechť $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$ a $\Delta_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$.

2194. Dokažte, že nespojitá funkce $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ je integrovatelná na intervalu $[0, 1]$.

2195. Dokažte, že Riemannova funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální,} \\ 1/n & \text{pro } x = m/n, \end{cases}$$

kde m a n $(n \ge 1)$ jsou vzájemně nesoudělná celá čísla, je integrovatelná na libovolném omezeném intervalu.

2196. Dokažte, že funkce $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ pro $x \ne 0$ a $f(0) = 0$ je integrovatelná na intervalu $[0, 1]$.

2197. Dokažte, že Dirichletova funkce

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální,} \\ 1 & \text{pro } x \text{ racionální,} \end{cases}$$

není integrovatelná na žádném intervalu.

2198. Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a $f_n(x) = \sup f(x)$ pro $x_i \le x < x_{i+1}$, kde $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

2199. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $[a, b]$, pak existuje posloupnost spojitých funkcí $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ taková, že

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)dx \text{ pro } a \le c \le b.$$

2200. Dokažte, že je-li omezená funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $[a, b]$, pak je její absolutní hodnota $|f(x)|$ také integrovatelná na $[a, b]$, přičemž

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

2201. Nechť funkce $f(x)$ je absolutně integrovatelná na intervalu $[a, b]$, tj. integrál $\int_a^b |f(x)|\,dx$ existuje. Je pak tato funkce integrovatelná na intervalu $[a, b]$?

Uvažujte případ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální,} \\ -1 & \text{pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$

2202. Nechť $f(x)$ je integrovatelná funkce na intervalu $[a, b]$, přičemž $A \le f(x) \le B$ pro $a \le x \le b$, a nechť $\varphi(x)$ je spojitá funkce definovaná na intervalu $[A, B]$. Dokažte, že složená funkce $\varphi(f(x))$ je integrovatelná na $[a, b]$.

2203. Jsou-li funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ integrovatelné, musí být složená funkce $f(\varphi(x))$ integrovatelná?

Uvažujte případ, kde $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x \ne 0 \end{cases}$ a $\varphi(x)$ je Riemannova funkce (viz úloha **2195**).

2204. Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $[A, B]$. Dokažte, že pak je $f(x)$ *integrálně spojitá*, tj. $\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0$, kde $[a, b] \subset [A, B]$.

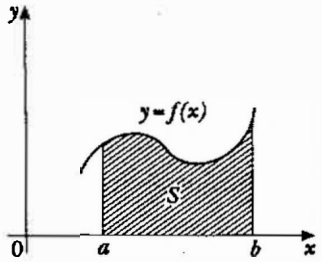
2205. Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Dokažte, že rovnost $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ platí tehdy a jen tehdy, jestliže $f(x) = 0$ ve všech svých bodech spojitosti na intervalu $[a, b]$.

§ 2. Výpočet určitého integrálu pomocí primitivní funkce

1. **NEWTONŮV VZOREC PRO VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU.** Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a nechť $F(x)$ je její *primitivní funkce*, tj. $F'(x) = f(x)$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Hodnota určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ funkce $f(x) \ge 0$ představuje geometricky obsah S části roviny vymezené křivkou $y = f(x)$, osou x a dvěma přímkami kolmými k ose x v bodech a a b (viz ●br. 9).



Obr. 9

2. **METODA PER PARTES PRO VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU.** Nechť $f(x)$ a $g(x) \in C^{(1)}[a,b]$. Pak

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

3. **SUBSTITUČNÍ METODA PRO VÝPOČET INTEGRÁLU.** Nechť jsou splněny následující předpoklady: 1) funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$; 2) funkce $\varphi(t)$ je spojitá a má spojitou derivaci $\varphi'(t)$ na intervalu $[\alpha,\beta]$, kde $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; 3) složená funkce $f(\varphi(t))$ je definovaná a spojitá na intervalu $[\alpha,\beta]$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Vypočtěte pomocí Newtonova vzorce následující určité integrály a znázorněte graficky odpovídající části roviny:

2206. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx.$

2207. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx.$

2208. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

2209. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2210. $\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

2211. $\int_0^2 |1-x|\,dx.$

2212. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1} \quad (0<\alpha<\pi).$

2213. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} \quad (0\le\varepsilon<1).$

2214. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $(|a|<1, |b|<1, ab>0)$.

2215. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$.

2216. Vysvětlete, proč formální použití Newtonova vzorce vede k nesprávnému výsledku u následujících určitých integrálů:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; b) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}$; c) $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$.

2217. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)dx$.

2218. Vypočtěte integrál $\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

Pomocí definice a výpočtu odpovídajícího určitého integrálu vypočítejte následující limity:

2219. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

2220. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

2221. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2222. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

2223. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

2224. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Vypočítejte limity:

2225. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

2226. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right]$.

Postupným oddělováním nekonečně malých veličin vyšších řádů vypočtěte následující limity:

2227. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{\pi}{n^2}+\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\sin\dfrac{2\pi}{n^2}+\ldots+\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$.

2228. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}$.

2229. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$ $(x>0)$.

2230. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{1/n}}{n+1}+\dfrac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\dfrac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

2231. Vypočtěte:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,dx,\quad \frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2\,dx,\quad \frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2\,dx.$$

2232. Vypočtěte:

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$; b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$; c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt$.

2233. Vypočtěte následující limity s určitými integrály:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}\,dx}$.

2233.1 Nechť $f(x)\in C[0,+\infty)$ a nechť $f(x)\to A$ pro $x\to+\infty$. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx$.

2234. Dokažte, že $\int_0^x e^{t^2}\,dt \approx \dfrac{1}{2x}e^{x^2}$ pro $x\to\infty$.

2235. Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$.

2236. Nech $f(x)$ je spojitá kladná funkce. Dokažte, že funkce

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

je pro $x \geq 0$ rostoucí.

2237. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int_0^2 f(x)\,dx$, kde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{pro } 1 < x \leq 2; \end{cases}$

b) $\int_0^1 f(x)\,dx$, kde $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \leq x \leq t, \\ t\dfrac{1-x}{1-t} & \text{pro } t \leq x \leq 1. \end{cases}$

2238. Vyjádřete integrály $I(\alpha)$ jako funkce parametru α a sestrojte jejich grafy, je-li:

a) $I(\alpha) = \int_0^1 x\,|x - \alpha|\,dx$; b) $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2}\,dx$; c) $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \dfrac{\sin x\,dx}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}}$.

Metodou per partes vypočtěte následující určité integrály:

2239. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x}\,dx$. **2240.** $\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$. **2241.** $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,dx$.

2242. $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$. **2243.** $\int_0^1 \arccos x\,dx$. **2244.** $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Substituční metodou vypočtěte následující určité integrály:

2245. $\int_{-1}^{1} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{5 - 4x}}$. **2246.** $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$. **2247.** $\int_0^{0,75} \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2248. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$. **2249.** $\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

2250. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ pomocí substituce $x-\frac{1}{x}=t$.

2251. Vysvětlete, proč formální použití substituce $x=\varphi(t)$ vede k nesprávným výsledkům u následujících integrálů:

a) $\int_{-1}^{1} dx$, kde $t=x^{2/3}$; b) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, kde $x=\frac{1}{t}$; c) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, kde $\operatorname{tg} x=t$.

2252. Lze pro výpočet integrálu $\int_{0}^{3} x\sqrt[3]{1-x^2}dx$ použít substituci $x=\sin t$?

2253. Lze pro výpočet integrálu $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$ substitucí $x=\sin t$ použít meze integrace π a $\frac{\pi}{2}$?

2254. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx.$$

2255. Dokažte rovnost $\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$ $(a>0)$.

2256. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[A, B]\supset[a, b]$. Vypočtěte $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)dy$ pro $[a-x, b-x]\subset[A, B]$.

2257. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[0, 1]$, pak platí

a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$; b) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

2258. Dokažte, že pro spojitou funkci $f(x)$ na intervalu $[-l, l]$ platí následující vztahy:

1) $\int_{-l}^{l} f(x)dx=2\int_0^l f(x)dx$, je-li funkce $f(x)$ sudá;

2) $\int_{-l}^{l} f(x)dx=0$, je-li funkce $f(x)$ lichá.

Uvedené vztahy interpretujte geometricky.

2259. Dokažte, že jedna z primitivních funkcí k sudé funkci je funkcí lichou. Dokažte, že každá primitivní funkce k liché funkci je funkce sudá.

2260. Vypočtěte integrál $\int_{1/2}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+(1/x)}dx$ pomocí substituce $t=x+\frac{1}{x}$.

2261. Při výpočtu integrálu $\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos x\,dx$ použijte substituci $\sin x=t$.

2262. Vypočtěte integrál $\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|dx$, kde n je přirozené číslo.

2263. Vypočtěte integrál $\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

2264. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$, kde $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$.

2265. Dokažte, že je-li $f(x)$ spojitá periodická funkce definovaná pro $-\infty<x<+\infty$, která má periodu T, pak

$$\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx,$$

kde a je libovolné číslo.

2266. Dokažte, že pro lichá n jsou funkce $F(x)=\int_{0}^{x}\sin^n x\,dx$ a $G(x)=\int_{0}^{x}\cos^n x\,dx$ periodické s periodou 2π a pro sudá n je každá z těchto funkcí součtem lineární a periodické funkce.

2267. Dokažte, že funkce $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$, kde $f(x)$ je spojitá periodická funkce s periodou T, je v obecném případě součtem lineární funkce a periodické funkce s periodou T.

Vypočtěte následující integrály:

2268. $\int_{0}^{1}x\left(2-x^2\right)^{1/2}dx$.

2269. $\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$.

2270. $\int_{1}^{e}(x\ln x)^2dx$.

2271. $\int_{1}^{9}x\sqrt[3]{1-x}\,dx$.

2272. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2273. $\int_{0}^{1}x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$.

2274. $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.

2275. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

2276. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

2277. $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$.

2278. $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2 dx$.

2279. $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\,dx$.

2280. $\int_0^{\ln 2} \sinh^4 x\,dx$.

Pomocí rekurentního vztahu vypočtěte následující integrály, které závisí na parametru – přirozeném čísle n:

2281. $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

2282. $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$.

2283. $I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$.

2284. $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

2285. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2286. $I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$.

2287. $I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1} dx$.

Pro komplexní funkci $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ reálné proměnné x, kde $f_1(x)=\mathrm{Re}\,f(x)$, $f_2(x)=\mathrm{Im}\,f(x)$ a $i^2=-1$, definujeme

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + i\int f_2(x)dx$$

Je zřejmé, že pak platí: $\mathrm{Re}\int f(x)dx = \int \mathrm{Re}\,f(x)dx$ a $\mathrm{Im}\int f(x)dx = \int \mathrm{Im}\,f(x)dx$.

2288. Pomocí Eulerova vzorce $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ dokažte, že

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } m\neq n, \\ 2\pi & \text{pro } m=n \end{cases}$$

(n a m jsou přirozená čísla).

2289. Dokažte, že $\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)}-e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$ (α a β jsou konstanty).

Pomocí Eulerových vzorců $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ vypočtěte následující integrály (m a n jsou přirozená čísla):

2290. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx$.

2291. $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$.

2292. $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx$.

2293. $\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\,dx$.

2294. $\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\,dx$.

Vypočtěte následující integrály (n je přirozené číslo):

2295. $\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x\,dx$.

2296. $\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x\,dx$.

2297. $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x\,dx$.

2298. $\int_0^{\pi/2} \ln\cos x \cos 2nx\,dx$.

2299. Opakovaným použitím metody per partes vypočtěte *Eulerův integrál prvního druhu (funkci beta)* $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$, kde m a n jsou přirozená čísla.

2300. *Legendreův polynom* $P_n(x)$ je definován vztahem:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dokažte, že

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{pro } m = n, \end{cases}$$

2301. Nechť funkce $f(x)$ má vlastní integrál na $[a,b]$ a $F(x)$ je funkce taková, že platí $F'(x) = f(x)$ ve všech bodech intervalu $[a,b]$ až na konečný počet jeho vnitřních bodů c_i $(i = 1, \ldots, p)$ a bodů a a b, kde má funkce $F(x)$ nespojitost prvního druhu („zobecněná primitivní funkce"). Dokažte, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x) - \sum_{i=1}^{p} \left[\lim_{x \to c_i} F(x) - \lim_{x \to c_i} F(x)\right].$$

2302. Nechť funkce $f(x)$ má vlastní integrál na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť $F(x) = C + \int_a^x f(\xi)d\xi$ je její neurčitý integrál. Dokažte, že funkce $F(x)$ je spojitá a ve všech bodech nespojitosti funkce $f(x)$ platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Co můžeme říci o derivaci funkce $F(x)$ v bodech nespojitosti funkce $f(x)$? Uvažujte následující případy:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a $f(x) = 0$ pro $x \neq \frac{1}{n}$; b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Vypočtěte neurčité integrály následujících omezených nespojitých funkcí:

2303. $\int \operatorname{sgn} x\,dx$. **2304.** $\int \operatorname{sgn}(\sin x)dx$. **2305.** $\int [x]dx$ $(x \geq 0)$.

2306. $\int x[x]dx$ $(x \geq 0)$. **2307.** $\int (-1)^{[x]}dx$.

2308. $\int_0^x f(t)dt$, $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |t| < l, \\ 0 & \text{pro } |t| > l. \end{cases}$

Vypočtěte určité integrály omezených nespojitých funkcí:

2309. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)dx$. **2310.** $\int_0^2 [e^x]dx$.

2311. $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$. **2312.** $\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x)dx$.

2313. $\int_1^{n+1} \ln[x]dx$, kde n je přirozené číslo.

2314. $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]dx$.

2315. Vypočtěte integrál $\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}dx$, kde E je množina hodnot z uzavřeného intervalu $[0, 4\pi]$, pro které má integrovaný výraz smysl.

§ 3. Věty o střední hodnotě

1. STŘEDNÍ HODNOTA FUNKCE. Číslo

$$M[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

nazýváme *střední hodnotou* funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a,b]$, pak existuje číslo $c \in (a,b)$ tak, že $M[f] = f(c)$.

2. **PRVNÍ VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ.** Nechť jsou splněny následující podmínky:
1) funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ jsou omezené a obě mají vlastní integrál na uzavřeném intervalu $[a,b]$;
2) funkce $\varphi(x)$ má konstantní znaménko na intervalu $a<x<b$. Pak

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\mu\int_a^b \varphi(x)dx, \text{ kde } m\le\mu\le M,\ m=\inf_{a\le x\le b} f(x) \text{ a } M=\sup_{a\le x\le b} f(x).$$

Jestliže je navíc 3) funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a,b]$, pak je $\mu=f(c)$, pro nějaké $c\in[a,b]$.

3. **DRUHÁ VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ.** Nechť jsou splněny následující podmínky:
1) funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ jsou omezené a obě mají vlastní integrál na uzavřeném intervalu $[a,b]$;
2) funkce $\varphi(x)$ je monotónní na intervalu $a<x<b$. Pak

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{x\to a}\varphi(x)\int_a^\xi f(x)dx+\lim_{x\to b}\varphi(x)\int_\xi^b f(x)dx, \text{ kde } a\le\xi\le b.$$

Jestliže navíc 3) funkce $\varphi(x)$ je klesající (v obecném smyslu!) a nezáporná, pak

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{x\to a}\varphi(x)\int_a^\xi f(x)dx \quad (a\le\xi\le b);$$

3) funkce $\varphi(x)$ je rostoucí (v obecném smyslu!) a nezáporná, pak

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{x\to b}\varphi(x)\int_\xi^b f(x)dx \quad (a\le\xi\le b).$$

2316. Určete znaménka následujících integrálů:

a) $\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$; b) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$; c) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$; d) $\int_{1/2}^{1} x^2\ln x\,dx$.

2317. Určete, které z následujících integrálů jsou větší:

a) $\int_0^{\pi/2}\sin^{10}x\,dx$, nebo $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$?

b) $\int_0^1 e^{-x}dx$, nebo $\int_0^1 e^{-x^2}dx$?

c) $\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$, nebo $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$?

2318. Vypočtěte střední hodnoty následujících funkcí na příslušných intervalech:
a) $f(x)=x^2$ na $[0,1]$; b) $f(x)=\sqrt{x}$ na $[0,100]$;
c) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ na $[0,2\pi]$; d) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ na $[0,2\pi]$.

2319. Vypočtěte střední hodnotu délky vektoru průvodiče s počátkem v ohnisku elipsy

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\quad(0<\varepsilon<1).$$

2320. Vypočtěte střední hodnotu rychlosti tělesa padajícího volným pádem s počáteční rychlostí v_0.

2321. Intenzita střídavého proudu se mění podle vztahu $i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$, kde i_0 je jeho amplituda, t je čas, T perioda a φ počáteční fáze. Vypočtěte střední hodnotu druhé mocniny intenzity proudu.

2321.1 Nechť $f(x) \in C\ [0, +\infty)$ a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$. Vypočtěte $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$. Uvažujte případ $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2322. Nechť $\int_0^x f(t)\,dt = x f(\theta x)$. Najděte hodnotu θ, je-li:

a) $f(t) = t^n$ $(n > -1)$; b) $f(t) = \ln t$; c) $f(t) = e^t$. Čemu se rovnají $\lim_{x \searrow 0} \theta$ a $\lim_{x \to +\infty} \theta$?

Pomocí první věty o střední hodnotě odhadněte hodnoty následujících integrálů:

2323. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0{,}5\cos x}$.

2324. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

2325. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x + 100}\,dx$.

2326. Dokažte rovnosti: a) $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$; b) $\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = 0$.

2326.1 Vypočtěte: a) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1}$; b) $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x}$, kde $a > 0$, $b > 0$ a $f(x) \in C[0, 1]$.

2327. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť $\varphi(x)$ je funkce spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b), přičemž $\varphi'(x) \geq 0$ pro $a < x < b$. Dokažte druhou větu o střední hodnotě pomocí metody per partes a první věty o střední hodnotě.

Pomocí druhé věty o střední hodnotě odhadněte hodnoty následujících integrálů:

2328. $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

2329. $\int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x\,dx$ $(\alpha \geq 0;\ 0 < a < b)$.

2330. $\int_a^b \sin x^2\,dx$ $(0 < a < b)$.

2331. Nechť funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $[a, b]$ spolu se svými druhými mocninami. Dokažte *Schwarzovu nerovnost*

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2 \le \int_a^b \varphi^2(x)dx \int_a^b \psi^2(x)dx .$$

2332. Nechť funkce $f(x)$ je spojitě diferencovatelná na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť $f(a) = 0$. Dokažte nerovnost $M^2 \le (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx$, kde $M = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$.

2333. Dokažte rovnost $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \quad (p > 0)$.

§ 4. Nevlastní integrál

1. **DEFINICE NEVLASTNÍHO INTEGRÁLU FUNKCE.** Jestliže funkce $f(x)$ je integrovatelná na každém omezeném intervalu $[a,b]$, pak definujeme

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx . \tag{1}$$

Jestliže funkce $f(x)$ není omezená v okolí bodu b a má vlastní integrál na každém intervalu $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, pak definujeme

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx . \tag{2}$$

V uvedených případech, jestliže existují konečné limity (1) nebo (2), říkáme, že odpovídající *integrály konvergují* (jsou konvergentní). V opačném případě *integrály divergují* (jsou divergentní).

2. **BOLZANOVO-CAUCHYOVO KRITÉRIUM KONVERGENCE INTEGRÁLU.** Pro konvergenci integrálu (1) je nutné a stačí, aby ke každému $\varepsilon > 0$ existovalo číslo $b = b(\varepsilon)$ tak, aby pro libovolnou dvojici $b' > b$ a $b'' > b$ platila nerovnost

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Analogicky se formuluje Bolzanovo-Cauchyovo kritérium pro konvergenci integrálu tvaru (2).

3. **KRITÉRIA ABSOLUTNÍ KONVERGENCE INTEGRÁLŮ.** Jestliže integrály funkce $|f(x)|$ konvergují, pak říkáme, že odpovídající integrály (1) a (2) funkce $f(x)$ *konvergují absolutně* (jsou tedy i neabsolutně konvergentní).

První srovnávací kritérium. Nechť $|f(x)| \le F(x)$ pro $x \ge a$. Jestliže integrál $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ konverguje, pak integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje absolutně.

Druhé srovnávací kritérium. Nechť $\psi(x) > 0$ a $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ pro $x \to +\infty$. Potom integrál $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ konverguje (diverguje), právě když konverguje (diverguje) integrál $\int_a^{+\infty} \psi(x)dx$. Speciálně toto tvrzení platí, je-li $\varphi(x) \sim \psi(x)$ pro $x \to +\infty$.

Třetí srovnávací kritérium.

a) Nechť $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$ pro $x \to +\infty$. Pak integrál (1) konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \le 1$.

b) Nechť $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$ pro $x \nearrow b$. Pak integrál (2) konverguje pro $p < 1$ a diverguje pro $p \ge 1$.

4. **DIRICHLETOVO KRITÉRIUM KONVERGENCE INTEGRÁLU.** Jsou-li splněny následující podmínky: 1) funkce $\varphi(x)$ je monotónní a konverguje k nule pro $x \to +\infty$; 2) funkce $f(x)$ má omezenou primitivní funkci

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi.$$

Pak integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ konverguje (ne nutně absolutně).

Speciálně integrály $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$ a $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ $(a > 0)$ konvergují pro $p > 0$.

5. **INTEGRÁL VE SMYSLU HLAVNÍ HODNOTY.** Jestliže funkce $f(x)$ je taková, že pro každé $\varepsilon > 0$ existují vlastní integrály $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ a $\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$ $(a < c < b)$, pak *integrálem ve smyslu hlavní hodnoty* nazýváme číslo

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right].$$

Analogicky v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx$.

Vypočtěte následující integrály:

2334. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(a > 0)$.

2335. $\int_0^1 \ln x\,dx$.

2336. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

2337. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2338. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

2339. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

2340. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

2341. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

2342. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

2343. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^5+x^{10}}}$. **2344.** $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$. **2345.** $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

2346. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a>0)$.

2347. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$.

Pomocí rekurentního vztahu vypočtěte hodnoty následujících nevlastních integrálů (n je přirozené číslo):

2348. $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

2349. $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx)} \quad (ac-b^2>0)$. **2350.** $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

2351. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$. **2352.** $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^{n+1}x}$.

2353. a) $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$; b) $\int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx$.

2354. Vypočtěte integrál $\int_E e^{-x/2}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$, kde E je množina těch hodnot x z intervalu $(0, +\infty)$, pro které má integrovaný výraz smysl.

2355. Dokažte rovnost $\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx$, kde $a>0$ a $b>0$, za předpokladu, že výraz na levé straně rovnosti má smysl.

2356. *Střední hodnotou funkce* $f(x)$ na intervalu $(0, +\infty)$ nazýváme číslo

$$M(f) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)d\xi.$$

Vypočtěte střední hodnoty následujících funkcí:

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$; b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; c) $f(x) = \sqrt{x}\sin x$.

2357. Vypočtěte následující limity s nevlastními integrály:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt$,

kde $\alpha>0$ a $f(t)$ je spojitá funkce na intervalu $[0, 1]$.

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů:

2358. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$.

2359. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

2360. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

2361. $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

2362. $\int\limits_0^1 x^p \ln^q\frac{1}{x}dx$.

2363. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx$ $(n\geq 0)$.

2364. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx$ $(a\neq 0)$.

2365. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$.

2366. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m\operatorname{arctg} x}{2+x^n}dx$ $(n\geq 0)$.

2367. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}dx$ $(n\geq 0)$.

2368. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$.

2369. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$.

2370. $\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

2370.1 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

2371. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$.

2372. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

2373. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$.

2374. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$.

2375. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$.

2376. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}$ $(a_1<a_2<\ldots<a_n)$.

2376.1 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}|x-1|^{\beta}dx$.

2377. $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$, kde $P_m(x)$ a $P_n(x)$ jsou vzájemně nesoudělné polynomy stupně m, respektive n.

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících integrálů:

2378. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

NÁVOD: Uvažujte nerovnost $|\sin x| \geq \sin^2 x$.

2379. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$.

2380. $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)dx \ (q \neq 0)$.

2380.1 $\int_0^{\pi/2} \sin(\sec x)dx$.

2380.2 $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)dx$.

2381. $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}dx \ (q \geq 0)$.

2382. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$.

2383. $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx$, kde $P_m(x)$ a $P_n(x)$ jsou polynomy a $P_n(x) > 0$ pro $x \geq a \geq 0$.

2384. Jestliže $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje, platí pak nutně, že $f(x) \to 0$ pro $x \to +\infty$?

Uvažujte následující případy:

a) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$; b) $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}dx$.

2384.1 Nechť pro funkci $f(x) \in C^{(1)}[x_0, +\infty)$ takovou, že $|f'(x)| < C$ pro $x_0 \leq x < +\infty$, integrál $\int_{x_0}^{+\infty} |f(x)|dx$ konverguje. Dokažte, že pak $f(x) \to 0$ pro $x \to +\infty$.

NÁVOD: Uvažujte integrál $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)f'(x)dx$.

2385. Můžeme konvergentní nevlastní integrál $\int_a^b f(x)dx$ neomezené funkce $f(x)$, definované na intervalu $[a,b]$, považovat za limitu odpovídajícího integrálního součtu $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, kde $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ a $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

2386. Nechť

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{1}$$

konverguje a $\varphi(x)$ je omezená funkce. Konverguje pak nutně i integrál

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx\,? \tag{2}$$

Najděte odpovídající příklad. Co můžeme říci o konvergenci integrálu (2), jestliže integrál (1) konverguje absolutně?

2387. Dokažte, že jestliže integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje a $f(x)$ je monotónní funkce, pak $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

2388. Nechť $f(x)$ je monotónní funkce na intervalu $0 < x \le 1$, která není omezená v okolí bodu $x = 0$. Dokažte, že jestliže existuje $\int_0^1 f(x)dx$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

2389. Dokažte, že jestliže funkce $f(x)$ je monotónní a omezená na intervalu $0 < x < a$ a jestliže existuje nevlastní integrál $\int_0^a x^p f(x)dx$, pak

$$\lim_{x\searrow 0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

2390. Ukažte, že platí

a) v.p. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$; b) v.p. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0$; c) v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = 0$.

2391. Dokažte, že pro $x \ge 0$ existuje

$$\mathrm{li}\,x = \text{v.p.} \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}.$$

Vypočtěte následující integrály:

2392. v.p. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

2393. v.p. $\int_{1/2}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

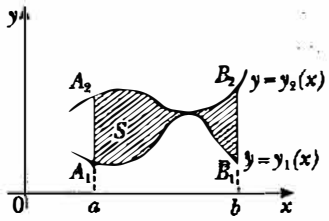
2394. v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$.

2395. v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$.

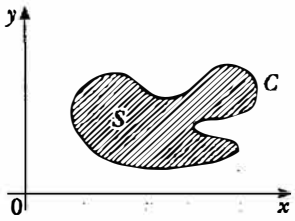
§ 5. Výpočet obsahu rovinných ploch

1. **OBSAH ROVINNÉ PLOCHY POPSANÉ V KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH.** Obsah S rovinné plochy $A_1A_2B_2B_1$ (viz obr. 10) vymezené dvěma spojitými křivkami $y=y_1(x)$ a $y=y_2(x)$ $(y_2(x)\geq y_1(x))$ a dvěma přímkami $x=a$ a $x=b$ $(a<b)$ je roven

$$S=\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]\,dx.$$



Obr. 10



Obr. 11

2. **OBSAH ROVINNÉ PLOCHY VYMEZENÉ KŘIVKOU POPSANOU PARAMETRICKÝMI ROVNICEMI.** Jestliže $x=x(t)$ a $y=y(t)$ $[0\leq t\leq T]$ jsou parametrické rovnice po částech hladké uzavřené jednoduché smyčky C s orientací proti směru hodinových ručiček a vymezující zleva plochu s obsahem S (viz obr. 11), pak je

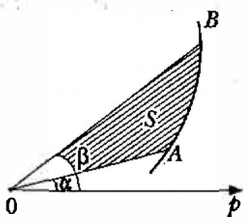
$$S=-\int_0^T y(t)x'(t)\,dt=\int_0^T x(t)y'(t)\,dt$$

nebo

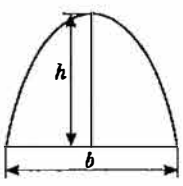
$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t)-x'(t)y(t)]\,dt.$$

3. **OBSAH ROVINNÉ PLOCHY POPSANÉ V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH.** Obsah S plochy OAB (obr. 12) vymezené spojitou křivkou $r=r(\varphi)$ a dvěma polopřímkami $\varphi=\alpha$ a $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ je roven

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$



Obr. 12



Obr. 13

2396. Dokažte, že obsah přímé parabolické úseče je roven $S=\frac{2}{3}bh$, kde b je délka její základny a h její výška (viz obr. 13).

Vypočtěte obsahy následujících rovinných ploch vymezených křivkami zadanými v kartézských souřadnicích: [1]

2397. $ax=y^2$, $ay=x^2$.

2398. $y=x^2$, $x+y=2$.

2399. $y=2x-x^2$, $x+y=0$.

2400. $y=|\log x|$, $y=0$, $x=0{,}1$, $x=10$.

2400.1 $y=2^x$, $y=2$, $x=0$.

2400.2 $y=(x+1)^2$, $x=\sin \pi y$, $y=0$ $(0\le y\le 1)$.

2401. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$ $(0\le x\le \pi)$.

2402. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=0$.

2403. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2404. $y^2=x^2(a^2-x^2)$.

2405. $y^2=2px$, $27py^2=8(x-p)^3$.

2406. $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ $(A>1, AC-B^2>0)$.

2407. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ (kisoida), $x=2a$.

2408. $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$, $y=0$ (traktrix).

2409. $y^2=\frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}$ $(x>0, n>-2)$.

2410. $y=e^{-x}|\sin x|$, $y=0$ $(x\ge 0)$.

2411. V jakém poměru dělí parabola $y^2=2x$ plochu vymezenou kružnicí $x^2+y^2=8$?

2412. Vyjádřete souřadnice bodů $M=(x, y)$ hyperboly $x^2-y^2=1$ jako funkce obsahu hyperbolické úseče $S=OM'M$, která je vymezena křivkou hyperboly $M'M$ a polopřímkami OM a OM', kde $O=(0, 0)$ a $M'=(x, -y)$ je bod osově souměrný s bodem M vzhledem k ose x.

Vypočtěte obsahy následujících rovinných ploch vymezených křivkami zadanými parametricky:

2413. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ (cykloida) a $y=0$.

2414. $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

2415. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ (závitnice) a $x=a$, $y\le 0$.

2416. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

[1] Všechny parametry v tomto i v dalších paragrafech kapitoly IV jsou kladná čísla.

2417. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\ y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t\ \left(c^2=a^2-b^2\right)$ (evoluta elipsy).

2417.1 $x=a\cos t,\ y=\frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

Vypočtěte obsahy následujících rovinných ploch vymezených křivkami zadanými v polárních souřadnicích:

2418. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (lemniskata). **2419.** $r=a(1+\cos\varphi)$ (kardioida).

2420. $r=a\sin 3\varphi$ (trojlístek).

2421. $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$ (parabola), $\varphi=\frac{\pi}{4},\ \varphi=\frac{\pi}{2}$.

2422. $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$ (elipsa). **2422.1** $r=3+2\cos\varphi$.

2422.2 $r=\frac{1}{\varphi},\ r=\frac{1}{\sin\varphi}\ \left(0<\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$.

2423. $r=a\cos\varphi,\ r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)\ \left(\left(\frac{a}{2},0\right)\in S\right)$.

2424. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou

$$\varphi=r\ \operatorname{arctg} r$$

a dvěma polopřímkami $\varphi=0$ a $\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2424.1 Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou

$$r^2+\varphi^2=1.$$

2424.2 Vypočtěte obsah plochy vymezené částí křivky

$$\varphi=\sin(\pi r)\ \ (0\le r\le 1).$$

2424.3 Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkami

$$\varphi=4r-r^3 \text{ a } \varphi=0.$$

2424.4 Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkami $\varphi=r-\sin r$ a $\varphi=\pi$.

2425. Vypočtěte obsah plochy vymezené uzavřenou smyčkou zadanou popisem

$$r=\frac{2at}{1+t^2},\ \varphi=\frac{\pi t}{1+t}.$$

Pomocí transformace kartézských souřadnic na polární souřadnice vypočtěte obsah ploch vymezených následujícími křivkami:

2426. $x^3+y^3=3axy$ (Descartesův list). **2427.** $x^4+y^4=a^2\left(x^2+y^2\right)$.

2428. $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$ (lemniskata).

Pomocí transformace kartézských souřadnic do parametrického tvaru vypočtěte obsah ploch vymezených následujícími křivkami:

2429. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (astroida). **2430.** $x^4+y^4=ax^2y$.

NÁVOD: Použijte parametrizaci $y=tx$.

§ 6. Výpočet délky rovinných křivek

1. **DÉLKA ROVINNÉ KŘIVKY V KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH.** Délka hladké (spojitě diferencovatelné) křivky

$$y=y(x)\ \ (a\le x\le b)$$

je rovna

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

2. **DÉLKA ROVINNÉ KŘIVKY ZADANÉ PARAMETRICKÝMI ROVNICEMI.** Jestliže je křivka zadána parametrickými rovnicemi

$$x=x(t),y=y(t)\ \ (t_0\le t\le T),$$

kde $x(t),\ y(t)\in C^{(1)}[t_0,T]$, pak je její délka rovna

$$s=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

3. **DÉLKA ROVINNÉ KŘIVKY POPSANÉ V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH.** Je-li

$$r=r(\varphi)\ \ (\alpha\le\varphi\le\beta),$$

kde $r(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, pak je délka odpovídající křivky rovna

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

O délkách prostorových křivek pojednává kapitola VIII.

Vypočtěte délky následujících křivek:

2431. $y=x^{3/2}\ \ (0\le x\le 4)$. **2432.** $y^2=2px\ \ (0\le x\le x_0)$.

2433. $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ od bodu $(0,a)$ k bodu (b,h).

2434. $y=e^x\ \ (0\le x\le x_0)$. **2435.** $x=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}\ln y\ \ (1\le y\le e)$.

2436. $y=a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}\ \ (0\le x\le b<a)$. **2437.** $y=\ln\cos x\ \left(0\le x\le a<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2438. $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\ \ (0<b\le y\le a)$.

2439. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}\ \left(0\le x\le\dfrac{5}{3}a\right)$. **2440.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (astroida).

2441. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\ y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t,\ c^2=a^2-b^2$ (evoluta elipsy).

2442. $x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t$.

2443. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$.

2444. $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$ pro $0\le t\le 2\pi$ (závitnice).

2445. $x=a(\sinh t-t),\ y=a(\cosh t-1)\ (0\le t\le T)$.

2445.1 $x=\cosh^3 t,\ y=\sinh^3 t\ (0\le t\le T)$.

2446. $r=a\varphi$ pro $0\le\varphi\le 2\pi$ (Archimedova spirála).

2447. $r=ae^{m\varphi}\ (m>0)$ pro $0<r<a$.

2448. $r=a(1+\cos\varphi)$.

2449. $r=\frac{p}{1+\cos\varphi}\left(|\varphi|\le\frac{\pi}{2}\right)$.

2450. $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

2451. $r=a\operatorname{tgh}\frac{\varphi}{2}\ (0\le\varphi\le 2\pi)$.

2452. $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\ (1\le r\le 3)$.

2452.1 $\varphi=\sqrt{r}\ (0\le r\le 5)$.

2452.2 $\varphi=\int_0^r\frac{\sinh\varrho}{\varrho}d\varrho\ (0\le r\le R)$.

2452.3 $r=1+\cos t,\ \varphi=t-\operatorname{tg}\frac{t}{2}\ (0\le t\le T<\pi)$.

2453. Dokažte, že délka elipsy

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t$$

je rovna délce jedné vlny sinusoidy $y=c\sin\frac{x}{b}$, kde $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

2454. Parabola $4ay=x^2$ se kutálí po ose x. Dokažte, že ohnisko paraboly opisuje řetězovku.

2455. Najděte poměr obsahu plochy, která je vymezena smyčkou křivky

$$y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x},$$

k obsahu plochy kruhu, který má obvod rovný délce smyčky této křivky.

§ 7. Výpočet objemu tělesa

1. **OBJEM TĚLESA O ZNÁMÉM PRŮŘEZU.** Má-li těleso konečný objem V a označuje-li $S = S(x)$ $[a \le x \le b]$ obsah průřezu tělesa rovinou, která je kolmá k ose x v bodě x, pak

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

2. **OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA.** Objem tělesa vytvořeného rotací rovinné plochy zadané nerovnostmi

$$a \le x \le b,\ 0 \le y \le y(x)$$

kolem osy x, kde $y(x)$ je spojitá jednoznačná funkce, je roven

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx.$$

V obecnějším případě je objem válce vytvořeného rotací rovinné plochy $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, kde $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou spojité nezáporné funkce, kolem osy x roven

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx.$$

2456. Vypočtěte objem podkrovní místnosti tvaru klínu, jehož základnou je obdélník o stranách a a b, jehož horní hrana je délky c a který má výšku h.

2457. Vypočtěte objem obelisku (komolého klínu) o výšce h, jehož rovnoběžné základny mají tvar obdélníků o stranách délek A, B a a, b.

2458. Vypočtěte objem komolého kužele výšky h, jehož základnami jsou elipsy o délkách poloos A, B a a, b.

2459. Vypočtěte objem rotačního paraboloidu o základně velikosti S a výšce H.

2460. Nechť se velikost plochy řezu $S = S(x)$ trojrozměrného tělesa, který byl veden kolmo k ose x, mění podle kvadratické závislosti

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad [a \le x \le b],$$

kde A, B a C jsou konstanty. Dokažte, že objem tohoto tělesa je roven

$$V = \frac{H}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right],$$

kde $H = b - a$ (Simpsonovo pravidlo).

2461. Těleso je dáno množinou bodů (x, y, z), kde $0 \le z \le 1$, přičemž $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, je-li z racionální, a $-1 \le x \le 0$, $-1 \le y \le 0$, je-li z iracionální. Dokažte, že objem tohoto tělesa není definován, ačkoli pro odpovídající integrál platí

$$\int_0^1 S(z)\,dz = 1.$$

Vypočtěte objemy těles, která jsou ohraničena následujícími plochami:

2462. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=\frac{c}{a}x,\ z=0.$

2463. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (elipsoid).

2464. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ z=\pm c.$

2465. $x^2+z^2=a^2,\ y^2+z^2=a^2.$

2466. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=ax.$

2467. $z^2=b(a-x),\ x^2+y^2=ax.$

2468. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{z^2}=1\ (0<z<a).$

2469. $x+y+z^2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

2470. $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2.$

2471. Dokažte, že objem tělesa vytvořeného rotací rovinné plochy

$$a\le x\le b,\ 0\le y\le y(x),$$

kde $y(x)$ je jednoznačná spojitá funkce, kolem osy y, je roven

$$V_y=2\pi\int_a^b x\,y(x)\,dx.$$

Vypočtěte objemy těles ohraničených plochami, které vzniknou rotací následujících křivek:

2472. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}$ $(0\le x\le a)$ kolem osy x.

2473. $y=2x-x^2,\ y=0$: a) kolem osy x; b) kolem osy y.

2474. $y=\sin x,\ y=0,\ (0\le x\le\pi)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y.

2475. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2,\ y=b\left|\frac{x}{a}\right|$: a) kolem osy x; b) kolem osy y.

2476. $y=e^{-x},\ y=0\ (0\le x<+\infty)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y.

2477. $x^2+(y-b)^2=a^2\ (0<a\le b)$ kolem osy x.

2478. $x^2-xy+y^2=a^2$ kolem osy x.

2479. $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}\ (0\le x<+\infty)$ kolem osy x.

2480. $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y; c) kolem přímky $y=2a$.

2481. $x=a\sin^3 t,y=b\cos^3 t\ (0\le t\le 2\pi)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y.

2481.1 Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy vymezené smyčkou křivky $x=2t-t^2,\ y=4t-t^3$ kolem a) osy x; b) osy y.

2482. Dokažte, že objem tělesa, které vznikne rotací rovinné plochy

$$0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi,\ 0 \le r \le r(\varphi)$$

kolem polární osy (φ a r jsou polární souřadnice), je roven

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi .$$

Vypočtěte objemy těles, která vzniknou rotací následujících rovinných ploch zadaných v polárních souřadnicích:

2483. $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$:

a) kolem polární osy; b) kolem přímky $r\cos\varphi = -\frac{a}{4}$.

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y; c) kolem přímky $y = x$.

NÁVOD: Použijte transformaci na polární souřadnice.

2484.1 Vypočtěte objem tělesa, které je vytvořené rotací rovinné plochy vymezené obloukem Archimedovy spirály

$$r = a\varphi \quad (a > 0;\ 0 \le \varphi \le \pi)$$

kolem polární osy.

2484.2 Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací plochy vymezené křivkami $\varphi = \pi r^3$, $\varphi = \pi$ kolem polární osy.

2485. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací plochy $a \le r \le a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ kolem polární osy.

§ 8. Výpočet povrchu rotačních ploch

Povrch rotační plochy vzniklé rotací hladké křivky AB kolem osy x je dán vzorcem

$$P = 2\pi \int_{A}^{B} |y| \, ds ,$$

kde ds je diferenciál délky křivky.

Vypočtěte povrchy ploch vzniklých rotací následujících křivek:

2486. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(0 \le x \le a)$ kolem osy x.

2487. $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}$ $(|x| \le b)$ kolem osy x.

2488. $y = \operatorname{tg} x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$ kolem osy x.

2489. $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le x_0)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y.

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b \le a)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y.

2491. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b \geq a)$ kolem osy x.

2492. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ kolem osy x.

2493. $y=a\cosh\frac{x}{a}$ $(|x| \leq b)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y.

2494. $\pm x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ kolem osy x.

2495. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$: a) kolem osy x; b) kolem osy y; c) kolem přímky $y=2a$.

2496. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ kolem přímky $y=x$.

2497. $r=a(1+\cos\varphi)$ kolem polární osy.

2498. $r^2=a^2\cos 2\varphi$: a) kolem polární osy; b) kolem osy $\varphi=\frac{\pi}{2}$; c) kolem osy $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

2499. Těleso je vytvořeno rotací plochy vymezené parabolou $ay=a^2-x^2$ a osou x kolem osy x. Najděte poměr mezi povrchem tohoto rotačního tělesa a povrchem koule o stejném objemu.

2500. Plocha vymezená parabolou $y^2=2px$ a přímkou $x=p/2$ rotuje kolem přímky $y=p$. Spočtěte objem a povrch takto vzniklého rotačního tělesa.

§ 9. Výpočet momentů. Souřadnice těžiště

1. **MOMENTY.** Jestliže v rovině xy hmotnost M s hustotou $\varrho=\varrho(y)$ vyplňuje nějaké omezené kontinuum Ω (úsečku, křivku, rovinnou plochu) a je-li $\omega=\omega(y)$ odpovídající míra (délka úsečky nebo křivky, obsah plochy) té části kontinua Ω, pro jejíž body platí, že jejich souřadnice nejsou větší než y, pak se *k-tým momentem* hmotnosti M vzhledem k ose x nazývá číslo

$$M_k=\lim_{\max\Delta y_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varrho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i)=\int_{\Omega}\varrho y^k d\omega(y) \quad (k=0,1,2,\ldots),$$

kde $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$ a $\Delta\omega(y_i)=\omega(y_i)-\omega(y_{i-1})$.

Jako speciální případy získáme pro $k=0$ *hmotnost* M, pro $k=1$ *statický moment* a pro $k=2$ *moment setrvačnosti*. Analogicky se definují hmotnostní momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám. Je-li $\varrho=1$, pak se odpovídající moment nazývá *geometrickým* (moment úsečky nebo křivky, rovinné plochy, tělesa atd.).

2. **TĚŽIŠTĚ.** Souřadnice těžiště (x_0,y_0) homogenní rovinné plochy o obsahu S se definují pomocí vzorců

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S},\quad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

kde $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ jsou geometrické statické momenty této plochy vzhledem k osám y a x.

2501. Vypočtěte statický moment a moment setrvačnosti půlkružnice o poloměru a vzhledem k průměru, který prochází oběma koncovými body této půlkružnice.

2501.1 Vypočtěte statický moment oblouku paraboly $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le p/2)$ vzhledem k přímce $x = p/2$.

2502. Vypočtěte statický moment a moment setrvačnosti homogenní destičky tvaru trojúhelníka o základně b a výšce h vzhledem k jeho základně $(\varrho = 1)$.

2502.1 Vypočtěte momenty setrvačnosti $I_x = M_2^{(x)}$ a $I_y = M_2^{(y)}$ parabolické úseče vymezené křivkami $ay = 2ax - x^2$ $(a > 0)$ a $y = 0$ vzhledem k osám x a y.

Čemu se rovnají *poloměry setrvačnosti* r_x a r_y, to jest veličiny určené vztahy

$$I_x = Sr_x^2, \quad I_y = Sr_y^2,$$

kde S je plocha této úseče?

2503. Vypočtěte momenty setrvačnosti homogenní eliptické destičky s poloosami o velikostech a a b vzhledem k jejím hlavním osám $(\varrho = 1)$.

2504. Vypočtěte statický moment a moment setrvačnosti homogenního kruhového kužele s poloměrem základny r a výškou h vzhledem k rovině jeho podstavy $(\varrho = 1)$.

2504.1 Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru R a hmotnosti M vzhledem k jejímu průměru.

2505. Dokažte první Guldinovu větu: povrch tělesa, které vzniklo rotací rovinné křivky C kolem osy, která ji neprotíná a která leží v rovině této křivky, se rovná součinu její délky a délky kružnice opisované těžištěm křivky C.

2506. Dokažte druhou Guldinovu větu: objem tělesa, které vzniklo rotací rovinné plochy S kolem osy, která ji neprotíná a která leží v rovině této plochy, se rovná součinu obsahu plochy S a délky kružnice opisované těžištěm této plochy.

2507. Určete souřadnice těžiště kruhového oblouku zadaného rovnicemi $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ $(|\varphi| \le \alpha \le \pi)$.

2508. Určete souřadnice těžiště plochy vymezené parabolami $ax = y^2$, $ay = x^2$ $(a > 0)$.

2509. Určete souřadnice těžiště plochy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$.

2510. Určete souřadnice těžiště homogenní polokoule o poloměru a.

2511. Určete souřadnice těžiště (φ_0, r_0) části logaritmické spirály $r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ od bodu $(-\infty, 0)$ k bodu (φ, r). Jakou křivku opisuje bod (φ_0, r_0) při pohybu bodu (φ, r)?

2512. Určete souřadnice těžiště plochy vymezené křivkou $r = a(1 + \cos\varphi)$.

2513. Určete souřadnice těžiště plochy, která je vymezena prvním obloukem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ a osou x.

2514. Určete souřadnice těžiště tělesa vzniklého rotací plochy $0 \le x \le a$, $y^2 \le 2px$ kolem osy x.

2515. Určete souřadnice těžiště polosféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \ge 0)$.

§ 10. Úlohy z mechaniky a fyziky

Řešte následující úlohy sestavením odpovídajících integrálních součtů a vypočtením jejich limit.

2516. Určete hmotnost tyče délky $l = 10$ m, jestliže se její hustota mění podle vztahu $\delta = 6 + 0{,}3x$ kg/m, kde x je vzdálenost od jednoho konce tyče.

2517. Vypočtěte velikost práce, která se vykoná zvednutím tělesa o hmotnosti m z povrchu Země o poloměru R do výšky h. Jaká bude velikost této práce, jestliže se těleso vzdálí do nekonečna?

2518. Vypočtěte velikost práce, která se vykoná roztažením pružiny o 10 cm, jestliže se silou 1 N roztáhne o 1 cm.

Návod: Použijte Hookův zákon.

2519. Válec o průměru 20 cm a výšce 80 cm je naplněn parou pod tlakem 10 kPa. Vypočtěte práci potřebnou k zmenšení objemu páry na polovinu při konstantní teplotě.

2520. Vypočtěte sílu, kterou působí voda na kolmou stěnu tvaru půlkruhu o poloměru a, který má průměr v úrovni vodní hladiny.

2521. Vypočtěte sílu, kterou působí voda na kolmou stěnu tvaru lichoběžníka o spodní základně délky $a = 10$ m, horní základně délky $b = 6$ m a o výšce $h = 5$ m, je-li spodní základna $c = 20$ m pod úrovní vodní hladiny.

Řešte následující úlohy sestavením a řešením příslušných diferenciálních rovnic:

2522. Rychlost hmotného bodu se mění podle vztahu $v = v_0 + at$. Jakou dráhu urazí tento bod během časového intervalu $[0, T]$?

2523. Homogenní koule o poloměru R a hustotě δ rotuje kolem svého průměru úhlovou rychlostí ω. Určete kinetickou energii koule.

2524. Jakou silou přitahuje hmotná přímka s konstantní hustotou μ_0 hmotný bod o hmotnosti m, který se nalézá ve vzdálenosti a od této přímky?

2525. Vypočtěte sílu, kterou přitahuje homogenní kruhová destička o poloměru a a konstantní plošné hustotě δ_0 hmotný bod P o hmotnosti m, který je umístěn na přímce procházející jejím středem Q, kolmé k rovině kruhu, je-li vzdálenost PQ tohoto bodu od středu kruhu rovna b.

2526. Podle Toricelliho zákona je rychlost vytékání kapaliny z nádoby rovna $v = c\sqrt{2gh}$, kde g je gravitační zrychlení, h je výška hladiny kapaliny nad výtokovým otvorem a $c = 0{,}6$ je empiricky určený koeficient. Kdy se vyprázdní naplněná a kolmo postavená válcová nádoba o průměru základny $D = 1$ m, výšce $H = 2$ m, ze které vytéká tekutina otvorem o průměru $d = 1$ cm ve dně?

2527. Jaký tvar musí mít rotačně symetrická nádoba, aby snižování hladiny kapaliny při vytékání z ní bylo rovnoměrné?

2528. Rychlost radioaktivního rozpadu radia je v každém okamžiku úměrná jeho okamžitému množství. Najděte zákon radioaktivního rozpadu radia, jestliže na počátku rozpadu v čase $t=0$ bylo jeho množství Q_0 a během doby $T=1600$ let se jeho množství zmenší na polovinu.

2529. V případě procesu druhého řádu je rychlost chemické reakce, která mění látku A na látku B, úměrná součinu koncentrací těchto látek. Vypočtěte procentuální množství látky B v reakční směsi v čase $t=1$ h, jestliže v čase $t=0$ bylo ve směsi 20% látky B a v čase $t=15$ min bylo ve směsi této látky 80%.

2530. Podle Hookova zákona je relativní prodloužení tyče ε úměrné napětí síly σ v jejím příslušném průřezu, tj. platí $\varepsilon=\sigma/E$, kde E je Youngův modul v tahu. Vypočtěte prodloužení namáhaného tělesa tvaru kužele upevněného základnou a obráceného vrcholem směrem dolů, jestliže jeho základna má poloměr R, výška kužele je H a jeho hustota γ.

§ 11. Přibližné metody výpočtu určitých integrálů

1. **OBDÉLNÍKOVÉ PRAVIDLO.** Jestliže funkce $y=y(x)$ je spojitá a má derivace dostatečně vysokých řádů na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$ a $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$ $(i=0,1,\ldots,n)$, $y_i=y(x_i)$, pak

$$\int_a^b y(x)\,dx=h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})+R_n,$$

kde

$$R_n=\frac{(b-a)h}{2}y'(\xi)\quad(a\le\xi\le b).$$

2. **LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO.** Za výše uvedených předpokladů platí

$$\int_a^b y(x)\,dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

kde

$$R_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi')\quad(a\le\xi'\le b).$$

3. **PARABOLICKÉ PRAVIDLO (SIMPSONOVO PRAVIDLO).** Nechť $n=2k$. Pak

$$\int_a^b y(x)\,dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2k-2})]+R_n,$$

kde

$$R_n=-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi'')\quad(a\le\xi''\le b).$$

2531. Vypočtěte přibližně podle obdélníkového pravidla ($n = 12$) integrál

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

a výsledek porovnejte s přesným výsledkem.

Pomocí lichoběžníkového pravidla vypočtěte přibližně následující integrály a odhadněte chybu výpočtu:

2532. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n = 8)$. **2533.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n = 12)$. **2534.** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}\, dx$ $(n = 6)$.

Pomocí Simpsonova pravidla vypočtěte následující integrály:

2535. $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx$ $(n = 4)$. **2536.** $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x}\, dx$ $(n = 6)$.

2537. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ $(n = 10)$. **2538.** $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\ln(1+x)}$ $(n = 6)$.

2539. Pro $n = 10$ vypočtěte Catalanovu konstantu

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

2540. Pomocí vzorce $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ vypočtěte číslo π s přesností na 10^{-5}.

2541. Vypočtěte $\int_0^1 e^{x^2} dx$ s přesností na 0,001.

2542. Vypočtěte $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ s přesností na 10^{-4}.

2543. S přesností na 0,001 vypočtěte pravděpodobnostní integrál $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

2544. Vypočtěte přibližně obvod elipsy, která má poloosy délek $a = 10$ a $b = 6$.

2545. Sestrojte graf funkce $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ $(0 \le x \le 2\pi)$ po jednotlivých bodech. Při konstrukci použijte délku kroku $\Delta x = \pi/3$.

KAPITOLA V

Řady

§ 1. Číselné řady. Kritéria konvergence řad s konstantním znaménkem

1. **Obecné pojmy.** Číselná řada

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

se nazývá *konvergentní*, existuje-li konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (\textit{součet řady}),$$

kde $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. V opačném případě se řada (1) nazývá *divergentní*.

2. **Bolzanovo-Cauchyovo kritérium.** Řada (1) konverguje tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N = N(\varepsilon)$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n > N$ a p je splněna nerovnost

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon.$$

Speciálně, konverguje-li řada (1), pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3. **První srovnávací kritérium.** Mějme kromě řady (1) ještě řadu

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

Jestliže pro každé $n \geq n_0$ platí nerovnost

$$0 \leq a_n \leq b_n,$$

pak 1) z konvergence řady (2) vyplývá konvergence řady (1); 2) z divergence řady (1) vyplývá divergence řady (2). Speciálně, je-li $a_n \sim b_n$ pro $n \to \infty$, pak řady s kladnými členy (1) a (2) buď obě konvergují, nebo obě divergují.

4. **Druhé srovnávací kritérium.** Je-li

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$ [1]

pak a) pro $p > 1$ řada (1) konverguje a b) pro $p \leq 1$ diverguje.

5. **D Alembertovo podílové kritérium.** Je-li $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

pak a) pro $q < 1$ je řada (1) konvergentní a b) pro $q > 1$ je divergentní.

---

[1] Význam symbolu O^* najdete v kapitole I, § 6, bod 1.

6. **CAUCHYOVO ODMOCNINOVÉ KRITÉRIUM.** Je-li $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

pak a) pro $q < 1$ je řada (1) konvergentní a b) pro $q > 1$ je divergentní.

7. **RAABEOVO KRITÉRIUM.** Je-li $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p,$$

pak a) pro $p > 1$ je řada (1) konvergentní a b) pro $p < 1$ je divergentní.

8. **GAUSSOVO KRITÉRIUM.** Je-li $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

kde $|\theta_n| < C$ a $\varepsilon > 0$, pak a) pro $\lambda > 1$ je řada (1) konvergentní a b) pro $\lambda < 1$ je divergentní; c) pro $\lambda = 1$ je řada (1) konvergentní, je-li $\mu > 1$, a divergentní, je-li $\mu \leq 1$.

9. **INTEGRÁLNÍ CAUCHYOVO KRITÉRIUM.** Nechť $f(x)$ $(x \geq 1)$ je nezáporná nerostoucí spojitá funkce. Pak je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergentní nebo divergentní právě tehdy, je-li konvergentní nebo divergentní integrál

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Dokažte konvergenci následujících řad a najděte jejich součty:

2546. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$

2547. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$

2548. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

2550. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$

2551. a) $q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + \ldots + q^n \sin n\alpha + \ldots$;

b) $q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \ldots + q^n \cos n\alpha + \ldots$ $(|q| < 1)$.

2552. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

2553. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

NÁVOD: Ukažte, že pro $x \neq k\pi$ (k je celé číslo) není možné, aby platilo $\sin nx \to 0$ pro $n \to \infty$!

2554. Dokažte, že jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ kde } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \ldots),$$

která se získá uzávorkováním členů původní řady beze změny jejich pořadí, také konvergentní a má tentýž součet. Opačně to však neplatí. Najděte protipříklad.

2555. Dokažte, že jsou-li členy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kladné a řada $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, která se získá uzávorkováním členů původní řady, je konvergentní, pak je původní řada také konvergentní.

Vyšetřete konvergenci následujících řad:

2556. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

2557. $0{,}001 + \sqrt{0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}001} + \ldots$

2558. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

2559. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$

2560. $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \ldots + \frac{1}{1000n+1} + \ldots$

2561. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{n}{2n-1} + \ldots$

2562. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \ldots$

2564. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \ldots$

2565. Dokažte, že číselná řada, která má členy inverzní členům aritmetické posloupnosti (má-li tato inverze smysl), je divergentní.

2566. Dokažte, že jsou-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $a_n \le c_n \le b_n$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ také konvergentní. Co můžeme říci o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, jsou-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní?

2567. Mějme dvě divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s nezápornými členy. Co můžeme říci o konvergenci řad

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ a b) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

2568. Dokažte, že je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \ge 0)$ konvergentní, pak je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergentní. Obrácené tvrzení neplatí. Uveďte protipříklady.

2569. Dokažte, že jsou-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergentní, pak jsou konvergentní také řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

2570. Dokažte, že je-li $\lim_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

2571. Dokažte, že je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými a ostře klesajícími členy konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

2572. Konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right) = 0$ pro $p = 1, 2, 3, \ldots$?

Dokažte konvergenci následujících řad pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$ $(|a_n| < 10)$.

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^n} + \ldots$

2575. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \ldots$

2575.1 $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots$

Návod: Použijte nerovnost

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Dokažte divergenci následujících řad pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria:

2576. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

2577. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$

2577.1 $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$

Vyšetřete konvergenci následujících řad pomocí srovnávacích kritérií, d Alembertova podílového kritéria nebo pomocí Cauchyova odmocninového kritéria:

2578. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$

2580. $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2581. a) $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{2^n n!}{n^n}+\ldots$;

b) $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{3^n n!}{n^n}+\ldots$

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots$

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots$

2585. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$.

2585.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n=\begin{cases}1/n, & \text{je-li } n=m^2 \text{ pro některé přirozené číslo } m,\\ 1/n^2 & \text{je-li } n\neq m^2 \text{ pro všechna přirozená čísla } m.\end{cases}$

2585.2 $\sum_{n=1}^{\infty} nx\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

2586. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2587. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2588. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

2589. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{(n+1)/2}}$.

2589.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.

2589.2 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$

NÁVOD: $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$.

2591. Dokažte, že je-li $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ $(a_n>0)$, pak $a_n=o\left(q_1^n\right)$, kde $q_1>q$.

2591.1 Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$, která má všechny členy kladné, je splněna nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\varrho<1$ pro $n\ge n_0$. Dokažte, že pro zbytek řady $R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$ platí odhad

$$R_n\le a_{n_0}\frac{\varrho^{n-n_0+1}}{1-\varrho} \text{ pro } n\ge n_0.$$

2591.2 Kolik členů řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!}$, kde $(2n)!!=2\cdot4\ldots2n$, stačí vzít, aby se odpovídající částečný součet S_n se lišil od součtu S této řady o méně než $\varepsilon=10^{-6}$?

2592. Dokažte, že je-li $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$ $(a_n>0)$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Opačné tvrzení neplatí. Uvažujte případ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$$

2593. Dokažte, že existuje-li pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$ limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \qquad (1)$$

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULTY
Matematické oddělení
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

pak existuje také limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{2}$$

Opačné tvrzení neplatí: jestliže existuje limita (2), pak limita (1) nemusí existovat. Uvažujte případ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. Dokažte, že je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ $(a_n \geq 0)$, pak a) pro $q < 1$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní; b) pro $q > 1$ je tato řada divergentní (*zobecněné Cauchyovo odmocninové kritérium*).

Vyšetřete konvergenci následujících řad:

2595. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

2596. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\cos^2 n\pi/3}{2^n}$.

2597. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$.

2597.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Vyšetřete konvergenci následujících řad s použitím Raabeova a Gaussova kritéria:

2598. $\left(\frac{1}{p}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \ldots$

2599. $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \ldots (a>0, b>0, d>0)$.

2600. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

2601. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$.

2602. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\ldots(q+n)}$ $(q>0)$.

2603. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$.

2604. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$.

2605. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$ $(p>0, q>0)$.

2606. Dokažte, že platí-li pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ s kladnými členy pro $n \to \infty$ podmínka $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, pak

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right),$$

kde $\varepsilon > 0$ je libovolně malé číslo. Přitom, je-li $p > 0$, pak $a_n \searrow 0$ pro $n \to \infty$ (tj. a_n pro $n \geq n_0$ ostře klesá k nule).

Stanovením řádu klesání členů a_n vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li:

2607. $a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q}$, kde $n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q > 0$.

2608. $a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$.

2609. $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln \frac{n-1}{n+1}$ $(n > 1)$.

2610. $a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n}\right)$.

2611. $a_n = \log_{b^n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $(a > 0, b > 0)$.

2612. $a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

2613. $a_n = \frac{1}{n^{1 + k/\ln n}}$.

2614. $a_n = \frac{1}{n^{1 + 1/n}}$.

2614.1 Dokažte následující kritérium konvergence řad: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy je konvergentní, platí-li

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1 \text{ pro } n > n_0,$$

a je divergentní, platí-li

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \leq 1 \text{ pro } n > n_0.$$

2615. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ je konvergentní, existuje-li takové číslo $\alpha > 0$, že $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ pro $n \geq n_0$, a je divergentní, platí-li $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ pro $n \geq n_0$ (*logaritmické kritérium*).

Vyšetřete konvergenci řad s následujícími obecnými členy:

2616. $a_n = n^{\ln x}$ $(x > 0)$.

2617. $a_n = \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ $(n > 1)$.

2618. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ $(n > 1)$.

Pomocí Cauchyova integrálního kritéria vyšetřete konvergenci řad s následujícími obecnými členy:

2619. $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n}$ $(n > 1)$.

2620. $a_n = \dfrac{1}{n (\ln n)^p (\ln\ln n)^q}$ $(n > 2)$.

2620.1 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \ldots \ln(n+1)}{\ln(2+p) \cdot \ln(3+p) \ldots \ln(n+1+p)} \quad (p > 0).$$

2620.2 Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, kde $\nu(n)$ je počet cifer čísla n.

2620.3 Nechť λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jsou po sobě jdoucí kladné kořeny rovnice $\operatorname{tg} x = x$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

2621. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

2622. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými a klesajícími členy konverguje nebo diverguje právě tehdy, konverguje-li nebo diverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2623. Nechť $f(x)$ je kladná nerostoucí funkce. Dokažte, že jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje, pak pro její zbytkový člen

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

platí odhad

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Pomocí tohoto výsledku vypočtěte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ s přesností na 0,01.

2624. Dokažte následující *Jermakovovo kritérium konvergence řad*: nechť $f(x)$ je kladná klesající funkce a nechť $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ je konvergentní pro $\lambda<1$ a divergentní pro $\lambda>1$.

2625. Dokažte *Lobačevského kritérium konvergence řad*: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy, které ostře klesají k nule, je konvergentní nebo divergentní, je-li konvergentní nebo divergentní řada

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

kde p_m je největší index členu a_n této řady, který vyhovuje nerovnosti

$$a_n \geq 2^{-m} \quad (n=1,2,\ldots,p_m).$$

Vyšetřete konvergenci následujících řad:

2626. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

2627. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$.

2628. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

2629. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$.

2631. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

2632. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

2633. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$.

2634. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

2635. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

2636. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

2637. $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(\frac{\cosh\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

2638. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

2639. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2640. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{1/n}-\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right)$ $(a>0, b>0, c>0)$.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-1\right)$.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$.

2643. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-\left(b\ln n+c\ln^2 n\right)}$ $(a>0)$.

2644. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ $(a>0, b>0)$.

2645. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\ldots(2n)!}$.

Vyšetřete konvergenci řad $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ s následujícími obecnými členy:

2646. $u_n=\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$.

2647. $u_n=\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}dx}$.

2648. $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

2649. $u_n=\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$.

2650. $u_n=\int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx$.

2651. $u_n=\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$.

2652. $u_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^{\alpha}}$.

Vyšetřete konvergenci následujících posloupností x_n $(n=1,2,\ldots)$ pomocí konvergence vhodných řad, je-li:

2653. $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$.

2654. $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{(\ln n)^2}{2}$.

2655. Kolik členů je třeba asi vzít, abychom sečetli následující řady s přesností na 10^{-5}:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$?

§ 2. Kritéria konvergence řad s obecnými členy

1. **ABSOLUTNÍ KONVERGENCE ŘADY.** Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

se nazývá *absolutně konvergentní*, jestliže je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

konvergentní. V tomto případě je řada (1) také konvergentní. Součet absolutně konvergentní řady nezávisí na pořadí sčítaných členů.

K určení absolutní konvergence řady (1) stačí použít na řadu (2) známá kritéria konvergence pro řady s konstantním znaménkem.

Jestliže řada (1) konverguje a řada (2) diverguje, pak se řada (1) nazývá *neabsolutně (podmíněně) konvergentní*. Pro libovolné číslo je možné přerovnat neabsolutně konvergentní řadu tak, aby se její součet tomuto číslu rovnal (*Riemannova věta*).

2. **LEIBNIZOVO KRITÉRIUM.** Řada se střídavými znaménky

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots$$

($b_n \geq 0$) je konvergentní (obecně neabsolutně), je-li a) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) a b) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. V tomto případě platí pro zbytek řady

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots$$

odhad

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3. **ABELOVO KRITÉRIUM.** Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

je konvergentní jestliže: 1) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní; 2) čísla b_n ($n = 1, 2, \ldots$) tvoří monotónní a omezenou posloupnost.

4. **DIRICHLETOVO KRITÉRIUM.** Řada (3) je konvergentní, jsou-li splněny následující podmínky: 1) částečné součty $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ jsou omezené stejnou konstantou; 2) b_n konverguje monotónně k nule pro $n \to \infty$.

2656. Dokažte, že členy neabsolutně konvergentní řady je možné bez jejich přerovnání uzávorkovat tak, že takto získaná nová řada bude absolutně konvergentní.

2657. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, jsou-li splněny následující podmínky: a) $a_n \to 0$ pro $n \to \infty$; b) řada $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ získaná uzávorkováním členů řady $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ bez jejich přerovnání je konvergentní; c) počet sčítanců a_i v součtech $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < \ldots)$ je omezený.

2658. Dokažte, že součet konvergentní řady se nezmění, jestliže členy této řady přerovnáme tak, že žádný z nich nebude od své původní pozice vzdálen o více než m míst, kde m je přirozené číslo.

Dokažte konvergenci následujících řad a najděte jejich součty:

2659. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots$

2660. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$

2661. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

NÁVOD: Použijte vzorec $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, kde C je Eulerova konstanta a $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

2662. Vypočtěte součty následujících řad získaných přerovnáním členů řady, pro kterou platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$; b) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$

2663. Přerovnejte členy konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ tak, aby se stala divergentní.

Vyšetřete konvergenci následujících řad s obecnými členy:

2664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$.

2665. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$.

2666. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$

2666.1 Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \tag{1}$$

kde $b_n > 0$ a $b_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Vyplývá z těchto předpokladů, že je řada (1) konvergentní? Vyšetřete případ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}.$$

2667. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{n\pi}{4}$.

2668. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

2669. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2670. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2671. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$.

2672. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

2673. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

2673.1 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\frac{\pi n^2}{n+1}$.

2674. Dokažte, že řada se střídavými členy $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots$ $(b_n > 0)$ konverguje, je-li

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

kde $p > 0$ (viz úloha **2606**).

Vyšetřete absolutní konvergenci (kromě úlohy **2690**) a konvergenci následujících řad:

2675. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

2676. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$.

2677. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

2678. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$.

2679. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2680. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

2681. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\left[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right]^p}$.

2682. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

2683. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2684. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2}\frac{n^{100}}{2^n}$.

2685. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

2686. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

2687. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

2688. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

2689. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right]^p$.

2690. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\cdot \sin n^2}{n}$.

2691. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

NÁVOD: Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. Nechť

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q}$$

je racionální lomená funkce, kde

$$a_0\neq 0,\ b_0\neq 0 \text{ a } |b_0x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q|>0 \text{ pro } x\geq n_0.$$

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n).$$

Vyšetřete konvergenci následujících řad:

2693. $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\ldots$

2694. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots$

2695. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\dots$

2696. $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\dots$

2697. Dokažte, že řady

a) $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\dots$; b) $\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\dots$

jsou neabsolutně konvergentní na intervalu $(0, \pi)$.

2698. Určete pro řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\quad (0<x<\pi),$$

které jsou parametricky závislé na dvojici parametrů (p, x): a) oblast absolutní konvergence; b) oblast konvergence.

2698.1 Vyšetřete konvergenci následujících řad:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n}$; b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$; c) $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$.

2699. Určete pro řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\dots(n+p)}{n!\,n^q}$$

a) oblast absolutní konvergence; b) oblast konvergence.

2700. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$, kde $\binom{m}{n}=\frac{m(m-\dots1)(m-n+1)}{n!}$.

2701. Můžeme říci, že jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergentní a platí $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ také konvergentní?

Uvažujte případy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$.

2702. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je (neabsolutně) konvergentní řada. Definujeme

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2}\quad\text{a}\quad N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2}.$$

Dokažte, že:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$$

2703. Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ leží pro každou hodnotu parametru $p>0$ mezi $\frac{1}{2}$ a 1.

2703.1 Kolik členů řady a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^\circ}{\sqrt{n}}$ musíme vzít, abychom aproximovali její součet s přesností na $\varepsilon=10^{-6}$?

2704. Dokažte, že jsou-li členy řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$$

přerovnány tak, že se skupiny p po sobě následujících kladných členů budou střídat se skupinami q po sobě následujících záporných členů, pak součet nové řady bude $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

2705. Dokažte, že harmonická řada

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

zůstane divergentní, jestliže bez přerovnání členů změníme jejich znaménka tak, aby za p kladnými členy následovalo q záporných členů ($p\neq q$). Řada bude konvergentní pouze pro $p=q$.

§ 3. Operace s řadami

SOUČET A SOUČIN ŘAD. Tyto operace definujeme následujícím způsobem:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$,

kde

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\dots+a_nb_1.$$

Rovnost a) má smysl tehdy, jsou-li obě řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergentní, a rovnost b) má smysl, jestliže je navíc alespoň jedna z těchto řad absolutně konvergentní.

2706. Co můžeme říci o součtu dvou řad, a) je-li jedna z nich konvergentní a druhá divergentní; b) jsou-li obě řady divergentní?

2707. Najděte součet:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

Najděte součty následujících řad:

2708. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

2709. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

2710. $\sum_{n=0}^{\infty}x^{[n/2]}y^{[(n+1)/2]}\ (|xy|<1)$.

2711. Dokažte, že $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$.

2712. Dokažte, že $\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\ (|q|<1)$.

2713. Dokažte, že druhá mocnina konvergentní řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

je divergentní řadou.

2714. Dokažte, že součin dvou konvergentních řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\ (\alpha>0)\ \text{a}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}\ (\beta>0)$$

je konvergentní řadou pro $\alpha+\beta>1$ a divergentní řadou pro $\alpha+\beta<1$.

2715. Ověřte, že součin dvou divergentních řad

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\ \text{a}\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

je řada absolutně konvergentní.

§ 4. Řady funkcí

1. **OBOR KONVERGENCE.** Množinu X těch hodnot x, pro které je *řada funkcí*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

konvergentní, nazveme *oborem konvergence* této řady a funkci

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\ \ (x\in X)$$

jejím *součtem*.

2. **STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE.** Posloupnost funkcí

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

se nazývá *stejnoměrně konvergentní* na množině X, jestliže:

1) existuje limitní funkce

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\ \ (x\in X);$$

2) ke každému $\varepsilon>0$ existuje číslo $N=N(\varepsilon)$ takové, že

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

pro každé $n>N$ a $x\in X$. V tomto případě budeme zapisovat $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

Řada funkcí (1) se nazývá *stejnoměrně konvergentní* na množině X, jestliže je na této množině stejnoměrně konvergentní posloupnost jejích částečných součtů

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\ \ (n=1,2,\ldots).$$

3. **BOLZANOVO-CAUCHYOVO KRITÉRIUM STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE.** Řada (1) je na množině X stejnoměrně konvergentní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon>0$ existuje číslo $N=N(\varepsilon)$ takové, že pro všechna $n>N$ a $p>0$ platí nerovnost

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon$$

pro všechna $x\in X$.

4. **WEIERSTRASSOVO KRITÉRIUM.** Řada (1) je absolutně a stejnoměrně konvergentní na množině X, existuje-li konvergentní číselná řada

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots \tag{2}$$

taková, že $|u_n(x)|\le c_n$ pro každé $x\in X$ $(n=1,2,\ldots)$.

5. **ABELOVO KRITÉRIUM.** Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x) \tag{3}$$

je stejnoměrně konvergentní na množině X, jestliže platí: 1) řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na množině X; 2) funkce $b_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ jsou všechny stejně omezené a pro každé x jejich hodnoty tvoří monotónní posloupnost.

6. DIRICHLETOVO KRITÉRIUM. Řada (3) je stejnoměrně konvergentní na množině X, jestliže platí: 1) částečné součty $\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ jsou všechny stejně omezené; 2) posloupnost $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ je monotónní pro každé x a stejnoměrně konverguje na X k nule pro $n \to \infty$.

7. VLASTNOSTI ŘAD FUNKCÍ.

a) Součet stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce.

b) Je-li řada (1) stejnoměrně konvergentní na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ a existují-li konečné limity

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = A_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

pak 1) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konvergentní a 2) platí rovnost

$$\lim_{x \to a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to a} u_n(x) \right\}.$$

c) Jsou-li členy konvergentní řady (1) spojitě diferencovatelné pro $a < x < b$ a je-li řada derivací $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ stejnoměrně konvergentní na intervalu (a, b), pak

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \text{ pro } x \in (a, b).$$

d) Jsou-li členy řady (1) spojité a tato řada stejnoměrně konverguje na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx. \tag{4}$$

Obecněji rovnost (4) platí, je-li $\int_a^b R_n(x)\, dx \to 0$ pro $n \to \infty$, kde $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. Tato podmínka je vhodná k vyšetřování limitních přechodů v integrálním počtu.

Určete obory absolutní konvergence a obory konvergence následujících řad funkcí:

2716. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

2717. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$.

2718. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$.

2719. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n$.

2720. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2n} x^n (1-x)^n$.

2721. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ $(q>0;\ 0<x<\pi)$.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (Lambertova řada).

2725. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$.

2726. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2727. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

2728. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$.

2729. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

2730. $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)\left(2-x^{1/2}\right)\left(2-x^{1/3}\right)\ldots\left(2-x^{1/n}\right)$ $(x>0)$.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

2732. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$ $(x>0;y>0)$.

2733. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$ $(y\geq 0)$.

2734. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x\geq 0)$.

2736. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

2737. Dokažte, že je-li *Laurentova řada* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ konvergentní pro $x=x_1$ a pro $x=x_2$ $(|x_1|<|x_2|)$, pak je tato řada konvergentní také pro $|x_1|<|x|<|x_2|$.

2738. Určete obor konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

a najděte její součet.

2739. Určete obory konvergence a absolutní konvergence *Newtonových řad*:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$, kde $x^{[n]}=x(x-1)\ldots[x-(n-1)]$.

2740. Dokažte, že je-li *Dirichletova řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ konvergentní pro $x = x_0$, pak je tato řada konvergentní také pro $x > x_0$.

2741. Dokažte, že k tomu, aby na množině X daná posloupnost $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ stejnoměrně konvergovala ke své limitní funkci $f(x)$, je nutné a stačí, aby platila rovnost $\lim_{n\to\infty} \left\{\sup_{x\in X} r_n(x)\right\} = 0$, kde $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742. Co znamená, že je posloupnost $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$: a) konvergentní na intervalu $(x_0, +\infty)$; b) stejnoměrně konvergentní na každém omezeném intervalu $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$; c) stejnoměrně konvergentní na intervalu $(x_0, +\infty)$?

2743. Určete pro posloupnost

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (0 < x < 1)$$

nejmenší index $N = N(\varepsilon, x)$, pro který začíná být odchylka členů této posloupnosti od limitní funkce menší než $\varepsilon = 0{,}001$, je-li $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \ldots$

Je tato posloupnost stejnoměrně konvergentní na intervalu $(0, 1)$?

2744. Kolik členů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ musíme vzít, aby se její částečný součet $S_n(x)$ lišil pro $-\infty < x < +\infty$ od součtu této řady o méně než ε? Proveďte kontrolu výpočtem pro následující případy: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

2745. Pro jaká čísla n bude zajištěno splnění nerovnosti

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < 0{,}001 \quad (0 \le x \le 10)?$$

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností na zadaných intervalech:

2746. $f_n(x) = x^n$; a) $0 \le x \le \frac{1}{2}$; b) $0 \le x \le 1$.

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \le x \le 1$.

2748. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$; $0 \le x \le 1$.

2749. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

2750. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$; $0 \le x \le 1$.

2751. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$; a) $0 \le x \le 1-\varepsilon$; b) $1-\varepsilon \le x \le 1+\varepsilon$; c) $1+\varepsilon \le x < +\infty$, kde $\varepsilon > 0$.

2752. $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$; a) $0\le x\le 1$; b) $1<x<+\infty$.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$; $0<x<+\infty$.

2755. a) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$; $-\infty<x<+\infty$; b) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$; $-\infty<x<+\infty$.

2756. a) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$; b) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$; $0<x<1$.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$; a) $-l<x<l$, kde l je libovolné kladné číslo; b) $-\infty<x<+\infty$.

2759. $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$; $0<x<1$.

2760. $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$; a) na omezeném intervalu (a,b); b) na intervalu $(-\infty,+\infty)$.

2761. $f_n(x)=n\left(x^{1/n}-1\right)$; $1\le x\le a$.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$; $0\le x\le 2$.

2763. $f_n(x)=\begin{cases} n^2x & \text{pro } 0\le x\le\dfrac{1}{n},\\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right) & \text{pro } \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{2}{n},\\ 0 & \text{pro } x\ge\dfrac{2}{n}\end{cases}$

na intervalu $0\le x\le 1$.

2764. Nechť $f(x)$ je libovolná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a nechť

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\quad (n=1,2,\ldots).$$

Dokažte, že $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ na $[a,b]$.

2765. Nechť má funkce $f(x)$ spojitou derivaci $f'(x)$ na otevřeném intervalu (a,b) a nechť

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

Dokažte, že $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$ na intervalu $\alpha\le x\le\beta$, kde $a<\alpha<\beta<b$.

2766. Nechť $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$, kde $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Dokažte, že posloupnost $f_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na libovolném uzavřeném intervalu $[a, b]$.

Vyšetřete charakter konvergence následujících řad:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$: a) na intervalu $|x| < q$, kde $q < 1$; b) na intervalu $|x| < 1$.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ na intervalu $-1 \le x \le 1$.

2768.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ na intervalu $0 \le x \le 1$.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$; $-1 \le x \le 1$.

2771. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)}$; a) $0 \le x \le \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$; b) $\varepsilon \le x < +\infty$.

2774. Dokažte pomocí Weierstrassova kritéria stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí na zadaných intervalech:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$; $-\infty < x < +\infty$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$; $-2 < x < +\infty$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$; $0 \le x < +\infty$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$; $|x| < +\infty$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$; $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$; $|x| < a$, kde a je libovolné kladné číslo;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$; $|x| < +\infty$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$; $|x| < +\infty$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$; $|x| < +\infty$;

j) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$; $|x| < a$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$; $0 \le x < +\infty$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$; $|x| < +\infty$.

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí na zadaných intervalech:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$: a) na intervalu $\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$; b) na intervalu $0 \le x \le 2\pi$.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$; $0 < x < +\infty$.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

NÁVOD: Odhadněte zbytek řady.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$; $0 \le x \le 2\pi$.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}}$; $|x| \le 10$.

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \le x < +\infty$.

2782. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \le x < +\infty$.

2783. Může posloupnost nespojitých funkcí stejnoměrně konvergovat k spojité funkci? Uvažujte případ funkcí

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\psi(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

kde $\psi(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x \text{ iracionální,} \\ 1 \text{ pro } x \text{ racionální.} \end{cases}$

2784. Dokažte, že jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ stejnoměrně konvergentní na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ také stejnoměrně konvergentní na $[a, b]$.

2785. Platí nutně, že jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolutně a stejnoměrně na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konverguje stejnoměrně na $[a, b]$? Uvažujte případ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$, kde $0 \le x \le 1$.

2786. Dokažte, že řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $(0 \le x \le 1)$, která je absolutně a stejnoměrně konvergentní, přičemž

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \le x \le 2^{-(n+1)}, \\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x) \text{ pro } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0 \text{ pro } 2^{-n} \le x \le 1, \end{cases}$$

nelze majorizovat konvergentní číselnou řadou s nezápornými členy.

2787. Dokažte, že jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, jejíž členy jsou monotónní funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$, absolutně konvergentní v koncových bodech tohoto intervalu, pak je tato řada absolutně a stejnoměrně konvergentní na celém intervalu $[a, b]$.

2788. Dokažte, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutně a stejnoměrně konverguje na libovolném uzavřeném intervalu, který leží uvnitř jejího oboru konvergence.

2789. Nechť je posloupnost $a_n \to \infty$ zvolena tak, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|$ konverguje. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ absolutně a stejnoměrně konverguje na libovolné omezené a uzavřené množině, která neobsahuje body a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

2790. Dokažte, že jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak *Dirichletova řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ stejnoměrně konverguje pro $x \geq 0$.

2791. Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ stejnoměrně konverguje na množině $x \geq 0$.

2792. Ukažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ je spojitá a má spojitou derivaci ve všech bodech $-\infty < x < +\infty$.

2793. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

a) je definovaná a spojitá ve všech bodech s výjimkou celých čísel $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
b) je periodická s periodou 1.

2794. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x} \right]$ konverguje, ale nikoli stejnoměrně, na uzavřeném intervalu $0 \leq x \leq 1$. Ověřte, že přesto je její součet spojitou funkcí na tomto intervalu.

2795. Určete definiční obory funkcí $f(x)$ a vyšetřete, zda jsou spojité, je-li:

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n} \right)^n$; b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$; c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

2796. Nechť r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jsou racionální čísla z uzavřeného intervalu $[0, 1]$. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

má následující vlastnosti: 1) je spojitá; 2) je diferencovatelná v iracionálních bodech a není diferencovatelná v racionálních bodech tohoto intervalu.

2797. Dokažte, že *Riemannova zeta-funkce*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

je spojitá pro $x > 1$ a má na této množině spojité derivace všech řádů.

2798. Dokažte, že *theta-funkce*

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

je pro $x > 0$ definovaná a má derivace všech řádů.

2799. Určete definiční obor funkce $f(x)$ a vyšetřete, zda je diferencovatelná, je-li:

a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$; b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$.

2800. Ukažte, že posloupnost

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n \quad (n=1,2,\ldots)$$

stejnoměrně konverguje na intervalu $(-\infty,+\infty)$, ale

$$\left[\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(1).$$

2801. Ukažte, že posloupnost

$$f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

stejnoměrně konverguje na intervalu $(-\infty,+\infty)$, ale

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\neq\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x).$$

2802. Pro jaké hodnoty parametru α posloupnost

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx} \quad (n=1,2,\ldots)$$

a) konverguje na uzavřeném intervalu $[0,1]$; b) stejnoměrně konverguje na uzavřeném intervalu $[0,1]$; c) je možný limitní přechod v integrálu

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx?$$

2803. Ukažte, že posloupnost $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ $(n=1,2,\ldots)$ konverguje na uzavřeném intervalu $[0,1]$, ale

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

2804. Ukažte, že posloupnost $f_n(x)=nx(1-x)^n$ $(n=1,2,\ldots)$ konverguje, ale nikoli stejnoměrně, na uzavřeném intervalu $[0,1]$, přičemž

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

2805. Můžeme provést limitní přechod pro $n\to\infty$ za integrálem ve výrazu

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx?$$

Vypočtěte následující limity:

2806. $\lim\limits_{x\nearrow 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x\nearrow 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{n+1}\right)$.

2808. $\lim\limits_{x\searrow 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$.

2808.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. Můžeme derivovat řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n^2}$ člen po členu?

2810. Můžeme na uzavřeném intervalu $[0, 1]$ člen po členu integrovat řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)?$$

2811. Nechť $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ má spojité derivace všech řádů a posloupnost derivací $f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ stejnoměrně konverguje na každém omezeném intervalu (a,b) k funkci $\varphi(x)$. Dokažte, že $\varphi(x)=Ce^x$, kde C je konstanta. Uvažujte případ $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, $n=1,2,\ldots$

2811.1 Nechť jsou funkce $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ definovány a omezeny na intervalu $(-\infty,+\infty)$ a nechť dále $f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$ na každém uzavřeném intervalu $[a,b]$. Vyplývá odtud, že

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x f(x)=\sup_x\varphi(x)?$$

§ 5. Mocninné řady

1. **INTERVAL KONVERGENCE.** Pro každou mocninnou řadu

$$a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

existuje uzavřený *interval konvergence* $|x-a|\le R$, v jehož vnitřku daná řada konverguje a vně kterého diverguje. Pro *poloměr konvergence* R platí *Cauchyův-Hadamardův vzorec*

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Poloměr konvergence R je také možné spočítat podle vzorce

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

pokud tato limita existuje.

2. **ABELOVA VĚTA.** Konverguje-li mocninná řada $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(|x|<R)$ v krajním bodě $x=R$ intervalu konvergence, pak $S(R)=\lim\limits_{x\nearrow R}S(x)$.

3. TAYLOROVA ŘADA. Funkci $f(x)$, která je analytická v bodě a, lze vyjádřit v nějakém jeho okolí ve tvaru mocninné řady

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Zbytkový člen této řady

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

můžeme zapsat v *Lagrangeově tvaru*:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

nebo v *Cauchyově tvaru*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta_1<1).$$

Nyní uveďme pět základních rozvojů funkcí do mocninných řad:

I. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots(-\infty<x<+\infty).$

II. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty).$

III. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty).$

IV. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\ (-1<x<1).$

V. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\ (-1<x\le 1).$

4. OPERACE S MOCNINNÝMI ŘADAMI. Uvnitř společného intervalu konvergence $|x-a|<R$ platí:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-a)^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$,

kde $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0$; c) $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$;

d) $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$

5. MOCNINNÉ ŘADY V KOMPLEXNÍM OBORU. Uvažujme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

kde $c_n=a_n+ib_n$, $a=\alpha+i\beta$, $z=x+iy$, $i^2=-1$.

Pro každou takovou řadu existuje uzavřený *kruh konvergence* $|z-a|\le R$, v jehož vnitřku daná řada konverguje (a zároveň absolutně konverguje) a vně kterého diverguje. *Poloměr konvergence* R je roven poloměru konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

v reálném oboru.

Určete poloměry a intervaly konvergence následujících mocninných řad a vyšetřete jejich chování v hraničních bodech intervalů konvergence:

2812. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$.

2813. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$.

2814. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (0 < \alpha < 1)$.

2816. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

2817. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad (a > 1)$.

2818. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\right]^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

2819. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

2820. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$.

2821. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a > 0, b > 0)$.

2822. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0)$.

2823. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0)$.

2824. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2825. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

2826. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

2827. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

2828. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}x^n$.

2829. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$.

2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2831. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$

(*Pringsheimova řada*).

2831.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n$, kde $\nu(n)$ je počet cifer čísla n.

2831.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

2832. Určete obor konvergence *hypergeometrické řady*

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\ldots$$

Najděte obory konvergence následujících zobecněných mocninných řad:

2833. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

2836. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

2837. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$.

2838. Rozviňte funkci $f(x)=x^3$ do mocninné řady s nezápornými mocninami dvojčlenu $x+1$.

2839. Rozviňte funkci $f(x)=\frac{1}{a-x}$ $(a\neq 0)$ do mocninných řad: a) v mocninách x; b) v mocninách dvojčlenu $x-b$, kde $b\neq a$; c) v mocninách $\frac{1}{x}$. Najděte odpovídající obory konvergence.

2840. Rozviňte funkci $f(x)=\ln x$ do mocninné řady s nezápornými mocninami rozdílu $x-1$ a najděte obor konvergence rozvoje.

Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Rozviňte následující funkce do mocninných řad s nezápornými mocninami proměnné x a najděte odpovídající intervaly konvergence:

2841. $f(x)=\sinh x$.

2842. $f(x)=\cosh x$.

2843. $f(x)=\sin^2 x$.

2844. $f(x)=a^x$ $(a>0)$.

2845. $f(x)=\sin(\mu\cdot\arcsin x)$.

2846. $f(x)=\cos(\mu\cdot\arcsin x)$.

2847. Napište první tři členy rozvoje funkce $f(x)=x^x$ v mocninnou řadu s celými nezápornými mocninami dvojčlenu $x-1$.

2848. Najděte první tři členy rozvoje funkce $f(x)=(1+x)^{1/x}$ $(x\neq 0)$ a $f(0)=e$ v mocninnou řadu s celými nezápornými mocninami proměnné x.

2849. Rozviňte funkce $\sin(x+h)$ a $\cos(x+h)$ do mocninných řad s celými nezápornými mocninami proměnné h.

2850. Najděte interval konvergence rozvoje funkce

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$$

do mocninné řady: a) v proměnné x; b) s mocninami dvojčlenu $x-5$, bez konstrukce tohoto rozvoje.

2850.1 Je pravda, že $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\rightrightarrows\sin x$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$ pro $N\to\infty$?

Rozviňte následující funkce do mocninných řad v proměnné x pomocí základních rozvojů funkcí I. - V.

2851. e^{-x^2}.

2852. $\cos^2 x$.

2853. $\sin^3 x$.

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

NÁVOD: Rozložte zadaný zlomek na parciální zlomky.

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$.

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2862.1 $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$. Čemu se rovná $f^{(1000)}(0)$?

2863. $\dfrac{x\cos\alpha - x^2}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$. **2864.** $\dfrac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos a + x^2}$. **2865.** $\dfrac{x\sinh a}{1 - 2x\cosh a + x^2}$.

2866. $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **2867.** $\ln\left(1 + x + x^2 + x^3\right)$. **2868.** $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

NÁVOD: Použijte Eulerův vzorec.

Rozviňte následující funkce do mocninných řad pomocí rozvojů, jejich derivací a integrování těchto rozvojů člen po členu:

2869. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2870. $f(x) = \arcsin x$.

2871. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

2872. $f(x) = \ln\left(1 - 2x\cos\alpha + x^2\right)$.

2873. Různými metodami rozviňte následující funkce do mocninných řad:

a) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$; b) $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

c) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$; d) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}$;

e) $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$; f) $f(x) = \arccos\left(1 - 2x^2\right)$;

g) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; h) $f(x) = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$.

2874. Užijte jednoznačnost rozvoje $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \dfrac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots$ k výpočtu derivací n-tého řádu následujících funkcí:

a) $f(x) = e^{x^2}$; b) $f(x) = e^{a/x}$; c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2875. Rozviňte funkci $f(x) = \ln\dfrac{1}{2 + 2x + x^2}$ v mocninnou řadu s přirozenými mocninami dvojčlenu $x + 1$.

2876. Rozviňte funkci $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ v mocninnou řadu se zápornými mocninami proměnné x.

2877. Rozviňte funkci $f(x) = \ln x$ v mocninnou řadu s přirozenými mocninami zlomku $\dfrac{x-1}{x+1}$.

2878. Rozviňte funkci $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ v mocninnou řadu s přirozenými mocninami zlomku $\dfrac{x}{1+x}$.

2879. Nechť $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Dokažte, že z této definice bezprostředně vyplývá rovnost $f(x)f(y)=f(x+y)$.

2880. Definujme

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\text{ a }\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dokažte, že platí:

a) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$; b) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

2881. Vypočtěte několik členů rozvoje funkce $f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$ v mocninnou řadu.

Rozviňte následující funkce pomocí mocninných řad:

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

2883. $f(x)=(1-x)^2\cosh\sqrt{x}$.

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

2885. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$.

2886. $f(x)=e^x\cos x$.

2887. $f(x)=e^x\sin x$.

2888. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

2889. $f(x)=(\operatorname{arctg}x)^2$.

2890. $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Vypočtěte první tři nenulové členy rozvoje následujících funkcí v mocninnou řadu s kladnými mocninami proměnné x:

2891. $f(x)=\operatorname{tg}x$.

2892. $f(x)=\operatorname{tgh}x$.

2893. $f(x)=\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}$.

2894. Nechť je rozvoj funkce $\sec x$ zapsán ve tvaru

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Najděte rekurentní vztah, který platí pro koeficienty E_n (*Eulerovy koeficienty*).

2895. Najděte rozvoj funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ ($|x|<1$) v mocninnou řadu.

2896. Nechť $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Najděte rozvoj funkce $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$.

2897. Nechť má řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence R_1 a řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ poloměr konvergence R_2. Jaký poloměr konvergence mají řady a) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

2898. Nechť $l = \varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ a $L = \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Dokažte, že poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ splňuje nerovnosti $l \le R \le L$.

2899. Dokažte, že je-li $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, přičemž $|n! a_n| < M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, kde M je konstanta, pak platí následující tvrzení: 1) $f(x)$ má derivace všech řádů v libovolném bodě a; 2) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $(|x| < +\infty)$.

2899.1 Nechť $f(x) \in C^{(\infty)}(a,b)$ a $|f^{(n)}(x)| \le c^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ pro $x \in (a,b)$. Dokažte, že funkce $f(x)$ má mocninný rozvoj $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ $(x_0 \in (a,b))$, který konverguje na intervalu (a,b).

2899.2 Nechť $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$ a $f^{(n)}(x) \ge 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ pro $x \in [-1, 1]$. Dokažte, že na intervalu $(-1, 1)$ lze funkci $f(x)$ rozvinout v mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

NÁVOD: Využitím monotonie derivací $f^{(n)}(x)$ odvoďte pro zbytkový člen $R_n(x)$ Taylorovy řady funkce $f(x)$ odhad $|R_n(x)| \le |x|^{n+1} f(1)$.

2900. Dokažte, že jestliže $a_n \ge 0$ a jestliže existuje $\lim_{x \nearrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$.

Najděte mocninný rozvoj následujících funkcí:

2901. $\int_0^x e^{-t^2} dt$.

2902. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$.

2905. $\int_0^x \frac{t\,dt}{\ln(1+t)}$ (určete první čtyři členy).

Derivováním člen po členu vypočtěte součty následujících řad:

2906. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$ **2907.** $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

2908. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ **2909.** $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$

2910. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$

NÁVOD: Vynásobte derivaci řady funkcí $1-x$.

Integrováním člen po členu vypočtěte součty následujících řad:

2911. $x+2x^2+3x^3+\ldots$ **2912.** $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$

2913. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$

2914. Dokažte, že řada $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ je řešením rovnice $y^{(4)}=y$.

2915. Dokažte, že řada $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ je řešením rovnice $xy''+y'-y=0$.

Vypočtěte poloměr a určete obor konvergence následujících mocninných řad v komplexním oboru ($z=x+iy$):

2916. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\,2^n}$. **2917.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

2918. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{(1+i)(1+2i)\ldots(1+ni)}$. **2919.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

2920. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

2921. Pomocí vzorce binomické věty vypočtěte přibližně hodnotu čísla $\sqrt[3]{9}$ a odhadněte chybu, které se dopustíme, jestliže použijeme první tři členy rozvoje odpovídající funkce.

2922. Vypočtěte přibližně následující hodnoty:

a) $\operatorname{arctg} 1{,}2$; b) $\sqrt[10]{1000}$; c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; d) $\ln 1{,}25$

a odhadněte chyby jejich určení.

Pomocí vhodných rozvojů vypočtěte s danou přesností následující hodnoty:

2923. $\sin 18°$ s přesností na 10^{-5}.

2924. $\cos 1°$ s přesností na 10^{-6}.

2925. $\operatorname{tg} 9°$ s přesností na 10^{-3}.

2926. e s přesností na 10^{-6}.

2927. $\ln 1{,}2$ s přesností na 10^{-4}.

2928. Pomocí rovnosti $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$ vypočtěte číslo π s přesností na 10^{-4}.

2929. Pomocí identity $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ vypočtěte číslo π s přesností na 0,001.

2930. Pomocí identity $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ vypočtěte číslo π s přesností na 10^{-9}.

2931. Pomocí vztahu $\ln(n+1) = \ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots\right]$ vypočtěte $\ln 2$ a $\ln 3$ s přesností na 10^{-5}.

2932. Pomocí rozvoje funkcí v argumentu integrálu vypočtěte s přesností na 0,001 hodnoty následujících integrálů:

a) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$; b) $\int_2^4 e^{1/x}dx$; c) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$; d) $\int_0^1 \cos x^2 dx$; e) $\int_0^1 \frac{\sinh x}{x}dx$;

f) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; g) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; h) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; i) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$; j) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$;

k) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x}dx$; l) $\int_0^1 x^x dx$.

2933. Vypočtěte s přesností na 0,01 délku křivky jedné polovlny sinusoidy $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$.

2934. Vypočtěte s přesností na 0,01 délku elipsy s poloosami $a = 1$ a $b = 1/2$.

2935. Elektrické vedení zavěšené na dvou sloupech, jejichž vzdálenost je $2l = 20\,\text{m}$, má tvar paraboly. Vypočtěte s přesností na 1 cm délku vedení, je-li hloubka jeho prohybu $h = 40\,\text{cm}$.

§ 6. Fourierovy řady

1. **FOURIEROVA VĚTA O ROZVOJI.** Jestliže je funkce $f(x)$ po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci $f'(x)$ na intervalu $(-l,l)$, přičemž jsou všechny její body nespojitosti ξ regulární (tj. platí $f(\xi)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\xi^+} f(x)+\lim_{x\to\xi^-} f(x)\right]$), pak lze funkci $f(x)$ na tomto intervalu rozvinout ve Fourierovu řadu

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

kde

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{2}$$

a

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,\ldots). \tag{2'}$$

Speciálně platí následující vztahy:
a) je-li funkce $f(x)$ sudá, pak

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

kde

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\ldots);$$

b) je-li funkce $f(x)$ lichá, pak

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

kde

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $(0,l)$, která splňuje výše uvedené předpoklady spojitosti, lze rozvinout na tomto intervalu jak do tvaru (3), tak do tvaru (4).

2. **PODMÍNKA ÚPLNOSTI.** Pro každou funkci $f(x)$, která je spolu se svou druhou mocninou integrovatelná na intervalu $[-l,l]$, splňuje řada (1) s koeficienty (2), (2') *Parsevalovu rovnost*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx.$$

3. **INTEGROVÁNÍ FOURIEROVÝCH ŘAD.** Konvergentní nebo divergentní Fourierovu řadu (1) funkce $f(x)$, která je na intervalu $(-l,l)$ riemannovsky integrovatelná, lze na tomto intervalu integrovat člen po členu.

2936. Rozviňte funkci $f(x)=\sin^4 x$ do Fourierovy řady.

2937. Jaký tvar má Fourierova řada trigonometrického polynomu

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\ ?$$

2938. Rozviňte do Fourierovy řady funkci $f(x)=\operatorname{sgn}x$ $(-\pi<x<\pi)$. Sestrojte graf funkce a grafy několika prvních částečných součtů Fourierovy řady této funkce. Pomocí tohoto rozvoje vypočtěte součet *Leibnizovy řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Najděte Fourierovy řady následujících funkcí na daných intervalech:

2939. $f(x)=\begin{cases}A \text{ pro } 0<x<l,\\ 0 \text{ pro } l<x<2l,\end{cases}$ kde A je konstanta, na intervalu $(0,2l)$.

2940. $f(x)=x$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2941. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ na intervalu $(0,2\pi)$.

2942. $f(x)=|x|$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2943. $f(x)=\begin{cases}ax \text{ pro } -\pi<x<0,\\ bx \text{ pro } 0\le x<\pi,\end{cases}$ kde a a b jsou konstanty, na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2944. $f(x)=\pi^2-x^2$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2945. $f(x)=\cos ax$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ (a není celé číslo).

2946. $f(x)=\sin ax$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ (a není celé číslo).

2947. $f(x)=\sinh ax$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2948. $f(x)=e^{ax}$ na intervalu $(-h,h)$.

2949. $f(x)=x$ na intervalu $(a,a+2l)$.

2950. $f(x)=x\sin x$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2951. $f(x)=x\cos x$ na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Rozviňte do Fourierových řad následující periodické funkce:

2952. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

2953. $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

2955. $f(x)=x-[x]$.

2956. $f(x)=(x)$ – vzdálenost čísla x od nejbližšího celého čísla.

2957. $f(x)=|\sin x|$.

2958. $f(x)=|\cos x|$.

2959. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ $(|\alpha|<1)$.

2960. Rozviňte do Fourierovy řady funkci

$$f(x)=\sec x\left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right).$$

NÁVOD: Najděte vztah mezi koeficienty a_n a a_{n-2}.

2961. Rozviňte funkci $f(x)=x^2$ do Fourierovy řady a) na intervalu $(-\pi,\pi)$ pouze s kosinovými členy; b) na intervalu $(0,\pi)$ pouze se sinovými členy a c) na intervalu $(0,2\pi)$. Sestrojte grafy funkcí a grafy odpovídajících součtových řad pro případy a), b) a c).

Pomocí těchto rozvojů vypočtěte součty řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\ \text{a}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. Pomocí rozvoje

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$

a integrováním této řady člen po členu rozviňte na intervalu $(-\pi,\pi)$ do Fourierových řad funkce x^2, x^3 a x^4.

2963. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ pro } |x|<\alpha,\\ 0 \text{ pro } \alpha<|x|<\pi.\end{cases}$$

Pomocí Parsevalovy rovnosti vypočtěte součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\ \text{a}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. Rozviňte ve Fourierovu řadu funkci

$$f(x)=\begin{cases}x \text{ pro } 0\le x\le 1,\\ 1 \text{ pro } 1<x<2,\\ 3-x \text{ pro } 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Pomocí vztahů $\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t})$ a $\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$, kde $t=e^{ix}$ a $\bar{t}=e^{-ix}$, rozviňte do Fourierových řad následující funkce:

2965. $\cos^{2m}x$ (m je přirozené číslo).

2966. $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2967. $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2968. $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$

Rozviňte do Fourierových řad následující neomezené periodické funkce:

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$. **2971.** $f(x)=\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$. **2972.** $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

2973. Rozviňte do Fourierovy řady funkci $f(x)=\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{cotg}\dfrac{t}{2}\right|}\,dt$ $(-\pi\le x\le\pi)$.

2974. Rozviňte do Fourierovy řady funkce $x=x(s), y=y(s)$ $(0\le s\le 4a)$, které parametricky popisují obvod čtverce $0<x<a$, $0<y<a$, kde s je délka této křivky od počátečního bodu $(0,0)$ s orientací proti směru hodinových ručiček.

2975. Jak musíme prodloužit integrovatelnou funkci $f(x)$ definovanou na $(0,\pi/2)$ na interval $(-\pi,\pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2n-1)x$ $(-\pi<x<\pi)$?

2976. Jak musíme prodloužit integrovatelnou funkci $f(x)$ definovanou na $(0,\pi/2)$ na interval $(-\pi,\pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(2n-1)x$ $(-\pi<x<\pi)$?

2977. Funkci $f(x)=x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ rozviňte na intervalu $(0,\pi/2)$: a) do řady pouze s kosinovými lichými členy; b) do řady pouze se sinovými lichými členy. Sestrojte grafy součtových funkcí Fourierovy řady pro případy a) a b).

2978. Funkce $f(x)$ je *antiperiodická* s periodou π, pokud platí $f(x+\pi)\equiv -f(x)$. Jakou vlastnost má Fourierova řada takové funkce na intervalu $(-\pi,\pi)$?

2979. Jakou vlastnost má Fourierova řada funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi,\pi)$, je-li $f(x+\pi)\equiv f(x)$?

2980. Jaké vlastnosti mají koeficienty Fourierovy řady a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$ funkce $y=f(x)$ s periodou 2π, jestliže graf této funkce: a) má středy souměrnosti v bodech $(0,0)$ a $(\pm\pi/2,0)$; b) má střed souměrnosti v počátku souřadnic a osy souměrnosti $x=\pm\pi/2$?

2981. V jakém vzájemném vztahu jsou koeficienty Fourierových řad a_n, b_n a α_n, β_n $(n=0,1,2,\ldots)$ funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, je-li $\varphi(-x)\equiv\psi(x)$?

2982. V jakém vzájemném vztahu jsou koeficienty Fourierových řad a_n, b_n, a α_n, β_n $(a = 0, 1, 2, ...)$ funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, je-li $\varphi(-x) \equiv -\psi(x)$?

2983. Pomocí Fourierových koeficientů a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ integrovatelné funkce $f(x)$ s periodou 2π vyjádřete Fourierovy koeficienty $\overline{a_n}$, $\overline{b_n}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ „posunuté" funkce $f(x+h)$, kde h je konstanta.

2984. Pomocí Fourierových koeficientů a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ integrovatelné funkce $f(x)$ s periodou 2π vyjádřete Fourierovy koeficienty A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, ...)$

Stěklovovy funkce

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, d\xi.$$

2985. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce s periodou 2π a a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ jsou její Fourierovy koeficienty. Vypočtěte Fourierovy koeficienty A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ konvoluční funkce

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t)\, dt.$$

Výsledek užijte k odvození odpovídající Parsevalovy rovnosti.

§ 7. Výpočet součtu řady

1. **PŘÍMÝ VÝPOČET SOUČTU.** Jestliže platí $u_n = v_{n+1} - v_n$ $(n = 1, 2, ...)$ a $\lim_{n\to\infty} v_n = v_\infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1$.

Speciálně, je-li

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m}},$$

kde čísla a_i $(i = 1, 2, ...)$ tvoří aritmetickou posloupnost s přírůstkem d, pak

$$v_n = -\frac{1}{md} \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m-1}}.$$

V některých případech lze řadu vyjádřit ve tvaru lineární kombinace řad se známým součtem, jako jsou:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ atd.}$$

2. **ABELOVA METODA.** Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Součet mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lze v jednoduchých případech vypočítat derivováním nebo integrováním řady člen po členu.

3. SOUČET TRIGONOMETRICKÝCH ŘAD. Pro výpočet součtu řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \text{ nebo } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

lze obvykle uvažovat reálnou nebo komplexní část mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ v komplexním oboru, kde $z = e^{ix}$.

V těchto případech bývá užitečný součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

Sečtěte následující řady:

2986. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots$

2987. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots$

2988. $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \dots$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2990. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ (m je přirozené číslo).

2991. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \dots$

2992. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

2993. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

2994. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

2995. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

2996. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

2997. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2998. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

2999. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

3000. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

3001. Nechť $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$. Vypočtěte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$.

Vypočtěte součty následujících řad:

3002. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$.

3003. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$.

3004. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$.

3005. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$.

Pomocí derivování člen po členu sečtěte následující řady:

3006. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

3007. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$.

3008. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

3009. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\ldots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \ldots nd} x^n \quad (d>0)$.

NÁVOD: Derivaci řady vynásobte funkcí $1-x$.

3010. $\frac{1}{3}\frac{x}{2} + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots$

Pomocí integrování člen po členu sečtěte následující řady:

3011. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

3012. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n$.

3013. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Abelovou metodou vypočtěte součty následujících řad:

3014. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots$

3015. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

3016. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$

3017. $1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \ldots$

Sečtěte následující trigonometrické řady:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

3019. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

3020. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$.

3021. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

3022. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **3023.** $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$. **3024.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

3025. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$. **3026.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

3027. Sestrojte křivku, která je definovaná rovností

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = 0.$$

Vypočtěte součty následujících řad:

3028. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$. **3029.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

3030. $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\frac{a_2}{a_3+x} + \ldots$ za podmínky, že $x>0$, $a_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverguje.

3032. $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \ldots$ pro a) $|x|<1$; b) $|x|>1$.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ pro a) $|x|<1$; b) $|x|>1$.

§ 8. Výpočet určitých integrálů pomocí součtu řady

Pomocí rozvoje integrované funkce do řady vypočtěte hodnoty následujících integrálů:

3034. $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx$. **3035.** $\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}dx$. **3036.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

3037. $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)dx$ $(p>0, q>0)$.

3038. $\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx$. **3039.** $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1}$. **3040.** $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{x}+1}$.

3041. Rozviňte do mocninné řady s celými nezápornými mocninami argumentu $k\,(0 \le k < 1)$ *úplný eliptický integrál prvního druhu*

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

3042. Rozviňte do mocninné řady s celými nezápornými mocninami argumentu $k\,(0 \le k < 1)$ *úplný eliptický integrál druhého druhu*

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

3043. Vyjádřete délku elipsy $x = a\cos t$, $x = b\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ pomocí mocninné řady s celými nezápornými mocninami argumentu, který se rovná výstřednosti (excentricitě) elipsy.

Dokažte následující rovnosti:

3044. $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

3045. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}\,a^{2n+1}$.

3046. $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx = \frac{\pi}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Vypočtěte následující integrály:

3047. $\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x - nx)\,dx$ (n je přirozené číslo).

3048. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx$.

Návod: Viz úloha **2864**.

3049. $\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$.

3050. Odvoďte vzorec

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x}dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \qquad (1)$$

kde $a>0$ a $0<\theta_n<1$. S jakou přesností aproximujeme hodnotu integrálu $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x}dx$, jestliže ve vzorci (1) použijeme první dva členy?

§ 9. Nekonečné součiny

1. **KONVERGENCE SOUČINU.** Říkáme, že nekonečný součin

$$p_1 p_2 \cdots p_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \qquad (1)$$

konverguje, jestliže existuje konečná nenulová limita posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} p_i = \lim_{n\to\infty} P_n = P.$$

Nechť $P=0$. Jestliže žádný z členů p_n není roven nule, pak řekneme, že součin (1) *diverguje k nule*. V opačném případě říkáme, že součin *konverguje k nule*.
Nutnou podmínkou konvergence součinu je rovnost

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Součin nenulových členů (1) konverguje, právě když existuje n_0 takové, že konverguje řada

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n. \qquad (2)$$

Jestliže $p_n = 1+\alpha_n$ $(n=1,2,\ldots)$ a α_n nemění znaménko, pak pro konvergenci součinu (1) je nutné a stačí, aby konvergovala řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1). \qquad (3)$$

V obecném případě, když α_n mění znaménko a řada (3) konverguje, součin (1) konverguje nebo diverguje k nule, právě když konverguje nebo diverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2.$$

2. **ABSOLUTNÍ KONVERGENCE.** Říkáme, že součin (1) konverguje absolutně (resp. neabsolutně), jestliže absolutně (resp. neabsolutně) konverguje řada (2). Nutnou a postačující podmínkou pro absolutní konvergenci součinu (1) je absolutní konvergence řady (3).

3. **ROZVOJ FUNKCE DO NEKONEČNÉHO SOUČINU.** Pro $-\infty < x < +\infty$ platí následující rozvoje:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad \text{a} \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right].$$

Speciálně substitucí $x = \pi/2$ do prvního z nich získáme *Wallisův vzorec*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}.$$

Dokažte následující rovnosti:

3051. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$

3052. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$

3053. $\prod_{n=22}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right] = 2.$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$

3056. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$

3057. $\prod_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{x}{2^n} = \frac{\sinh x}{x}.$

3058. $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$

3059. $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$

3060. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

Dokažte, že následující součiny konvergují, a vypočtěte jejich hodnoty:

3061. $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}.$

3062. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right].$

3063. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$

3064. $\prod_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^n/n} \quad (a > 0).$

3065. Vyplývá z konvergence součinů $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ a $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ konvergence součinů:

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$; b) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$; c) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; d) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$?

Vyšetřete konvergenci nekonečných součinů:

3066. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

3067. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

3068. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

3069. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

3070. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$, kde $n^2+an+b>0$ pro $n\geq n_0$.

3072. $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(n-a_1)(n-a_2)\ldots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\ldots(n-b_p)}$, kde $n_0>b_i$ $(i=1,2,\ldots,p)$.

3073. $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

3074. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3075. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

3076. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$.

3077. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}$.

3078. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{x/n}$, kde $c>0$.

3079. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$.

3080. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

3081. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

3082. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{x/\sqrt{n}+x^2/2n}$.

3083. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$.

3084. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

3085. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

3086. Dokažte, že součin $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ konverguje, jestliže konverguje součin $\prod_{n=1}^{\infty}x_n^2$.

3087. Dokažte, že součin $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ konverguje, jestliže konverguje absolutně řada $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$.

Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci následujících nekonečných součinů:

3088. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

3089. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

3091. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

3092. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

3093. $\prod_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

3094. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

3095. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}\right]$.

3096. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ldots$

3097. $\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\ldots$

3098. Ukažte, že součin $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ldots$ konverguje, přestože řada $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots$ diverguje.

3099. Ukažte, že součin $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$, kde

$$\alpha_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}} & \text{pro } n=2k-1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}} & \text{pro } n=2k,\end{cases}$$

konverguje, přestože řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ divergují.

3100. Nechť

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

(*Riemannova zeta-funkce*) a p_n $(n=1,2,\ldots)$ je vzestupné očíslování posloupnosti všech prvočísel.

Dokažte, že $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x)$.

3101. Dokažte, že součin $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$, kde p_n $(n=1,2,\ldots)$ je posloupnost všech prvočísel, divergují (Eulerovo tvrzení).

3102. Nechť $a_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$ a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\quad(\varepsilon>0).$$

Dokažte, že

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

NÁVOD: Vyšetřete limitu $\lim_{n\to\infty}a_n n^p=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$.

3103. Pomocí Wallisova vzorce dokažte, že $\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

3104. Dokažte, že výraz $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ má nenulovou limitu A pro $n \to \infty$.

Odvoďte pak Stirlingovu formuli $n! = An^{n+1/2}e^{-n}(1+\varepsilon_n)$, kde $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ a $A = \sqrt{2\pi}$.

NÁVOD: Limitu vyjádřete jako součin

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Konstantu A určete pomocí Wallisova vzorce.

3105. Eulerova definice *gama-funkce* $\Gamma(x)$ je

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Pomocí tohoto vzorce: a) vyjádřete funkci $\Gamma(x)$ ve tvaru nekonečného součinu; b) dokažte, že $\Gamma(x)$ je definována pro všechna reálná čísla x kromě celých záporných čísel; c) odvoďte vztah $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; d) vypočtěte hodnotu $\Gamma(n)$ pro každé přirozené číslo n.

3106. Nechť funkce $f(x)$ má vlastní integrál na intervalu $[a,b]$ a $\delta_n = \dfrac{b-a}{n}$, $f_{in} = f(a+i\delta_n)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} (1+\delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x)dx}.$$

3107. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)} = \frac{2}{e},$$

kde $a > 0$ a $b > 0$.

3108. Nechť $f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ jsou spojité funkce na intervalu (a,b) a $|f_n(x)| \le c_n$ $(n = 1,2,\ldots)$, kde řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje. Dokažte, že funkce

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1+f_n(x)]$$

je spojitá na intervalu (a,b).

3109. Najděte vztah pro derivaci funkce

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1+f_n(x)].$$

Jaké jsou postačující podmínky k tomu, aby derivace $F'(x)$ existovala?

3110. Dokažte, že jestliže $0 < x < y$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{y(y+1)\dots(y+n)} = 0.$$

§ 10. Stirlingův vzorec

K přibližnému výpočtu $n!$ pro velké hodnoty čísla n lze použít *Stirlingův vzorec*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\theta_n/12n} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

Pomocí Stirlingova vzorce vypočtěte přibližně následující hodnoty:

3111. $\log 100!$.

3112. $1\cdot 3\cdot 5\dots 1999$.

3113. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\dots 99}{2\cdot 4\cdot 6\dots 100}$.

3114. $\begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix}$.

3115. $\dfrac{100!}{20!30!50!}$.

3116. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{50}\,dx$.

3117. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{200} x\,dx$.

3118. Odvoďte asymptotický vztah pro součin

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1).$$

3119. Vypočtěte přibližně hodnotu čísla $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ pro velké hodnoty n.

3120. Pomocí Stirlingova vzorce vypočtěte přibližně následující limity:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$; b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$; d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

§ 11. Aproximace spojitých funkcí pomocí polynomů

1. LAGRANGEOVA INTERPOLAČNÍ FORMULE. Pro Lagrangeův polynom

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i$$

platí $P_n(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \dots, n)$.

2. **BERNSTEINOVY POLYNOMY.** Jestliže $f(x)$ je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[0,1]$, pak *Bernsteinovy polynomy*

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i}$$

pro $n \to \infty$ konvergují stejnoměrně na intervalu $[0,1]$ k funkci $f(x)$.

3121. Najděte polynom $P_n(x)$ nejmenšího možného stupně n, který nabývá následujících hodnot:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

Určete přibližně hodnoty $P_n(-1)$, $P_n(1)$, $P_n(6)$.

3122. Sestavte rovnici paraboly $y = ax^2 + bx + c$, která prochází třemi body $(x_0 - h, y_{-1})$, (x_0, y_0), $(x_0 + h, y_1)$.

3123. Odvoďte přibližný vztah pro odmocninu $y = \sqrt{x}$ $(1 \le x \le 100)$ s využitím známých hodnot $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $x_1 = 25$, $y_1 = 5$; $x_2 = 100$, $y_2 = 10$.

3124. Odvoďte přibližný vztah tvaru

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \le x \le 90;\ x = \text{arc } x^\circ)$$

s využitím hodnot $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 90^\circ = 1$. Pomocí tohoto vztahu vypočtěte přibližně hodnoty $\sin 20^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 80^\circ$.

3125. Pro funkci $f(x) = |x|$ na intervalu $[-1,1]$ najděte Lagrangeův interpolační polynom s uzlovými body $x = 0$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1.

3126. Pomocí aproximace funkce $y(x)$ Lagrangeovým polynomem vypočtěte přibližně integrál $\int_0^2 y(x)dx$, kde

x	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$y(x)$	5	$4{,}5$	3	$2{,}5$	5

3127. Vyjádřete Bernsteinovy polynomy $B_n(x)$ pro funkce x, x^2, x^3 na intervalu $[0,1]$.

3128. Najděte vzorec pro Bernsteinovy polynomy $B_n(x)$ funkce $f(x)$ definované na uzavřeném intervalu $[a,b]$.

3129. Aproximujte funkci $f(x)=\frac{|x|+x}{2}$ na uzavřeném intervalu $[-1,1]$ Bernsteinovým polynomem $B_4(x)$. Sestrojte grafy funkcí $y=\frac{|x|+x}{2}$ a $y=B_4(x)$.

3130. Aproximujte funkci $f(x)=|x|$ pro $-1\le x\le 1$ Bernsteinovými polynomy sudého stupně.

3131. Najděte Bernsteinův polynom $B_n(x)$ pro funkci $f(x)=e^{kx}$ $(a\le x\le b)$.

3132. Sestavte polynom $B_n(x)$ pro funkci $f(x)=\cos x$ na uzavřeném intervalu $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

3133. Dokažte, že $|x|=\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ na uzavřeném intervalu $[-1,1]$, kde

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot 3\ldots(2i-3)}{2\cdot 4\ldots(2i)}(1-x^2)^i.$$

3133.1 Nechť $f(x)\in C[a,b]$ a $M_k=\int_a^b x^k f(x)dx=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Dokažte, že $f(x)\equiv 0$ pro $x\in[a,b]$.

NÁVOD: Využijte Weierstrassovu větu o aproximaci spojitých funkcí polynomy.

3134. Nechť $f(x)$ je spojitá periodická funkce s periodou 2π a a_n,b_n $(n=0,1,2,\ldots)$ jsou její Fourierovy koeficienty. Dokažte, že *Fejérovy trigonometrické polynomy*

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$$

konvergují stejnoměrně k funkci $f(x)$ na intervalu $[-\pi,\pi]$.

3135. Najděte Fejérův polynom $\sigma_{2n-1}(x)$ pro funkci $f(x)=|x|$ na intervalu $-\pi\le x\le\pi$.

ČÁST DRUHÁ

FUNKCE VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

KAPITOLA VI

Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných

§ 1. Limita a spojitost funkce

1. **LIMITA FUNKCE.** Nechť je funkce $f(P)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ definována na množině E s hromadným bodem P_0. Řekneme, že

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$ takové, že

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

pro každé $P\in E$ splňující $0<\varrho(P,P_0)<\delta$, kde $\varrho(P,P_0)$ je vzdálenost mezi body P a P_0.

2. **SPOJITOST FUNKCE.** Funkce $f(P)$ se nazývá *spojitou v bodě* P_0, je-li

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

Funkce $f(P)$ je *spojitá na dané množině*, jestliže je spojitá v každém bodě této množiny.

3. **STEJNOMĚRNÁ SPOJITOST FUNKCE.** Funkce $f(P)$ se nazývá *stejnoměrně spojitou* na množině G, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ takové, že pro libovolné dva body P' a P'' z množiny G platí nerovnost

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon,$$

pokud

$$\varrho(P', P'') < \delta.$$

Funkce, která je spojitá na uzavřené a omezené množině, je na této množině stejnoměrně spojitá.

Najděte a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

3136. $u = x + \sqrt{y}$.

3137. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.

3138. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

3139. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

3140. $u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.

3141. $u = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

3142. $u = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$.

3143. $u = \ln(-x - y)$.

3144. $u = \arcsin\dfrac{y}{x}$.

3145. $u = \arccos\dfrac{x}{x + y}$.

3146. $u = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$.

3147. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

3148. $u = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3149. $u = \ln(xyz)$.

3150. $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

Sestrojte vrstevnice následujících funkcí:

3151. $z = x + y$.

3152. $z = x^2 + y^2$.

3153. $z = x^2 - y^2$.

3154. $z = (x + y)^2$.

3155. $z = \dfrac{y}{x}$.

3156. $z = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$.

3157. $z = \sqrt{xy}$.

3158. $z = |x| + y$.

3159. $z = |x| + |y| - |x + y|$.

3159.1 $z = \min(x, y)$.

3159.2 $z = \max(|x|, |y|)$.

3159.3 $z = \min(x^2, y)$.

3160. $z = e^{2x/(x^2 + y^2)}$.

3161. $z = x^y$ $(x > 0)$.

3162. $z = x^y e^{-x}$ $(x > 0)$.

3163. $z = \ln\sqrt{\dfrac{(x - a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2}}$ $(a > 0)$.

3164. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$ $(a > 0)$.

3165. $z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$.

Sestrojte ekvipotenciální plochy následujících funkcí:

3166. $u = x + y + z$. **3167.** $u = x^2 + y^2 + z^2$. **3168.** $u = x^2 + y^2 - z^2$.

3169. $u = (x+y)^2 + z^2$. **3170.** $u = \operatorname{sgn}\sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

Vyšetřete charakter ploch zadaných následujícími rovnicemi:

3171. $z = f(y - ax)$. **3172.** $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

3173. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. **3174.** $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

3175. Sestrojte graf funkce $F(t) = f(\cos t, \sin t)$, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ je-li } y \geq x, \\ 0, \text{ je-li } y < x. \end{cases}$$

3176. Vyjádřete $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, je-li $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

3177. Vyjádřete $f(x)$, je-li

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0).$$

3178. Nechť

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

Určete funkce f a z, je-li $z = x$ pro $y = 1$.

3179. Nechť

$$z = x + y + f(x - y).$$

Určete funkce f a z, je-li $z = x^2$ pro $y = 0$.

3180. Vyjádřete $f(x,y)$, je-li $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$.

3181. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x - y}{x + y}$$

platí

$$\lim_{x \to 0}\left\{\lim_{y \to 0} f(x,y)\right\} = 1; \quad \lim_{y \to 0}\left\{\lim_{x \to 0} f(x,y)\right\} = -1,$$

zatímco $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ neexistuje.

3182. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

platí

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\} = \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\} = 0,$$

avšak $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ neexistuje.

3183. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

limity $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\}$ a $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\}$ neexistují, a přesto $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

3183.1 Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

3183.2 Čemu je rovna limita funkce $f(x,y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$ podél libovolné polopřímky $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ $(0 \le t < +\infty)$ pro $t \to +\infty$? Je tato funkce nekonečně malá pro $x \to \infty$ a $y \to \infty$?

3184. Najděte limity $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right\}$ a $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right\}$, je-li:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$; b) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a=\infty$, $b=0$ $(y \searrow b)$;

c) $f(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$; d) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

e) $f(x,y) = \log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

Vypočtěte následující limity:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)}$.

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3193. V jakých směrech φ existuje konečná limita

$$\text{a) } \lim_{\varrho \searrow 0} e^{x/(x^2+y^2)}; \quad \text{b) } \lim_{\varrho \to +\infty} e^{x^2-y^2} \sin 2xy,$$

je-li $x = \varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$?

Najděte body nespojitosti následujících funkcí:

3194. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3195. $u = \dfrac{xy}{x+y}$.

3196. $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

3197. $u = \sin\dfrac{1}{xy}$.

3198. $u = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$.

3199. $u = \ln(1-x^2-y^2)$.

3200. $u = \dfrac{1}{xyz}$.

3201. $u = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

3202. Ukažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{je-li } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{je-li } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

je spojitá vzhledem ke každé proměnné x a y zvlášť (při druhé proměnné konstantní), ale není spojitá vzhledem k oběma proměnným najednou.

3203. Ukažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{je-li } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{je-li } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

je v bodě $(0,0)$ spojitá podél každé polopřímky $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ $(0 \le t < +\infty)$, která tímto bodem prochází, tj. pro každé α existuje $\lim\limits_{t \to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0,0)$, a přesto tato funkce není v bodě $(0,0)$ spojitá.

3203.1 Vyšetřete, zda je lineární funkce $u = 2x - 3y + 5$ stejnoměrně spojitá na rovině $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$.

3203.2 Vyšetřete, zda je na rovině $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ stejnoměrně spojitá funkce $u = \sqrt{x^2+y^2}$.

3203.3 Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$$

stejnoměrně spojitá na množině $x^2+y^2 < 1$.

3203.4 Je dána funkce $u = \arcsin\frac{x}{y}$. Je tato funkce spojitá na svém definičním oboru E? Je funkce u stejnoměrně spojitá na množině E?

3204. Ukažte, že množina bodů nespojitosti funkce $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}$, je-li $y \neq 0$, a $f(x,0) = 0$, není uzavřená.

3205. Dokažte, že je-li funkce $f(x,y)$ spojitá na nějaké množině G vzhledem k proměnné x a pro všechna x stejnoměrně spojitá vzhledem k proměnné y, pak je tato funkce na množině G spojitá.

3206. Dokažte, že jestliže je na nějaké množině G funkce $f(x,y)$ spojitá vzhledem k proměnné x a splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné y, tj. existuje konstanta L tak, že

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \leq L|y' - y''|,$$

pro každé $(x,y') \in G$ a $(x,y'') \in G$, pak je tato funkce na množině spojitá.

3207. Dokažte, že je-li funkce $f(x,y)$, kde $(x,y) \in E$, spojitá vzhledem k proměnným x a y zvlášť a monotónní vzhledem k jedné z nich, pak je tato funkce na dané množině E spojitá.

3208. Nechť je funkce $f(x,y)$ spojitá na množině $a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$ a nechť posloupnost funkcí $\varphi_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a,A]$ a vyhovuje podmínce $b \leq \varphi_n(x) \leq B$. Dokažte, že posloupnost funkcí

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \ (n = 1,2,...)$$

stejnoměrně konverguje na $[a,A]$.

3209. Nechť jsou splněny následující podmínky: 1) funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $\{a < x < A; b < y < B\}$; 2) funkce $\varphi(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu (a,A) a její obor hodnot je částí intervalu (b,B). Dokažte, že funkce $F(x) = f(x, \varphi(x))$ je spojitá na intervalu (a,A).

3210. Nechť jsou splněny následující podmínky: 1) funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $\{a < x < A; b < y < B\}$; 2) funkce $x = \varphi(u,v)$ s hodnotami v intervalu (a,A) a funkce $y = \psi(u,v)$ s hodnotami v intervalu (b,B) jsou spojité na množině $\{a' < u < A'; b' < v < B'\}$. Dokažte, že funkce

$$F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

je spojitá na množině $\{a' < u < A'; b' < v < B'\}$.

§ 2. Parciální derivace. Diferenciál funkce

1. **PARCIÁLNÍ DERIVACE.** Výsledek parciálního derivování funkce více proměnných nezáleží na pořadí derivování, jsou-li všechny derivace spojité.

2. **DIFERENCIÁL FUNKCE.** Pokud může být přírůstek funkce $f(x,y,z)$ nezávisle proměnných x,y,z vyjádřen ve tvaru

$$\Delta f(x,y,z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\varrho),$$

kde koeficienty A, B, C nezávisí na Δx, Δy, Δz a $\varrho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, pak se funkce $f(x,y,z)$ nazývá *diferencovatelnou* v bodě (x,y,z). Lineární část přírůstku $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$, která je rovna

$$df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz, \qquad (1)$$

kde $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, se nazývá *diferenciálem* této funkce.
Vztah (1) zůstane v platnosti i tehdy, jestliže proměnné x,y,z jsou diferencovatelnými funkcemi nezávisle proměnných.
Jsou-li x,y,z nezávisle proměnné a funkce $f(x,y,z)$ má spojité parciální derivace až do n-tého řádu včetně, pak pro *diferenciály vyšších řádů* platí následující vztah

$$d^n f(x,y,z) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x,y,z).$$

3. **DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE.** Je-li funkce $w = f(x,y,z)$ diferencovatelná a $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$, kde ϕ, ψ, χ jsou diferencovatelné funkce, pak

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Pro výpočet derivací druhého řádu funkce w jsou užitečné následující vzorce:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z} \right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x} + Q_2\frac{\partial}{\partial y} + R_2\frac{\partial}{\partial z} \right) w + \frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

kde

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial u},\ Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u},\ R_1 = \frac{\partial z}{\partial u},$$
$$P_2 = \frac{\partial x}{\partial v},\ Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v},\ R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4. **DERIVACE V DANÉM SMĚRU.** Je-li směr l v prostoru xyz vyjádřen pomocí směrových kosinů $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ a je-li funkce $u = f(x,y,z)$ diferencovatelná, pak *derivaci ve směru* l můžeme spočítat podle vzorce

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Velikost a směr rychlosti největšího růstu funkce v daném bodě jsou určeny vektorem - *gradientem funkce*: $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, jehož velikost se rovná

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}.$$

3211. Dokažte, že $f'_x(x,b) = \frac{d}{dx}\,[f(x,b)]$.

3212. Vypočtěte $f'_x(x,1)$, je-li

$$f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

3212.1 Vypočtěte $f'_x(0,0)$ a $f'_y(0,0)$ je-li $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Je tato funkce diferencovatelná v bodě $(0,0)$?

3212.2 Je v bodě $(0,0)$ diferencovatelná funkce

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}?$$

3212.3 Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$ pro $x^2 + y^2 > 0$ a $f(0,0) = 0$ diferencovatelná v bodě $(0,0)$.

Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu následujících funkcí:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

3215. $u = \frac{x}{y^2}$.

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3217. $u = x\sin(x+y)$.

3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}$.

3219. $u = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$.

3220. $u = x^y$.

3221. $u = \ln(x + y^2)$.

3222. $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3223. $u = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3224. $u = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^2$.

3227. $u = x^{y/z}$.

3228. $u = x^{y^z}$.

3229. Ověřte platnost rovnosti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

je-li

a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; b) $u = x^{y^2}$; c) $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

3230. Nechť $f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pro $x^2 + y^2 \neq 0$ a $f(0,0) = 0$. Ukažte, že $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

3230.1 Existuje $f''_{xy}(0,0)$, je-li

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{pro } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{pro } x = y = 0? \end{cases}$$

3231. Nechť $u = f(x,y,z)$ je homogenní funkce stupně n. Ověřte Eulerovu větu o homogenních funkcích na následujících příkladech:

a) $u = (x - 2y + 3z)^2$; b) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; c) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{y/z}$.

3232. Dokažte, že jestliže diferencovatelná funkce $u = f(x,y,z)$ vyhovuje rovnosti

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial z} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

pak je homogenní funkcí stupně n.

NÁVOD: Uvažujte pomocnou funkci

$$F(t) = \frac{f(tx,ty,tz)}{t^n}.$$

3233. Dokažte, že je-li $f(x,y,z)$ diferencovatelnou homogenní funkcí stupně n, pak jsou její parciální derivace $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$ homogenními funkcemi stupně $n - 1$.

3234. Nechť $u = f(x,y,z)$ je dvakrát diferencovatelná homogenní funkce stupně n. Dokažte, že

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Najděte diferenciály prvního a druhého řádu následujících funkcí, kde x,y,z jsou nezávisle proměnné:

3235. $u = x^m y^n$. **3236.** $u = \dfrac{x}{y}$. **3237.** $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3238. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. **3239.** $u = e^{xy}$. **3240.** $u = xy + yz + zx$.

3241. $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$.

3242. Vypočtěte $df(1,1,1)$ a $d^2f(1,1,1)$, je-li $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$.

3243. Dokažte, že je-li $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, pak $d^2u \geq 0$.

3244. Předpokládejte, že x, y mají malou absolutní hodnotu. Odvoďte přibližné vzorce pro následující výrazy:

a) $(1+x)^m(1+y)^n$; b) $\ln(1+x)\ln(1+y)$; c) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$.

3245. Nahraďte přírůstek funkce diferenciálem a vypočtěte přibližně hodnoty následujících výrazů:

a) $1{,}002\ 2{,}003^2\ 3{,}004^3$; b) $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$; c) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$; d) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$;

e) $0{,}97^{1{,}05}$.

3246. O kolik se změní délka diagonály a obsah obdélníka o stranách délek $x=6\,\mathrm{m}$ a $y=8\,\mathrm{m}$, jestliže se strana x zvětší o $2\,\mathrm{mm}$ a strana y zmenší o $5\,\mathrm{mm}$?

3247. Středový úhel kruhové výseče $\alpha=60^\circ$ se zvětší o $\Delta\alpha=1^\circ$. O kolik je třeba zmenšit poloměr této výseče $R=20\,\mathrm{cm}$, aby její plocha zůstala stejná?

3248. Dokažte, že relativní chyba součinu čísel je přibližně rovna součtu relativních chyb součinitelů.

3249. Měřením poloměru podstavy R a výšky H válce se získaly následující výsledky: $R=2{,}5\,\mathrm{m}\pm 0{,}1\,\mathrm{m}$; $H=4{,}0\,\mathrm{m}\pm 0{,}2\,\mathrm{m}$. S jakou absolutní chybou Δ a relativní chybou δ může být spočítán objem tohoto válce?

3250. Strany trojúhelníka mají rozměry $a=200\,\mathrm{m}\pm 2\,\mathrm{m}$, $b=300\,\mathrm{m}\pm 5\,\mathrm{m}$ a úhel mezi nimi je roven $C=60^\circ\pm 1^\circ$. S jakou absolutní chybou lze vypočítat délku třetí strany trojúhelníka c?

3251. Ukažte, že funkce

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

je spojitá v bodě $(0,0)$, má v tomto bodě obě parciální derivace $f'_x(0,0)$ a $f'_y(0,0)$, a přesto není v bodě $(0,0)$ diferencovatelná. Vyšetřete chování parciálních derivací $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ v okolí bodu $(0,0)$.

3252. Dokažte, že funkce

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ pro } x^2+y^2\neq 0,\ f(0,0)=0$$

je v okolí bodu $(0,0)$ spojitá a má zde omezené parciální derivace $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$, a přesto není v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.

3253. Dokažte, že funkce

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \text{ pro } x^2+y^2\neq 0,\ f(0,0)=0$$

má v okolí bodu $(0,0)$ parciální derivace $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$, které jsou v bodě $(0,0)$ nespojité a neomezené v jeho libovolném okolí. Dokažte, že přesto je tato funkce v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.

3254. Dokažte, že funkce $f(x,y)$, která má omezené parciální derivace $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ na nějaké konvexní množině E, je na této množině stejnoměrně spojitá.

3255. Dokažte, že je-li funkce $f(x,y)$ spojitá vzhledem k proměnné x pro každou hodnotu y a má-li omezenou parciální derivaci $f'_y(x,y)$ vzhledem k proměnné y, pak je tato funkce spojitá jako funkce dvou proměnných x a y.

Vypočtěte požadované parciální derivace v následujících úlohách:

3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$, je-li

$$u=x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4.$$

3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$, je-li $u=x\ln(xy)$.

3258. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}$, je-li $u=x^3\sin y+y^3\sin x$.

3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, je-li $u=\operatorname{arctg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, je-li $u=e^{xyz}$.

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}$, je-li $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

3262. $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$, je-li $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$.

3263. $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$, je-li $u=\frac{x+y}{x-y}$.

3264. $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$, je-li $u=(x^2+y^2)e^{x+y}$.

3265. $\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$, je-li $u=xyze^{x+y+z}$.

3266. Vypočtěte $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0,0)$, je-li $f(x,y)=e^x \sin y$.

3267. Dokažte, že je-li $u=f(xyz)$, pak

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}=F(t),$$

kde $t=xyz$, a najděte funkci F.

3268. Vyjádřete d^4u, je-li

$$u=x^4-2x^3y-2xy^3+y^4+x^3-3x^2y-3xy^2+y^3+2x^2-xy+2y^2+x+y+1.$$

Čemu jsou rovny derivace $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ a $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$?

Najděte totální diferenciály požadovaných řádů v následujících příkladech:

3269. d^3u, je-li $u=x^3+y^3-3xy(x-y)$.

3270. d^3u, je-li $u=\sin(x^2+y^2)$.

3271. $d^{10}u$, je-li $u=\ln(x+y)$.

3272. d^6u, je-li $u=\cos x \cosh y$.

3273. d^3u, je-li $u=xyz$.

3274. d^4u, je-li $u=\ln(x^x y^y z^z)$.

3275. d^nu, je-li $u=e^{ax+bx}$.

3276. d^nu, je-li $u=X(x)Y(y)$.

3277. d^nu, je-li $u=f(x+y+z)$.

3278. d^nu, je-li $u=e^{ax+by+cz}$.

3279. Nechť $P_n=(x,y,z)$ je homogenní polynom stupně n. Dokažte, že

$$d^n P_n(x,y,z)=n!\,P_n(dx,dy,dz).$$

3280. Nechť $Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$. Vypočtěte Au a $A^2u=A(Au)$, je-li a) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$;

b) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3281. Nechť $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Vypočtěte Δu, je-li a) $u=\sin x \cosh y$;

b) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3282. Nechť

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

a

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Vypočtěte $\Delta_1 u$ a $\Delta_2 u$, je-li

a) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$; b) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Vypočtěte derivace prvního a druhého řádu následujících složených funkcí:

3283. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$. **3284.** $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$. **3285.** $u = f(x, xy, xyz)$.

3286. Vypočtěte $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, je-li $u = f(x + y, xy)$.

3287. Vypočtěte $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, je-li $u = f(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2)$.

Najděte totální diferenciály prvního a druhého řádu následujících složených funkcí, kde x, y a z jsou nezávisle proměnné:

3288. $u = f(t)$, kde $t = x + y$. **3289.** $u = f(t)$, kde $t = \frac{y}{x}$.

3290. $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. **3291.** $u = f(t)$, kde $t = xyz$.

3292. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$. **3293.** $u = f(\xi, \eta)$, kde $\xi = ax$, $\eta = by$.

3294. $u = f(\xi, \eta)$, kde $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. **3295.** $u = f(\xi, \eta)$, kde $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

3296. $u = f(x + y, z)$. **3297.** $u = f(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2)$.

3298. $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3299. $u = f(x, y, z)$, kde $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

3300. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, kde $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.

3301. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, kde $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

Najděte $d^n u$, je-li:

3302. $u = f(ax + by + cz)$. **3303.** $u = f(ax, by, cz)$.

3304. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, kde $\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z$, $\eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z$, $\zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z$.

3305. Nechť $u = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a f je dvakrát diferencovatelná funkce. Ukažte, že $\Delta u = F(r)$, kde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ je Laplaceův operátor, a najděte funkci F.

3306. Nechť u a v jsou dvakrát diferencovatelné funkce a Δ je Laplaceův operátor (viz úloha **3305**). Dokažte, že $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\Delta(u, v)$, kde

$$\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. Dokažte, že funkce $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, kde a a b jsou konstanty, vyhovuje *Laplaceově rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3308. Dokažte, že platí-li pro funkci $u=u(x,y)$ Laplaceova rovnice (viz úloha **3307**), pak funkce $v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ rovněž vyhovuje této rovnici.

3309. Dokažte, že funkce

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

kde a a b jsou konstanty, vyhovuje *rovnici vedení tepla*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. Dokažte, že jestliže funkce $u=u(x,t)$ vyhovuje rovnici vedení tepla (viz úloha **3309**), pak funkce

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{x}{a^4t}\right)\quad(t>0)$$

také vyhovuje této rovnici.

3311. Dokažte, že funkce $u=\frac{1}{r}$, kde $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, vyhovuje pro $r\neq 0$ *Laplaceově rovnici*

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

3312. Dokažte, že jestliže funkce $u=u(x,y,z)$ vyhovuje Laplaceově rovnici (viz úloha **3311**), pak funkce

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2},\frac{k^2y}{r^2},\frac{k^2z}{r^2}\right),$$

kde k je konstanta a $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, rovněž vyhovuje této rovnici.

3313. Dokažte, že funkce $u=\frac{C_1e^{-ar}+C_2e^{ar}}{r}$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ a C_1, C_2 jsou konstanty, vyhovuje *Helmholtzově rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u.$$

3314. Nechť funkce $u_1=u_1(x,y,z)$ a $u_2=u_2(x,y,z)$ vyhovují Laplaceově rovnici $\Delta u=0$. Dokažte, že funkce $v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$ vyhovuje *biharmonické rovnici*

$$\Delta(\Delta v)=0.$$

3315. Nechť $f=(x,y,z)$ je m-krát diferencovatelná homogenní funkce stupně n. Dokažte, že

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)\dots(n-m+1)f(x,y,z).$$

3316. Zjednodušte výraz

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y},$$

je-li $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$, kde f je diferencovatelná funkce.

3317. Dokažte, že funkce $z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce, splňuje rovnost $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$.

3318. Dokažte, že $z=yf(x^2-y^2)$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce, splňuje rovnost $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$.

3319. Zjednodušte výraz $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$, je-li

$$u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x,z-x),$$

kde f je diferencovatelná funkce.

3320. Nechť $x^2=vw$, $y^2=uw$, $z^2=uv$ a $f(x,y,z)=F(u,v,w)$. Dokažte, že

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w.$$

Předpokládejte, že funkce φ, ψ atd. mají derivace dostatečně vysokých řádů. Ověřte pak platnost následujících rovností:

3321. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, je-li $z=\varphi(x^2+y^2)$.

3322. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$, je-li $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$.

3323. $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$, je-li $z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

3324. $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$, je-li $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha},\frac{z}{x^\beta}\right)$.

3325. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$, je-li $u=\frac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.

3326. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, je-li $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

3327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, je-li $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$.

3328. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, je-li $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3329. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$, je-li $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3330. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, je-li $u = \varphi[x + \psi(y)]$.

Postupným derivováním nahraďte následující rovnice takovými, které neobsahují φ ani ψ (φ a ψ jsou libovolné funkce):

3331. $z = x + \varphi(xy)$.

3332. $y = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

3333. $z = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3334. $u = \varphi(x - y, y - z)$.

3335. $u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3336. $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

3337. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

3338. $z = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$.

3339. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3340. $z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3341. Vypočtěte derivaci funkce $z = x^2 - y^2$ v bodě $(1, 1)$ ve směru l, který svírá úhel $\alpha = 60°$ s kladnou poloosou x.

3342. Najděte derivaci funkce $z = x^2 - xy + y^2$ v bodě $(1, 1)$ ve směru l, který svírá úhel α s kladnou poloosou x. V jakém směru má tato derivace: a) největší hodnotu; b) nejmenší hodnotu; c) hodnotu 0?

3343. Najděte derivaci funkce $z = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru, který je kolmý na vrstevnici procházející tímto bodem.

3344. Vypočtěte derivaci funkce $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ v bodě $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ ve směru vnitřního normálového vektoru v tomto bodě ke křivce $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3345. Najděte derivaci funkce $u=xyz$ v bodě $(1,1,1)$ ve směru $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Čemu je rovna velikost gradientu funkce v tomto bodě?

3346. Vypočtěte velikost a směr gradientu funkce $u=\frac{1}{r}$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, v bodě (x_0,y_0,z_0).

3347. Vypočtěte úhel mezi gradienty funkce $u=x^2+y^2-z^2$ v bodech $(\varepsilon,0,0)$ a $(0,\varepsilon,0)$.

3348. O jakou hodnotu se liší v bodě $(1,2,2)$ velikost gradientu funkce $u=x+y+z$ od velikosti gradientu funkce $v=x+y+z+0{,}001\sin(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})$?

3349. Ukažte, že v bodě $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ úhel mezi gradienty funkcí

$$u=ax^2+by^2+cz^2 \text{ a } v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

$(a,b,c,m,n,p$ jsou konstanty a $a^2+b^2+c^2\neq 0)$ konverguje k nule, jestliže se bod M_0 vzdaluje do nekonečna.

3350. Nechť $u=f(x,y,z)$ je dvakrát diferencovatelná funkce. Najděte $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$, jsou-li $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ směrové kosiny směru $\boldsymbol{l}$.

3351. Nechť $u=f(x,y,z)$ je dvakrát diferencovatelná funkce a $\boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1)$, $\boldsymbol{l}_2=(\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2)$, $\boldsymbol{l}_3=(\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3)$ jsou tři navzájem kolmé směry. Dokažte, že platí následující vztahy:

a) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

3352. Nechť $u=u(x,y)$ je diferencovatelná funkce a pro $y=x^2$ platí $u(x,y)=1$ a $\frac{\partial u}{\partial x}=x$. Vypočtěte $\frac{\partial u}{\partial y}$ pro $y=x^2$.

3353. Nechť funkce $u=u(x,y)$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ a nechť navíc

$$u(x,2x)=x,\ u'_x(x,2x)=x^2.$$

Vypočtěte $u''_{xx}(x,2x)$, $u''_{xy}(x,2x)$, $u''_{yy}(x,2x)$.

Řešte následující rovnice pro $z=z(x,y)$:

3354. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$. **3355.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$. **3356.** $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=0$.

3357. Najděte řešení $u = u(x,y,z)$ rovnice $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$.

3358. Najděte řešení $z = z(x,y)$ rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, které vyhovuje podmínce $z(x,x^2) = 1$.

3359. Najděte řešení $z = z(x,y)$ rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, které vyhovuje podmínkám $z(x,0) = 1$, $z'_y(x,0) = x$.

3360. Najděte řešení $z = z(x,y)$ rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, které vyhovuje podmínkám $z(x,0) = x$, $z(0,y) = y^2$.

§3. Derivování implicitních funkcí

1. **VĚTA O EXISTENCI.** Jestliže jsou splněny následující podmínky: 1) funkce $F(x,y,z)$ je rovna nule v bodě (x_0,y_0,z_0); 2) $F(x,y,z)$ a $F'_z(x,y,z)$ jsou definované a spojité v okolí tohoto bodu; 3) $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, pak v nějakém dostatečně malém okolí bodu (x_0,y_0) existuje právě jedna spojitá funkce

$$z = f(x,y), \tag{1}$$

která splňuje rovnost

$$F(x,y,z) = 0,$$

taková, že $z_0 = f(x_0,y_0)$.

2. **DERIVACE IMPLICITNÍ FUNKCE.** Jestliže je navíc 4) funkce $F(x,y,z)$ diferencovatelná v okolí bodu (x_0,y_0,z_0), pak je funkce (1) diferencovatelná v okolí bodu (x_0,y_0) a její derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ vypočteme z následujících rovností:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Má-li funkce $F(x,y,z)$ derivace dostatečně vysokých řádů, pak postupným derivováním rovností (2) vypočteme také derivace vyšších řádů funkce z.

3. **IMPLICITNÍ FUNKCE URČENÉ SOUSTAVOU ROVNIC.** Nechť funkce $F_i(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ splňují následující podmínky: 1) jsou rovny nule v bodě $(x_{10},\ldots,x_{m0},y_{10},\ldots,y_{n0})$; 2) jsou diferencovatelné v okolí tohoto bodu; 3) Jakobián $\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}$ je nenulový v tomto bodě. Potom systém rovnic

$$F_i(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) = 0 \ (i = 1,2,\ldots,n) \tag{3}$$

jednoznačně určuje v nějakém okolí bodu $(x_{10},\ldots,x_{m0})$ systém diferencovatelných funkcí $y_i = f_i(x_1,\ldots,x_m)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, které vyhovují rovnostem (3) a podmínkám $f_i(x_{10},\ldots,x_{m0}) = y_{i0}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Diferenciály těchto implicitních funkcí lze najít pomocí soustavy rovnic [1]

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

3361. Ukažte, že Dirichletova funkce

$$y = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální,} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální,} \end{cases}$$

která je nespojitá v každém bodě, splňuje rovnost $y^2 - y = 0$.

3362. Nechť je funkce $f(x)$ definována na otevřeném intervalu (a,b). Za jakých podmínek má rovnost $f(x)y = 0$ pro $a < x < b$ právě jedno spojité řešení $y = 0$?

3363. Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ definované a spojité na otevřeném intervalu (a,b). Kdy má rovnost $f(x)y = g(x)$ na otevřeném intervalu (a,b) právě jedno spojité řešení?

3364. Mějme rovnici

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

a nechť

$$y = y(x) \quad (-1 \le x \le 1) \tag{2}$$

je jednoznačná funkce, která vyhovuje rovnici (1). 1) Kolik jednoznačných funkcí (2) vyhovuje rovnici (1)? 2) Kolik jednoznačných spojitých funkcí (2) vyhovuje rovnici (1)? 3) Kolik jednoznačných spojitých funkcí (2) vyhovuje rovnici (1), je-li: a) $y(0) = 1$; b) $y(1) = 0$?

3365. Mějme rovnici

$$x^2 = y^2 \tag{1}$$

a nechť

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

je jednoznačná funkce, která vyhovuje rovnici (1). 1) Kolik jednoznačných funkcí (2) vyhovuje rovnici (1)? 2) Kolik jednoznačných spojitých funkcí (2) vyhovuje rovnici (1)? 3) Kolik jednoznačných diferencovatelných funkcí (2) vyhovuje rovnici (1)? 4) Kolik jednoznačných spojitých funkcí (2) vyhovuje rovnici (1), je-li: a) $y(1) = 1$; b) $y(0) = 0$? 5) Kolik jednoznačných spojitých funkcí $y = y(x)$ $(1 - \delta < x < 1 + \delta)$ vyhovuje rovnici (1), je-li $y(1) = 1$ a δ je dostatečně malé číslo?

3366. Rovnost $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ definuje y jako obecně mnohoznačnou funkci proměnné x. Na jakých množinách je tato funkce 1) jednoznačná, 2) dvojznačná, 3) trojznačná, 4) čtyřznačná? Určete body větvení této funkce a její jednoznačné spojité větve.

[1] Ve formulaci většiny úloh tohoto paragrafu se bez dalšího uvedení předpokládá, že jsou splněny podmínky existence implicitních funkcí a jejich derivací.

3367. Najděte body větvení a jednoznačné spojité větve $y=y(x)$ $(-1\le x\le 1)$ mnohoznačné funkce y, která je definována rovností $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

3368. Nechť je $f(x)$ spojitá pro $a<x<b$ a $\varphi(y)$ ostře rostoucí a spojitá pro $c<y<d$. V jakém případě rovnost $\varphi(y)=f(x)$ definuje jednoznačnou funkci $y=\varphi^{-1}(f(x))$? Uvažujte následující případy: a) $\sin y+\sinh y=x$; b) $e^{-y}=-\sin^2 x$.

3369. Nechť

$$x=y+\varphi(y), \tag{1}$$

kde $\varphi(0)=0$ a $|\varphi'(y)|\le k<1$ pro $-a<y<a$. Dokažte, že pro $-\varepsilon<x<\varepsilon$ existuje jednoznačně určená diferencovatelná funkce $y=y(x)$ vyhovující rovnosti (1) taková, že $y(0)=0$.

3370. Nechť $y=y(x)$ je implicitní funkce, určená rovností

$$x=ky+\varphi(y),$$

kde $k\neq 0$ je konstanta a $\varphi(y)$ je diferencovatelná periodická funkce s periodou ω, pro kterou platí $|\varphi'(y)|<|k|$. Dokažte, že $y=\dfrac{x}{k}+\psi(x)$, kde $\psi(x)$ je periodická funkce s periodou $|k|\omega$.

Vypočtěte y' a y'' pro funkce y zadané následujícími rovnostmi:

3371. $x^2+2xy-y^2=a^2$.

3372. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3373. $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0<\varepsilon<1)$.

3374. $x^y=y^x$ $(x\neq y)$.

3375. $y=2x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3376. Dokažte, že pokud $1+xy=k(x-y)$, kde k je konstanta, pak platí rovnost

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

3377. Dokažte, že je-li

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

pak pro $xy>0$ platí rovnost

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

3378. Dokažte, že rovnost $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a\neq 0)$ definuje v okolí bodu $x=0$, $y=0$ dvě diferencovatelné funkce $y=y_1(x)$ a $y=y_2(x)$. Vypočtěte $y_1'(0)$ a $y_2'(0)$.

3379. Vypočtěte y' pro $x=0$ a $y=0$, je-li $(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3$.

3380. Vypočtěte y', y'' a y''', je-li $x^2+xy+y^3=3$.

3381. Vypočtěte y', y'' a y''' pro $x=0$, $y=1$, je-li $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$.

3382. Dokažte, že křivka druhého řádu $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ splňuje rovnost

$$\frac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-2/3}]=0.$$

Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $z=z(x,y)$, je-li:

3383. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

3384. $z^3-3xyz=a^3$

3385. $x+y+z=e^z$.

3386. $z=\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3387. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

3388. Nechť

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \qquad (1)$$

a

$$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$

Vypočtěte následující parciální derivace: a) $f'_x(1,1,1)$, je-li $z=z(x,y)$ implicitní funkce definovaná rovností (1); b) $f'_x(1,1,1)$, je-li $y=y(x,z)$ implicitní funkce definovaná rovností (1). Vysvětlete, proč se tyto derivace liší.

3389. Vypočtěte $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ pro $x=1$, $y=-2$, $z=1$, je-li

$$x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0.$$

Najděte dz a d^2z, je-li:

3390. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3391. $xyz=x+y+z$.

3392. $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$.

3393. $z=x+\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{z-x}$.

3394. Najděte du, je-li $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$.

3395. Vypočtěte $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, je-li $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

3396. Vypočtěte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, je-li $F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0$.

3397. Vypočtěte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, je-li $F(x,\ x+y,\ x+y+z)=0$.

3398. Vypočtěte $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, je-li $F(xz,\ yz)=0$.

3399. Najděte d^2z, je-li: a) $F(x+z,\ y+z)=0$; b) $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$.

3399.1 Nechť $z=z(x,y)$ je diferencovatelná funkce určená rovností

$$z^3-xz+y=0,$$

která má pro $x=3$, $y=-2$ hodnotu $z=2$. Najděte $dz(3,-2)$ a $d^2z(3,-2)$.

3400. Nechť $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$ jsou funkce určené rovností $F(x,y,z)=0$. Dokažte, že $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

3401. Vypočtěte $\frac{dx}{dz}$ a $\frac{dy}{dz}$, je-li $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$.

3402. Vypočtěte $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ a $\frac{d^2y}{dz^2}$ pro $x=1$, $y=-1$, $z=2$, je-li $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$, $x+y+z=2$.

3403. Vypočtěte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$, je-li $xu-yv=0$, $yu+xv=1$.

3403.1 Soustava rovnic

$$xe^{u+v}+2uv=1,\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x$$

definuje diferencovatelné funkce $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$ takové, že $u(1,2)=0$ a $v(1,2)=0$. Najděte $du(1,2)$ a $dv(1,2)$.

3404. Najděte du, dv, d^2u a d^2v, je-li

$$u+v=x+y,\ \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}.$$

3405. Najděte du, dv, d^2u a d^2v pro $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$, je-li

$$e^{u/x}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}},\ e^{u/x}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

3406. Nechť $x=t+t^{-1}$, $y=t^2+t^{-2}$, $z=t^3+t^{-3}$. Vypočtěte $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ a $\frac{d^2z}{dx^2}$.

3407. V jaké části roviny xy určuje soustava rovnic $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$ (parametry u a v nabývají všech reálných hodnot) z jako funkci proměnných x a y? Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3407.1 Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v bodě $u=1$, $v=1$, je-li $x=u+\ln v$, $y=v-\ln u$, $z=2u+v$.

3407.2 Vypočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ v bodě $u=2$, $v=1$, je-li $x=u+v^2$, $y=u^2-v^3$, $z=2uv$.

3408. Vypočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, je-li $x=\cos\varphi\cos\psi$, $y=\cos\varphi\sin\varphi$, $z=\sin\varphi$.

3409. Vypočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, je-li $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$.

3410. Nechť funkce $z=z(x,y)$ je definována soustavou rovnic $x=e^{u+v}$, $y=e^{u-v}$, $z=uv$, kde u a v jsou parametry. Najděte dz a d^2z pro $u=0$ a $v=0$.

3411. Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, je-li $z=x^2+y^2$, kde pro $y=y(x)$ platí $x^2-xy+y^2=1$.

3412. Vypočtěte $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$, je-li $u=\frac{x+z}{y+z}$, kde funkce z je definována rovností $ze^z=xe^x+ye^y$.

3413. Nechť rovnosti $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$ definují z jako funkci x a y. Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3414. Nechť $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$. Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu inverzních funkcí $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$.

3415. Vypočtěte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, je-li a) $x=u\cos\frac{v}{u}$, $y=u\sin\frac{v}{u}$; b) $x=e^u+u\sin v$, $y=e^u-u\cos v$.

3416. Funkce $u=u(x)$ je definována soustavou rovnic $u=f(x,y,z)$, $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$. Vypočtěte $\frac{du}{dx}$ a $\frac{d^2u}{dx^2}$.

3417. Funkce $u=u(x,y)$ je definována soustavou rovnic $u=f(x,y,z,t)$, $g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$. Vypočtěte $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3418. Nechť $u=f(u,v,w)$, $y=g(u,v,w)$, $z=h(u,v,w)$. Vypočtěte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial z}$.

3419. Nechť funkce $z=z(x,y)$ vyhovuje soustavě rovnic $f(x,y,z,t)=0$, $g(x,y,z,t)=0$ s parametrem t. Najděte dz.

3420. Nechť $u=f(z)$, kde z je implicitní funkce proměnných x a y definovaná rovností $z=x+y\varphi(z)$. Dokažte *Lagrangeův vzorec*

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

NÁVOD: Postupujte indukcí podle n.

3421. Dokažte, že funkce $z=z(x,y)$ definovaná rovností

$$\Phi(x-az,y-bz)=0, \tag{1}$$

kde $\Phi(u,v)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnných u a v (a a b jsou konstanty), je řešením rovnice $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Vyšetřete geometrické vlastnosti plochy (1).

3422. Dokažte, že funkce $z=z(x,y)$ definovaná rovností

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0, \tag{2}$$

kde $\Phi(u,v)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnných u a v, vyhovuje rovnici

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

Vyšetřete geometrické vlastnosti plochy (2).

3423. Dokažte, že funkce $z=z(x,y)$ definovaná rovností

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2), \tag{3}$$

kde $\Phi(u)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnné u (a,b a c jsou konstanty), vyhovuje rovnici $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$. Vyšetřete geometrické vlastnosti plochy (3).

3424. Funkce $z=z(x,y)$ je zadána rovností $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$. Dokažte, že $(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

3425. Funkce $z=z(x,y)$ je zadána rovností $F(x+yz^{-1},y+zx^{-1})=0$. Dokažte, že $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

3426. Dokažte, že funkce $z=z(x,y)$, definovaná soustavou rovnic

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha),\quad -x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha),$$

kde $\alpha=\alpha(x,y)$ je parametr a $f(\alpha)$ je libovolná diferencovatelná funkce, vyhovuje rovnici

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2.$$

3427. Dokažte, že funkce $z=z(x,y)$ zadaná soustavou rovnic $z=\alpha x+\frac{y}{\alpha}+f(\alpha)$, $0=x-\frac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha)$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

3428. Dokažte, že funkce $z=z(x,y)$ zadaná soustavou rovnic $[z-f(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2)$, $[z-f(\alpha)]f'(\alpha)=\alpha x^2$ vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

3429. Dokažte, že funkce $z=z(x,y)$ zadaná soustavou rovnic $z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha)$, $0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)$ vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

3430. Dokažte, že implicitní funkce $z=z(x,y)$, která je definována rovností $y=x\varphi(z)+\psi(z)$, vyhovuje rovnici $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

§ 4. Záměna proměnných

1. **ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH VE VÝRAZU OBSAHUJÍCÍM POUZE OBYČEJNÉ DERIVACE.** Ve výrazu s derivacemi $A=\Phi(x,y,y'_x,y''_{xx},\ldots)$ potřebujeme přejít k novým proměnným: nezávisle proměnné t a funkci u, které jsou svázány s proměnnými x a y vztahy

$$x=f(t,u),\quad y=g(t,u). \tag{1}$$

Derivováním vztahů (1) obdržíme

$$y'_x=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t}.$$

Analogicky lze vyjádřit vyšší derivace $y''_{xx},\ldots$ Opakováním tohoto postupu získáme

$$A=\Phi_1(t,u,u'_t,u''_{tt},\ldots).$$

2. **ZÁMĚNA NEZÁVISLE PROMĚNNÝCH VE VÝRAZU OBSAHUJÍCÍM PARCIÁLNÍ DERIVACE.** Jestliže ve výrazu s derivacemi

$$B=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots\right)$$

položíme

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v), \tag{2}$$

kde u a v jsou nové nezávisle proměnné, pak se parciální derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ určují pomocí vztahů

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}\ \text{atp.}$$

3. **ZÁMĚNA NEZÁVISLE PROMĚNNÝCH A FUNKCE VE VÝRAZU OBSAHUJÍCÍM PARCIÁLNÍ DERIVACE.** V obecnějším případě, máme-li vztahy

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w), \tag{3}$$

kde u, v jsou nové nezávisle proměnné a $w=w(u,v)$ je nová funkce, pak parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ splňují následující rovnosti:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\ \text{atp.}$$

V některých případech záměny proměnných je vhodné použít výraz pro totální diferenciál.

3431. Transformujte rovnici $y'y'''-3y''^2=x$ tím, že zvolíte y za novou nezávisle proměnnou.

3432. Tímtéž způsobem transformujte rovnici $y''^2y^{(4)}-10y'y''y'''+15y''^3=0$.

3433. Transformujte rovnici $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ tak, že budete považovat x za funkci a $t=xy$ za nezávisle proměnnou.

Zavedením nových proměnných transformujte následující obyčejné diferenciální rovnice:

3434. $x^2y''+xy'+y=0$, je-li $x=e^t$.

3435. $y'''=\frac{6y}{x^3}$, je-li $t=\ln|x|$.

3436. $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$, je-li $x=\cos t$.

3437. $y''+y'\operatorname{tgh}x+\frac{m^2}{\cosh^2 x}y=0$, je-li $x=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

3438. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, je-li $y=ue^{-1/2\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$, kde $p(x)\in C^{(1)}$.

3439. $x^4y''+xyy'-2y^2=0$, je-li $x=e^t$ a $y=ue^{2t}$, kde $u=u(t)$.

3440. $(1+x^2)^2y''=y$, je-li $x=\operatorname{tg}t$ a $y=\frac{u}{\cos t}$, kde $u=u(t)$.

3441. $(1-x^2)^2y''=-y$, je-li $x=\operatorname{tgh}t$ a $y=\frac{u}{\cosh t}$, kde $u=u(t)$.

3442. $y''+(x+y)(1+y')^3=0$, je-li $x=u+t$ a $y=u-t$, kde $u=u(t)$.

3443. $y'''-x^3y''+xy'-y=0$, je-li $x=\frac{1}{t}$ a $y=\frac{u}{t}$, kde $u=u(t)$.

3444. Transformujte *Stokesovu rovnici* $y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$ pomocí substituce $u=\frac{y}{x}$, $t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$ a zvolením u za funkci proměnné t.

3445. Ukažte, že transformujeme-li rovnici $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ pomocí substituce $x=\varphi(\xi)$ na rovnici $\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\frac{dy}{d\xi}+Q(\xi)y=0$, pak

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)]\,[Q(\xi)]^{-3/2}=[2p(x)q(x)+q'(x)]\;[q(x)]^{-3/2}.$$

3446. V rovnici $\Phi(y,y',y'')=0$, kde Φ je homogenní funkce proměnných y, y', y'', použijte substituci $y=e^{\int_{x_0}^{x}u\,dx}$.

3447. V rovnici $F(x^2y'',xy',y)=0$, kde F je homogenní funkce vzhledem ke všem svým argumentům, použijte substituci $u=x\frac{y'}{y}$.

3448. Dokažte, že rovnice $y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$ nezmění svůj tvar při kolineárním zobrazení daném vztahy $x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c}$, $y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c}$.

NÁVOD: Vyjádřete dané zobrazení ve formě lineární kombinace jednodušších zobrazení:

$$x=\alpha X+\beta Y+\gamma,\ y=Y;\ X=\frac{1}{X_1},\ Y=\frac{Y_1}{X_1}\ \text{a}\ X_1=a\xi+b\eta+c,\ Y_1=a_2\xi+b_2\eta+c_2.$$

3449. Dokažte, že *Schwarzovo zobrazení* $S[x(t)]=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$ nezmění hodnotu při lineární lomené transformaci svého argumentu $y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}$ $(ad-bc\neq 0)$.

Transformujte následující rovnice do polárních souřadnic r a φ pomocí substituce $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$:

3450. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

3451. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

3452. $(x^2+y^2)^2y''=(x+yy')^3$.

3453. Transformujte do polárních souřadnic výraz $\frac{x+yy'}{xy'-y}$.

3454. Křivost rovinné křivky $K=\frac{|y''_{xx}|}{\left(1+y'^2_x\right)^{3/2}}$ vyjádřete v polárních souřadnicích r a φ.

3455. Převeďte do polárních souřadnic soustavu rovnic

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2+y^2),\ \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2+y^2).$$

3456. Transformujte výraz $w = x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}$ zavedením nových funkcí $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3457. V *Legendreově transformaci* odpovídá každému bodu (x,y) křivky $y = y(x)$ bod (X,Y), kde $X = y'$, $Y = xy' - y$. Vypočtěte Y', Y'' a Y'''.

Zavedením nových nezávisle proměnných ξ a η řešte následující rovnice:

3458. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, je-li $\xi = x + y$ a $\eta = x - y$.

3459. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, je-li $\xi = x$ a $\eta = x^2 + y^2$.

3460. $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ $(a \neq 0)$, je-li $\xi = x$ a $\eta = y - bz$.

3461. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, je-li $\xi = x$ a $\eta = \dfrac{y}{x}$.

Zavedením nových nezávisle proměnných u a v transformujte následující rovnice:

3462. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$, je-li $u = \ln x$ a $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

3463. $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, je-li $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ a $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3464. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, je-li $u = \dfrac{y}{x}$ a $v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3465. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{z}$, je-li $u = 2x - z^2$ a $v = \dfrac{y}{z}$.

3466. $(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, je-li $u = x + z$ a $v = y + z$.

3467. Transformujte výraz $(z + e^x)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y)\dfrac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - e^{x+y})$ zavedením nových nezávisle proměnných $\xi = y + ze^{-x}$, $\eta = x + ze^{-y}$.

3468. Transformujte výraz $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ pomocí substitucí $x=uv$, $y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$.

3469. V rovnici $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$ položte $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$.

3470. Transformujte rovnici $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ tak, že zvolíte x za funkci a y a z za nezávisle proměnné.

3471. Transformujte rovnici $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$ tak, že zvolíte x za funkci a $u=y-z$, $v=y+z$ za nezávisle proměnné.

3472. Transformujte výraz $A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ tak, že zvolíte x za funkci a $u=xz$, $v=yz$ za nezávisle proměnné.

3473. V rovnici $(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$ položte $e^{\xi}=x-u$, $e^{\eta}=y-u$, $e^{\zeta}=z-u$.

Následující rovnice vyjádřete v proměnných u, v, w, kde $w=w(u,v)$:

3474. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$, je-li $u=x^2+y^2$, $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $w=\ln z-(x+y)$.

3475. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, je-li $u=x$, $v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$, $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$.

3476. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$, je-li $u=yz-x$, $v=xz-y$, $w=xy-z$.

3477. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$, je-li $x=ue^w$, $y=ve^w$, $z=we^w$.

3478. Transformujte výraz $(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ záměnou proměnných $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\frac{z}{x}$, $w=x+y+z$, kde $w=w(u,v)$.

3479. Transformujte výraz $A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}$ záměnou proměnných $u=xe^z$, $v=ye^z$, $w=ze^z$, kde $w=w(u,v)$.

3480. V rovnici $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$ položte $\xi=\frac{x}{z}$, $\eta=\frac{y}{z}$, $\zeta=z$, $w=\frac{u}{z}$, kde $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

Transformujte následující výrazy do polárních souřadnic r a φ pomocí substituce $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

3481. $w = x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

3482. $w = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3483. $w = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

3484. $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3485. $w = x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3486. $w = y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

3487. Ve výrazu $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ položte $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

3488. Řešte rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zavedením nových nezávisle proměnných $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

Zavedením nových nezávisle proměnných u a v transformujte následující rovnosti:

3489. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, je-li $u = x + 2y + 2$ a $v = x - y - 1$.

3490. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, je-li $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ a $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

3491. $ax^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + cy^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (a, b, c jsou konstanty), je-li $u = \ln x$ a $v = \ln y$.

3492. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, je-li $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ a $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

3493. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0$, je-li $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$.

3494. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $(y > 0)$, je-li $u = x - 2\sqrt{y}$ a $v = x + 2\sqrt{y}$.

3495. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, je-li $u = xy$ a $v = \dfrac{x}{y}$.

3496. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, je-li $u=x+y$ a $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

3497. $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, je-li $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ a $v=xy$.

3498. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, je-li $u=x\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ a $v=x$.

3499. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ $(x>0, y>0)$, je-li $x=(u+v)^2$ a $y=(u-v)^2$.

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$, je-li $u=x$ a $v=y+z$.

3501. Pomocí lineárního zobrazení $\xi=x+\lambda_1 y$, $\eta=x+\lambda_2 y$ transformujte rovnici

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

kde A, B a C jsou konstanty a $AC-B^2<0$, do tvaru $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

Najděte obecný tvar funkce, která vyhovuje rovnici (1).

3502. Dokažte, že se tvar Laplaceovy rovnice $\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ nezmění při libovolné nedegenerované substituci proměnných $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, která vyhovuje podmínkám $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$.

3503. Transformujte rovnice a) $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; b) $\Delta(\Delta u)=0$ pomocí substituce $u=f(r)$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

3504. Jaký tvar bude mít rovnice $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$, položíme-li $w=f(u)$, kde $u=(x-x_0)(y-y_0)$?

3505. Transformujte výraz $A=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}$ pomocí rovností $x+y=X$, $y=XY$.

3506. Ukažte, že rovnice $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0$ nezmění svůj tvar při záměně proměnných $x=uv$ a $y=\frac{1}{v}$.

3507. Ukažte, že rovnice $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ nezmění svůj tvar při záměně proměnných $u=x+z$ a $v=y+z$.

3508. Transformujte rovnici $xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0$ pomocí substituce $x=\eta\zeta$, $y=\zeta\xi$, $z=\xi\eta$.

3509. Transformujte rovnici $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}=0$ zavedením $y_1=x_2+x_3-x_1$, $y_2=x_1+x_3-x_2$, $y_3=x_1+x_2-x_3$.

3510. Transformujte rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$$

zavedením $\xi=\frac{y}{x}$, $\eta=\frac{z}{x}$, $\zeta=y-z$.

NÁVOD: Napište rovnici ve tvaru $A^2u-Au=0$, kde $A=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$.

3511. Výrazy $\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ a $\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ transformujte do sférických souřadnic pomocí substituce $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$.

NÁVOD: Záměnu proměnných proveďte postupně jako dvě částečné substituce $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$, $z=z$ a $R=r\sin\theta$, $\varphi=\varphi$, $z=r\cos\theta$.

3512. Zaveďte do rovnice $z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ novou funkci $w=z^2$.

Transformujte následující rovnice pomocí volby u a v za nové proměnné a $w=w(u,v)$ za novou funkci:

3513. $u\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$, je-li $u=\frac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$.

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, je-li $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, $w=\frac{z}{x}$.

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, je-li $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy-z$.

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$, je-li $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$, $w=ze^y$.

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, je-li $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$.

3518. $(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$, je-li $x = \sin u$, $y = \sin v$, $z = e^w$.

3519. $(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4}z = 0$ $(|x| < 1)$, je-li $u = \frac{1}{2}(y + \arccos x)$, $v = \frac{1}{2}(y - \arccos x)$, $w = z\sqrt[4]{1 - x^2}$.

3520. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\frac{x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^2}$ $(|x| > |y|)$, je-li $u = x + y$, $v = x - y$, $w = \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

3521. Dokažte, že každou rovnici $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$, kde a, b, c jsou konstanty, je možné záměnou proměnných $z = ue^{\alpha x + \beta y}$, kde α a β jsou konstanty a $u = u(x, y)$, převést na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0$, kde c_1 je konstanta.

3522. Dokažte, že rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ nezmění svůj tvar při záměně proměnných $x' = \frac{x}{y}$, $y' = -\frac{1}{y}$, $u' = \frac{u}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$, kde u' je funkce proměnných x' a y'.

3523. Proveďte v rovnici $q(1 + q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1 + p + q + 2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1 + p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, kde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ a $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, záměnu proměnných $u = x + z$, $v = y + z$, $w = x + y + z$, víte-li, že $w = w(u, v)$.

3524. Proveďte v rovnici $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ záměnu proměnných $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, $z = e^\zeta$, $u = e^w$, kde $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

3525. Ukažte, že se tvar rovnice $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$ nezmění při žádné vzájemné záměně proměnných x, y a z.

3526. Považujte x za funkci proměnných y a z a řešte rovnici

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3527. Transformujte rovnici

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

užitím *Legendreovy transformace* $X = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial z}{\partial y}$, $Z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z$, kde $Z = Z(X, Y)$.

§ 5. Geometrické aplikace

1. **TEČNA A NORMÁLOVÁ ROVINA.** Rovnice *tečny* ke křivce $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ v bodě (x, y, z) má tvar $\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}$. Rovnice *normálové roviny* v tomto bodě je

$$\frac{dx}{dt}(X-x) + \frac{dy}{dt}(Y-y) + \frac{dz}{ds}(Z-z) = 0.$$

2. **TEČNÁ ROVINA A NORMÁLA.** Rovnice *tečné roviny* k ploše $z = f(x, y)$ v jejím bodě (x, y, z) má tvar $Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)$. Rovnice *normály* v tomto bodě je $\frac{X-x}{\frac{dz}{dx}} = \frac{Y-y}{\frac{dz}{dy}} = \frac{Z-z}{-1}$.

Je-li plocha zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$, pak je rovnice její tečné roviny $\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0$ a rovnice její normály je $\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

3. **OBALOVÁ KŘIVKA PARAMETRICKÉ SOUSTAVY ROVINNÝCH KŘIVEK.** *Obalová křivka* jednoparametrické soustavy křivek $f(x, y, \alpha) = 0$, kde α je parametr, vyhovuje soustavě rovnic $f(x, y, \alpha) = 0$, $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$.

4. **OBALOVÁ PLOCHA PARAMETRICKÉ SOUSTAVY PLOCH.** *Obalová plocha* jednoparametrické soustavy ploch $F(x, y, z, \alpha) = 0$ vyhovuje soustavě rovnic $F(x, y, z, \alpha) = 0$, $F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$.

V případě dvojparametrické soustavy ploch $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ jejich obalová plocha splňuje rovnice $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, $\Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, $\Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$.

Napište rovnice tečen a normálových rovin k následujícím křivkám v daných bodech:

3528. $x=a\cos\alpha\cos t$, $y=a\sin\alpha\cos t$, $z=a\sin t$ v bodě $t=t_0$.

3529. $x=a\sin^2 t$, $y=b\sin t\cos t$, $z=c\cos^2 t$ v bodě $t=\frac{\pi}{4}$.

3530. $y=x$, $z=x^2$ v bodě $(1,1,1)$.

3531. $x^2+z^2=10$, $y^2+z^2=10$ v bodě $(1,1,3)$.

3532. $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$ v bodě $(1,-2,1)$.

3533. Najděte na křivce $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ takový bod, aby tečna, která jím prochází, byla rovnoběžná s rovinou $x+2y+z=4$.

3534. Dokažte, že tečna k šroubovici $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ svírá s osou z úhel konstantní velikosti.

3535. Dokažte, že křivka $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$ protíná všechny přímky vytvářející kuželovou plochu $x^2+y^2=z^2$ pod stejným úhlem.

3536. Dokažte, že loxodroma

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}\ (k \text{ je konstanta}),$$

kde φ je úhlová délka a ψ je úhlová šířka pozice bodu na kulové ploše, protíná všechny její poledníky pod konstantním úhlem.

3537. Vypočtěte tangens úhlu, který svírá tečna v bodě (x_0,y_0) ke křivce $z=f(x,y)$, $\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$, kde f je diferencovatelná funkce, s rovinou xy.

3538. Vypočtěte derivaci funkce $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ v bodě $(1,2,-2)$ ve směru tečny v tomto bodě ke křivce $x=t$, $y=2t^2$, $z=-2t^4$.

Najděte rovnice tečné roviny a normály k následujícím plochám v daných bodech:

3539. $z=x^2+y^2$ v bodě $(1,2,5)$.

3540. $x^2+y^2+z^2=169$ v bodě $(3,4,12)$.

3541. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ v bodě $(1,1,\frac{\pi}{4})$.

3542. $ax^2+by^2+cz^2=1$ v bodě (x_0,y_0,z_0).

3543. $z=y+\ln\frac{x}{z}$ v bodě $(1,1,1)$.

3544. $2^{x/z}+2^{y/z}=8$ v bodě $(2,2,1)$.

3545. $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$ v bodě (φ_0,ψ_0).

3546. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r\operatorname{cotg}\alpha$ v bodě (φ_0,r_0).

3547. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$ v bodě (u_0,v_0).

3548. Najděte limitní polohu tečné roviny k ploše $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$, jestliže bod dotyku (u,v) $(u\neq v)$ neomezeně přibližuje k bodu (u_0,u_0) mezní křivky $u=v$ této plochy.

3549. Najděte na ploše $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ body, ve kterých jsou tečné roviny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami.

3550. V jakém bodě elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ svírá jeho normála stejné úhly se všemi souřadnicovými osami?

3551. Sestrojte tečné roviny k ploše $x^2+2y^2+3z^2=21$, které jsou rovnoběžné s rovinou $x+4y+6z=0$.

3552. Dokažte, že tečné roviny plochy $xyz=a^3$ $(a>0)$ vytvářejí se souřadnicovými rovinami čtyřstěn konstantního objemu.

3553. Dokažte, že tečné roviny plochy $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ vytínají na souřadnicových osách úsečky s konstantním součtem délek.

3554. Dokažte, že tečné roviny kužele $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ procházejí jeho vrcholem.

3555. Dokažte, že normály k rotační ploše $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ $(f'\neq 0)$ protínají osu její rotace.

3556. Najděte průměty elipsoidu $x^2+y^2+z^2-xy=1$ do souřadnicových rovin.

3557. Čtverec $\{0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ je rozdělen na konečný počet částí o průměru $\leq\delta$. Odhadněte shora číslo δ, liší-li se směry normál k ploše $z=1-x^2-y^2$ v libovolných bodech (x,y) a (x_1,y_1) téže části o méně než $1°$.

3558. Nechť

$$z=f(x,y),\ \text{kde}\ (x,y)\in D, \tag{1}$$

je rovnice plochy a $\varphi(P_1,P)$ je úhel mezi normálami k ploše (1) v bodech $P=(x,y)\in D$ a $P_1=(x_1,y_1)\in D$. Dokažte, že jestliže je množina D omezená a uzavřená a funkce $f(x,y)$ má omezené derivace druhého řádu na D, pak platí *Ljapunovova nerovnost*

$$\varphi(P_1,P)<C\varrho(P_1,P), \tag{2}$$

kde C je konstanta a $\varrho(P_1,P)$ je vzdálenost mezi body P a P_1.

3559. Pod jakým úhlem protíná válcový plášť $x^2+y^2=a^2$ plochu $bz=xy$ ve společném bodě (x_0,y_0,z_0)?

3560. Dokažte, že souřadnicové plochy sférických souřadnic $x^2+y^2+z^2=r^2$, $y=x\operatorname{tg}\varphi$, $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\theta$ jsou všechny navzájem kolmé.

3561. Dokažte, že sféry $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2+z^2=2by$, $x^2+y^2+z^2=2cz$ tvoří ortogonální systém.

3562. Každým bodem (x,y,z) procházejí pro $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$ tři plochy druhého řádu tvaru $\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=-1$ $(a>b>c>0)$. Dokažte ortogonalitu těchto ploch.

3563. Najděte derivaci funkce $u=x+y+z$ ve směru vnější normály ke sféře $x^2+y^2+z^2=1$ v jejím bodě (x_0,y_0,z_0). V jakých bodech této sféry derivace funkce u ve směru normály nabývá: a) svého maxima; b) svého minima; c) hodnoty 0?

3564. Najděte derivaci funkce $u=x^2+y^2+z^2$ ve směru vnější normály elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ v jeho bodě (x_0,y_0,z_0).

3565. Nechť $\frac{\partial u}{\partial n}$ a $\frac{\partial v}{\partial n}$ jsou normálové derivace funkcí u a v v bodě plochy $F(x,y,z)=0$. Dokažte, že $\frac{\partial}{\partial n}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}$.

Najděte obalové křivky následujících jednoparametrických soustav rovinných křivek:

3566. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, kde p je konstanta.

3567. $(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.

3568. $y=kx+\frac{a}{k}$, kde a je konstanta.

3569. $y^2=2px+p^2$.

3570. Najděte křivku vytvářenou úsečkou délky l, jejíž konce kloužou po osách souřadnic.

3571. Najděte obalovou křivku elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, které mají konstantní obsah S.

3572. Najděte obalovou křivku trajektorií náboje, který byl vystřelen ve vakuu s počáteční rychlostí v_0, pro různé úhly výstřelu α měřené ve svislé rovině.

3573. Dokažte, že obalová křivka normál rovinné křivky je evolutou této křivky.

3574. Vyšetřete charakter diskriminantních křivek následujících soustav křivek, kde c je parametr: a) kubických parabol $y=(x-c)^3$; b) semikubických parabol $y^2=(x-c)^3$; c) parabol tvaru $y^3=(x-c)^2$; d) strofoid $(y-c)^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$.

3575. Najděte obalovou plochu množiny sfér o poloměru r, jejichž středy jsou umístěny na kružnici $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=0$, kde t je parametr a $R>r$.

3576. Najděte obalovou plochu množiny sfér

$$(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2=1,$$

kde $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ a t je parametr.

3577. Najděte obalovou plochu množiny elipsoidů

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ s konstantním objemem } V.$$

3578. Najděte obalovou plochu množiny sfér o poloměru ϱ, jejichž středy jsou umístěny na povrchu kužele $x^2+y^2=z^2$.

3579. Bodový zdroj světla je umístěn v počátku souřadnic. Určete stínový kužel vržený koulí $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le R^2$, je-li $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$.

3580. Najděte obalovou plochu soustavy rovin $z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0)$, splňují-li parametry p a q rovnost $p^2+q^2=1$.

§ 6. Taylorův vzorec

1. TAYLORŮV VZOREC. Má-li funkce $f(x,y)$ v nějakém okolí bodu (a,b) spojité všechny parciální derivace do řádu $n+1$ včetně, pak v tomto okolí platí vztah

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i f(a,b)+R_n(x,y), \tag{1}$$

kde

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(a+\theta_n(x-a),b+\theta_n(y-b))\ (0<\theta_n<1).$$

2. TAYLOROVA ŘADA. Má-li funkce $f(x,y)$ derivace všech řádů a je-li $\lim_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$, pak lze tuto funkci rozvinout do mocninné řady

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\ge1}^{\infty}\frac{1}{i!j!}f_{x^iy^j}^{(i+j)}(a,b)(x-a)^i(y-b)^j. \tag{2}$$

Speciální případy vztahů (1) a (2) pro $a=b=0$ se po řadě nazývají *Maclaurinův vzorec* a *Maclaurinova řada*. Podobné vztahy platí pro funkce tří a více proměnných.

3. SINGULÁRNÍ BODY ROVINNÝCH KŘIVEK. Bod $M_0=(x_0,y_0)$ diferencovatelné křivky $F(x,y)=0$ se nazývá *singulárním bodem*, platí-li

$$F(x_0,y_0)=0,\ F_x'(x_0,y_0)=0,\ F_y'(x_0,y_0)=0.$$

Nechť $M_0=(x_0,y_0)$ je singulární bod křivky třídy $C^{(2)}$ a nechť čísla $A=F_{xx}''(x_0,y_0)$, $B=F_{xy}''(x_0,y_0)$, $C=F_{yy}''(x_0,y_0)$ nejsou všechna rovna nule. Pak, je-li

1) $AC-B^2>0$, je M_0 *izolovaný bod*;

2) $AC-B^2<0$, je M_0 *uzel*;

3) $AC-B^2=0$, je M_0 *bod vratu* nebo *hrot*.

V případě $A=B=C=0$ jsou možné složitější typy singulárních bodů. Pro křivky, které nepatří do třídy $C^{(2)}$, mohou mít singularity také složitější charakter: *koncové body*, *úhlové body* a podobně.

3581. Rozviňte funkci $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ podle Taylorova vzorce v okolí bodu $(1,-2)$.

3582. Rozviňte funkci $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ podle Taylorova vzorce v okolí bodu $(1,1,1)$.

3583. Najděte přírůstek funkce $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$, který se získá přechodem od bodu $x=1$, $y=-1$ k bodu $x_1=1+h$, $y_1=-1+k$.

3584. Rozviňte funkci $f(x+h,y+k,z+l)$ v přirozených mocninách veličin h, k a l, je-li

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz.$$

3585. Najděte členy rozvoje funkce $f(x,y)=x^y$ v okolí bodu $(1,1)$ do druhého řádu včetně.

3586. Rozviňte podle Maclaurinova vzorce do členů čtvrtého řádu včetně funkci

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

3587. Odvoďte Taylorovy vzorce druhého řádu pro následující výrazy:

a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$; b) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$, jsou-li $|x|$ a $|y|$ malé v porovnání s číslem 1.

3588. Zjednodušte výraz $\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$ za předpokladu, že absolutní hodnoty čísel x,y,z jsou malé.

3589. Rozviňte funkci $F(x,y)=\dfrac{1}{4}[f(x+h,y)+f(x,y+h)+f(x-h,y)+f(x,y-h)]-f(x,y)$ v mocninách h s přesností na h^4.

3590. Nechť $f(P)=f(x,y)$ a $P_i=(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka vepsaného do kružnice se středem v bodě $P=(x,y)$ o poloměru ϱ, přičemž $x_1=x+\varrho$, $y_1=y$. Rozviňte v přirozených mocninách ϱ s přesností na ϱ^2 funkci

$$F(\varrho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)].$$

3591. Rozviňte v mocninách h a k funkci

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y).$$

3592. Rozviňte v mocninách ϱ funkci $F(\varrho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\varrho\cos\varphi, y+\varrho\sin\varphi)\,d\varphi$.

Rozviňte do Maclaurinovy řady následující funkce:

3593. $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

3594. $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

3595. $f(x,y)=e^x\sin y$.

3596. $f(x,y)=e^x\cos y$.

3597. $f(x,y)=\sin x\sinh y$.

3598. $f(x,y)=\cos x\cosh y$.

3599. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

3600. $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$.

3601. Najděte první tři členy rozvoje funkce $f(x,y)=\int_0^1 (1+x)^{t^2 y}\,dt$ do Maclaurinovy řady.

3602. Rozviňte funkci e^{x+y} do mocninné řady v přirozených mocninách dvojčlenů $x-1$ a $y+1$.

3603. Najděte rozvoj funkce $f(x,y)=\frac{x}{y}$ do Taylorovy řady v okolí bodu $(1,1)$.

3604. Nechť z je implicitní funkce proměnných x a y daná rovností $z^3-2xz+y=0$, která má pro $x=1$ a $y=1$ hodnotu $z=1$. Najděte několik prvních členů rozvoje funkce z v rostoucích mocninách dvojčlenů $x-1$ a $y-1$.

Vyšetřete typy singulárních bodů následujících křivek a načrtněte jejich grafy:

3605. $y^2=ax^2+x^3$.

3606. $x^3+y^3-3xy=0$.

3607. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

3608. $x^2+y^4=x^6$.

3609. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3610. $(y-x^2)^2=x^5$.

3611. $(a+x)y^2=(a-x)x^2$.

3612. Vyšetřete typ křivky $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ v závislosti na hodnotách parametrů a, b, c $(a\le b\le c)$.

Vyšetřete singulární body následujících transcendentních křivek:

3613. $y^2=1-e^{-x^2}$.

3614. $y^2=1-e^{-x^3}$.

3615. $y=x\ln x$.

3616. $y=\frac{x}{1+e^{1/x}}$.

3617. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.

3618. $y^2=\sin\frac{\pi}{x}$.

3619. $y^2=\sin x^2$.

3620. $y^2=\sin^3 x$.

§ 7. Extrémy funkcí více proměnných

1. **URČENÍ EXTRÉMU.** Nechť je funkce $f(P)=f(x_1,...,x_n)$ definována v okolí bodu P_0. Jestliže buď $f(P_0)>f(P)$, nebo $f(P_0)<f(P)$ pro $0<\varrho(P_0,P)<\delta$, pak říkáme, že funkce $f(P)$ má ostrý *extrém* (*maximum*, respektive *minimum*) v bodě P_0.

2. **NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE EXTRÉMU.** Diferencovatelná funkce $f(P)$ může nabývat svého extrému pouze ve *stacionárním bodě* P_0, tj. v takovém bodě, ve kterém $df(P_0)=0$. Pak body extrémů funkce $f(P)$ vyhovují soustavě rovnic $f'_{x_i}(x_1,...,x_n)=0 \ \ (i=1,...,n)$.

3. **POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE EXTRÉMU.** Funkce $f(P)$ má v bodě P_0 a) *maximum*, je-li $df(P_0)=0$, $d^2f(P_0)<0$ a $\sum_{i=1}^{n}|dx_i|\neq 0$ a b) *minimum*, je-li $df(P_0)=0$, $d^2f(P_0)>0$ a $\sum_{i=1}^{n}|dx_i|\neq 0$.

Vyšetření znaménka diferenciálu druhého řádu $d^2f(P_0)$ lze provést převedením odpovídající kvadratické formy do kanonického tvaru.

Speciálně v případě funkce $f(x,y)$ dvou nezávisle proměnných x a y v stacionárním bodě (x_0,y_0) $(df(x_0,y_0)=0)$ za podmínky $D=AC-B^2\neq 0$, kde $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, dostaneme:

1) *minimum*, pokud $D>0$, $A>0$ $(C>0)$;

2) *maximum*, pokud $D>0$, $A<0$ $(C<0)$;

3) *extrém neexistuje*, pokud $D<0$.

4. **VÁZANÝ EXTRÉM.** Úloha nalezení extrému funkce $f(P)=f(x_1,...,x_n)$, který vyhovuje podmínkám $\phi_i(P)=0 \ \ (i=1,...,m;\ m<n)$, vede k hledání extrému *Lagrangeovy funkce* $L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\phi_i(P)$, kde λ_i $(i=1,...,m)$ jsou konstanty – tzv. *Lagrangeovy multiplikátory*. Otázka existence a charakteru vázaného extrému se v nejjednodušším případě rozhoduje vyšetřováním znaménka diferenciálu druhého řádu $d^2L(P_0)$ ve stacionárním bodě P_0 funkce $L(P)$ za podmínky, že proměnné $dx_1,...,dx_n$ jsou vázány vztahy

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}dx_j=0 \ \ (i=1,...,m).$$

5. **GLOBÁLNÍ EXTRÉM.** Funkce $f(P)$, která je diferencovatelná na omezené a uzavřené množině, v ní nabývá svých maximálních a minimálních hodnot buď ve stacionárním bodě, nebo v hraničním bodě této množiny.

Vyšetřete extrémy následujících funkcí více proměnných:

3621. $z = x^2 + (y-1)^2$.

3622. $z = x^2 - (y-1)^2$.

3623. $z = (x-y+1)^2$.

3624. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

3625. $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$.

3626. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

3627. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

3627.1 $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $(x > 0, y > 0)$.

3629. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $(a > 0, b > 0)$.

3630. $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

3631. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

3632. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

3633. $z = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$.

3634. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}$.

3635. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

3636. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ $(0 \le x \le \pi/2;\ 0 \le y \le \pi/2)$.

3637. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$ $(0 \le x \le \pi;\ 0 \le y \le \pi)$.

3638. $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3639. $z = xy\ln(x^2 + y^2)$.

3640. $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

3641. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

3642. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

3643. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

3644. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

3645. $u = xy^2 z^3 (a - x - 2y - 3z)$ $(a > 0)$.

3646. $u = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{b}$ $(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0)$.

3647. $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$ $(0 \le x \le \pi;\ 0 \le y \le \pi;\ 0 \le z \le \pi)$.

3648. $u = x_1 x_2^2 \dots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \dots - nx_n)$ $(x_1 > 0,\ x_2 > 0, \dots, x_n > 0)$.

3649. $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$ $(x_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n)$.

3650. *Huygensova úloha.* Vložte mezi dvě kladná čísla a a b n čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak, aby hodnota zlomku $u = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)\dots(x_n + b)}$ byla maximální.

Najděte extremální hodnoty následujících implicitních funkcí z proměnných x a y:

3651. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

Najděte body, ve kterých mají následující funkce vázaný extrém:

3654. $z=xy$, je-li $x+y=1$.

3655. $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, je-li $x^2+y^2=1$.

3656. $z=x^2+y^2$, je-li $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3657. $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, je-li $x^2+y^2=1$.

3657.1 $z=x^2+12xy+2y^2$, je-li $4x^2+y^2=25$.

3658. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, je-li $x-y=\frac{\pi}{4}$.

3659. $u=x-2y+2z$, je-li $x^2+y^2+z^2=1$.

3660. $u=x^m y^n z^p$, je-li $x+y+z=a$ $(m>0,n>0,p>0,a>0)$.

3661. $u=x^2+y^2+z^2$, je-li $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$.

3662. $u=xy^2z^3$, je-li $x+2y+3z=a$ $(x>0,y>0,z>0)$.

3663. $u=xyz$, je-li $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

3663.1 $u=xy+yz$, je-li $x^2+y^2=2$, $y+z=2$ $(x>0,y>0,z>0)$.

3664. $u=\sin x\sin y\sin z$, je-li $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ $(x>0,y>0,z>0)$.

3665. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, je-li $x^2+y^2+z^2=1$, $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$

$(a>b>c>0,\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

3666. $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, je-li $Ax+By+Cz=0$, $x^2+y^2+z^2=R^2$,

$\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma}$, kde $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3667. $u=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, je-li $\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0;\ i=1,2,\ldots,n)$.

3668. $u=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p$ $(p>1)$, je-li $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ $(a>0)$.

3669. $u=\dfrac{\alpha_1}{x_1}+\dfrac{\alpha_2}{x_2}+\ldots+\dfrac{\alpha_n}{x_n}$, je-li $\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\ldots+\beta_n x_n=1$ $(\alpha_i>0,\ \beta_i>0,\ x_i>0;\ i=1,2,\ldots,n)$.

3670. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, je-li $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ $(a>0,\alpha_i>1;\ i=1,2,\ldots,n)$.

3671. Najděte extrém kvadratické formy $u=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ za podmínky $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$.

3672. Dokažte nerovnost $\dfrac{x^n+y^n}{2}\geq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$, je-li $n\geq 1$ a $x\geq 0,\ y\geq 0$.

NÁVOD: Najděte minimum funkce $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ za podmínky $x+y=s$.

3673. Dokažte *Hölderovu nerovnost* $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{1/k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{1/k'}$ $\left(a_i\geq 0,x_i\geq 0;i=1,2,\ldots,n;k>1,\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k'}=1\right)$.

NÁVOD: Najděte minimum funkce $u=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{1/k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{1/k'}$ za podmínky $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=A$.

3674. Dokažte *Hadamardovu nerovnost* pro determinant $A=|a_{ij}|$ řádu n:

$$A^2\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\right).$$

NÁVOD: Vyšetřete extrém determinantu $A=|a_{ij}|$ za podmínek $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=S_i$ $(i=1,2,..,n)$.

Určete maximální a minimální hodnoty (suprema a infima) následujících funkcí na zadaných množinách:

3675. $z=x-2y-3$, je-li $0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x+y\leq 1$.

3676. $z=x^2+y^2-12x+16y$, je-li $x^2+y^2\leq 25$.

3677. $z=x^2-xy+y^2$, je-li $|x|+|y|\leq 1$.

3678. $u=x^2+2y^2+3z^2$, je-li $x^2+y^2+z^2\leq 100$.

3679. $u=x+y+z$, je-li $x^2+y^2\leq z\leq 1$.

3680. Najděte dolní hranici (infimum) a horní hranici (supremum) funkce $u=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$ na množině dané nerovnostmi $x>0,\ y>0,\ z>0$.

3681. Dokažte, že funkce $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ nabývá maximální hodnoty v nekonečně mnoha bodech a nenabývá žádné minimální hodnoty.

3682. Je postačující podmínkou existence minima funkce $f(x,y)$ v bodě $M_0 = (x_0, y_0)$ existence minima na každé přímce procházející bodem M_0? Uvažujte případ $f(x,y) = (x - y^2)(2x - y^2)$.

3683. Dané kladné číslo a rozložte na n kladných součinitelů tak, aby součet jejich inverzních hodnot byl minimální.

3684. Dané kladné číslo a rozložte na n sčítanců tak, aby součet jejich druhých mocnin byl minimální.

3685. Dané kladné číslo a rozložte na n kladných součinitelů tak, aby součet jejich daných kladných mocnin byl minimální.

3686. V rovině je dán systém n hmotných bodů $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2), \ldots,$ $P_n = (x_n, y_n)$ o hmotnostech rovných $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Při jaké pozici bodu (x,y) bude moment setrvačnosti systému $P_1, \ldots, P_n$ vzhledem k tomuto bodu minimální?

3687. Při jakých rozměrech bude mít otevřená nádoba tvaru kvádru daného objemu V minimální povrch?

3688. Při jakých rozměrech bude mít otevřená válcová vana s půlkruhovým průřezem, jejíž povrch je S, maximální objem?

3689. Najděte na sféře $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bod, pro který bude součet druhých mocnin jeho vzdáleností od daných bodů $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ minimální.

3690. Těleso se skládá z rotačního válce zakončeného rotačním kuželem. Určete jeho rozměry, víte-li, že jeho povrch je Q a jeho objem je za této podmínky maximální.

3691. Těleso složené z kvádru, jehož obě podstavy jsou zakončeny stejnými pravidelnými čtyřbokými pyramidami, má objem V. Pro jaký úhel sklonu bočních hran pyramid vzhledem k jejich podstavám bude povrch celého tělesa minimální?

3692. Najděte obdélník s daným obvodem $2p$, který vytvoří rotací kolem jedné ze svých stran těleso s maximálním objemem.

3693. Najděte trojúhelník s daným obvodem $2p$, který vytvoří rotací kolem jedné ze svých stran těleso s maximálním objemem.

3694. Do polokoule o poloměru R vepište kvádr maximálního objemu.

3695. Do daného rotačního kužele vepište kvádr maximálního objemu.

3696. Do elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ vepište kvádr maximálního objemu.

3697. Do rotačního kužele, jehož plášť o výšce l svírá s podstavou úhel α, vepište kvádr o maximálním povrchu.

3698. Do úseče eliptického paraboloidu $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z=c$, vepište kvádr maximálního objemu.

3699. Vypočtěte vzdálenost bodu (x_0,y_0,z_0) od roviny $Ax+By+Cz+D=0$.

3700. Vypočtěte vzdálenost d přímek $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ a $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ v prostoru.

3701. Vypočtěte vzdálenost mezi parabolou $y=x^2$ a přímkou $x-y-2=0$.

3702. Najděte poloosy křivky druhého řádu bez lineárních členů

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1.$$

3703. Najděte poloosy plochy druhého řádu bez lineárních členů

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1.$$

3704. Určete obsah vnitřku elipsy získané protnutím válcové plochy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ rovinou $Ax+By+Cz=0$.

3705. Určete obsah řezu elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ rovinou $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$, kde $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3706. Podle Fermatova principu se světlo vycházející z bodu A do bodu B šíří po takové křivce, po které projde za minimální čas. Předpokládejte, že body A a B jsou umístěny v opticky různých prostředích oddělených rovinou. Odvoďte zákon lomu světla, víte-li, že rychlost šíření světla v prvním prostředí je v_1 a rychlost šíření světla v druhém prostředí je v_2.

3707. Pro jaký úhel dopadu je odklon světelného paprsku (tj. úhel mezi dopadajícím a vycházejícím paprskem), který prochází optickým hranolem s úhlem lomu α a indexem lomu n, minimální? Určete tento minimální úhel.

3708. Proměnné veličiny x a y vyhovují lineární rovnici $y=ax+b$, jejíž koeficienty je třeba určit. Výsledkem řady měření se stejnou přesností se získají pro proměnné x a y hodnoty x_i, y_i $(i=1,2,\ldots,n)$. Určete nejpravděpodobnější hodnoty koeficientů a a b metodou nejmenších čtverců.

NÁVOD: Podle metody nejmenších čtverců jsou nejpravděpodobnějšími hodnotami koeficientů a a b takové, pro které je součet druhých mocnin chyb $\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ minimální.

3709. V rovině je dán systém n bodů $M_i=(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Pro jakou polohu přímky $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ je součet druhých mocnin vzdáleností bodů M_i od této přímky minimální?

3710. Funkci x^2 aproximujte na intervalu $(1,3)$ lineární funkcí $ax+b$ tak, aby absolutní chyba $\Delta=\sup|x^2-(ax+b)|$ $(1\le x\le 3)$ byla minimální.

KAPITOLA VII

Integrály závislé na parametru

§ 1. Určité integrály závislé na parametru

1. **VĚTA O SPOJITOSTI INTEGRÁLU.** Jestliže je funkce $f(x,y)$ definovaná a spojitá na omezené množině $R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le A, b\le y\le B\}$, pak je funkce $F(y)=\int_a^A f(x,y)\,dx$ spojitá na uzavřeném intervalu $b\le y\le B$.

2. **VĚTA O ZÁMĚNĚ DERIVACE A INTEGRÁLU.** Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty a je-li navíc parciální derivace $f'_y(x,y)$ spojitá na množině R, pak pro $b<y<B$ platí *Leibnizův vzorec*

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x,y)\,dx=\int_a^A f'_y(x,y)\,dx.$$

V obecnějším případě, jsou-li $\phi(y)$ a $\psi(y)$ diferencovatelné funkce parametru y, přičemž $a<\phi(y)<A$, $a<\psi(y)<A$ pro $b<y<B$, pak platí

$$\frac{d}{dy}\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx=f(\psi(y),y)\psi'(y)-f(\phi(y),y)\phi'(y)+\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx.$$

3. **VĚTA O ZÁMĚNĚ POŘADÍ INTEGRACE.** Za stejných předpokladů jako v první větě platí následující rovnost:

$$\int_b^B dy\int_a^A f(x,y)\,dx=\int_a^A dx\int_b^B f(x,y)\,dy.$$

3711. Dokažte, že integrál $F(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$ nespojité funkce $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ je spojitou funkcí. Sestrojte graf funkce $u=F(y)$.

3712. Vyšetřete spojitost funkce $F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx$, kde $f(x)$ je spojitá a kladná funkce na uzavřeném intervalu $[0,1]$.

3713. Najděte následující limity:

a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;

b) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$;

c) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

3713.1 Vypočtěte $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta$.

3714. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[A,B]$. Dokažte, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = f(x)-f(a)\quad (A<a<x<B).$$

3714.1 Nechť jsou splněny následující podmínky: 1) $\varphi_n(x)\geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$ na intervalu $[-1,1]$; 2) $\varphi_n(x)\to 0$ pro $n\to\infty$ na $0<\varepsilon\leq|x|\leq 1$; 3) $\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)dx\to 1$ pro $n\to\infty$. Dokažte, že jestliže $f(x)\in C[-1,1]$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)dx = f(0)$.

3715. Lze provést limitní přechod v argumentu integrálu ve výrazu

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}dx?$$

3716. Lze pomocí Leibnizova vzorce derivovat funkci $F(y)=\int\limits_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ v bodě $y=0$?

3717. Vypočtěte $F'(x)$, je-li $F(x)=\int\limits_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$.

3718. Vypočtěte derivace $F'(\alpha)$ následujících funkcí:

a) $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$; b) $F(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$; c) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$;

d) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)dx$; e) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha^2}dx\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy$.

3719. Vypočtěte $F''(\alpha)$, je-li $F(x)=\int\limits_0^x (x+y)f(y)dy$, kde $f(x)$ je diferencovatelná funkce.

3720. Vypočtěte $F''(x)$, je-li $F(x)=\int\limits_a^b f(y)\,|x-y|\,dy$, kde $a<b$ a $f(y)$ je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$.

3721. Vypočtěte $F''(x)$, je-li $F(x)=\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi\int\limits_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta$ $(h>0)$, kde $f(x)$ je spojitá funkce.

3722. Vypočtěte $F^{(n)}(x)$, je-li $F(x)=\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt$.

3722.1 Dokažte, že platí

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n \cos\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) dy \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Pomocí vztahu (1) odvoďte následující odhad:

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \le \frac{1}{n+1} \text{ pro } x \in (-\infty, +\infty).$$

3723. Aproximujte funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $1 \le x \le 3$ lineární funkcí tvaru $a + bx$ tak, aby byl $\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx$ minimální.

3724. Odvoďte přibližný vztah tvaru $\sqrt{1 + x^2} \approx a + bx$ $(0 \le x \le 1)$ z podmínky, že střední kvadratický rozdíl funkcí $a + bx$ a $\sqrt{1 + x^2}$ na daném intervalu $[0, 1]$ je minimální.

3725. Vyjádřete derivace *úplných eliptických integrálů* $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$ a $F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ $(0 < k < 1)$ pomocí funkcí $E(k)$ a $F(k)$. Dokažte, že funkce $E(k)$ je řešením diferenciální rovnice

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0.$$

3726. Dokažte, že *Besselova funkce celočíselného indexu n*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

je řešením *Besselovy rovnice* $x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0$.

3727. Nechť $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{\alpha - x}}$, kde $\varphi(x)$ a $\varphi'(x)$ jsou spojité funkce na uzavřeném intervalu $0 \le x \le a$. Dokažte, že pro $0 < \alpha < a$ platí $I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\alpha} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}} dx$.

NÁVOD: Užijte substituci $x = \alpha t$.

3728. Dokažte, že funkce $u(x) = \int_0^1 K(x, y) v(y) dy$, kde $K(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) \text{ pro } x \le y, \\ y(1 - x) \text{ pro } x > y \end{cases}$ a $v(y)$ je spojitá funkce, je řešením rovnice $u''(x) = -v(x)$ $(0 \le x \le 1)$.

3729. Vypočtěte $F''_{xy}(x,y)$, je-li $F(x,y)=\int_{x/y}^{xy}(x-yz)f(z)dz$, kde $f(z)$ je diferencovatelná funkce.

3730. Nechť $f(x)$ je dvakrát diferencovatelná funkce a $F(x)$ je diferencovatelná funkce. Dokažte, že funkce $u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$ je řešením *vlnové rovnice* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s počátečními podmínkami $u(x,0)=f(x)$ a $u'_t(x,0)=F(x)$.

3731. Dokažte, že jestliže je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[0,l]$ a $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$ pro $0\le\xi\le l$, pak je funkce

$$u(x,y,z)=\int_0^l\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

řešením *Laplaceovy rovnice* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

Derivováním podle parametru vypočtěte následující integrály:

3732. $\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$.

3733. $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$.

3734. $\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$.

3735. $\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$.

3736. Pomocí vztahu $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}$ vypočtěte integrál $\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3737. Pomocí věty o záměně pořadí integrace vypočtěte integrál

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (a>0,b>0).$$

3738. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$; b) $\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ $(a>0,b>0)$.

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULTY
Matematické oddělení
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

3739. Nechť $E(k)$ a $F(k)$ jsou úplné eliptické integrály (viz úloha **3725**). Dokažte následující vztahy:

a) $\int_0^k F(k)k\,dk = E(k) - k_1^2 F(k)$; b) $\int_0^k E(k)k\,dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)]$,

kde $k_1^2 = 1 - k^2$.

3740. Dokažte vztah $\int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)$, kde $J_0(x)$ a $J_1(x)$ jsou Besselovy funkce indexu 0 a 1 (viz úloha **3726**).

§ 2. Neurčité integrály závislé na parametru. Stejnoměrná konvergence integrálů

1. **DEFINICE STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE.** Konvergentní nevlastní integrál

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

kde funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $a \le x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$, nazýváme *stejnoměrně konvergentním* na intervalu (y_1, y_2), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $B = B(\varepsilon)$ tak, že pro každé $b \ge B$ platí

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

Stejnoměrná konvergence integrálu (1) je ekvivalentní stejnoměrné konvergenci všech řad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)\,dx, \tag{2}$$

kde $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Jestliže integrál (1) konverguje stejnoměrně na intervalu (y_1, y_2), pak je na tomto intervalu spojitou funkcí parametru y.

2. **BOLZANOVO-CAUCHYOVO KRITÉRIUM KONVERGENCE.** Pro stejnoměrnou konvergenci integrálu (1) na intervalu (y_1, y_2) je nutné a stačí, aby ke každému $\varepsilon > 0$ existovalo číslo $B = B(\varepsilon)$ tak, že

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \text{ pro } y_1 < y < y_2, \text{ jestliže } b' > B \text{ a } b'' > B.$$

3. **WEIERSTRASSOVO KRITÉRIUM KONVERGENCE.** Pro stejnoměrnou konvergenci integrálu (1) stačí, aby nezávisle na parametru y existovala funkce $F(x)$ splňující podmínky

1) $|f(x,y)| \le F(x)$ pro $a \le x < +\infty$ a 2) $\int_a^{+\infty} F(x)dx < +\infty$.

4. Analogická tvrzení platí pro nevlastní integrály nespojitých funkcí.

Určete obory konvergence následujících integrálů:

3741. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}dx$.

3742. $\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$.

3743. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}dx$.

3744. $\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$.

3745. $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$.

3746. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx \ (p>0)$.

Porovnáním s konvergencí řad vyšetřete konvergenci následujících integrálů:

3747. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}dx$.

3748. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \ (n>0)$.

3749. $\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

3750. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$.

3751. Bez použití negací formulujte tvrzení, že integrál $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ konverguje nestejnoměrně na daném intervalu (y_1,y_2).

3752. Dokažte, že jestliže integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje a funkce $\varphi(x,y)$ je omezená a monotónní v proměnné x, pak integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)dx$ konverguje stejnoměrně (na odpovídající množině).

3753. Dokažte, že stejnoměrně konvergentní integrál

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx \ (0<y<1)$$

nelze shora odhadnout konvergentním integrálem nezávislým na parametru.

3754. Dokažte, že integrál $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ 1) konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu $0 < a \le \alpha \le b$ a 2) konverguje nestejnoměrně na intervalu $0 \le \alpha \le b$.

3755. Dokažte, že Dirichletův integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ 1) konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu $[a,b]$, který neobsahuje hodnotu $\alpha = 0$; 2) konverguje nestejnoměrně na každém uzavřeném intervalu $[a,b]$, který obsahuje hodnotu $\alpha = 0$.

3755.1 Vyšetřete, zda integrál $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ stejnoměrně konverguje na následujících intervalech: a) $1 < \alpha_0 \le \alpha < +\infty$; b) $1 < \alpha < +\infty$.

3755.2 Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci integrálu $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ pro $0 < \alpha < 1$.

3755.3 Dokažte, že integrál $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ konverguje nestejnoměrně na intervalu $1 < \alpha < +\infty$.

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících integrálů na zadaných intervalech:

3756. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx \; (1 < \alpha_0 \le \alpha < +\infty)$.

3757. $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \; (a \le \alpha \le b)$.

3758. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx \; (-\infty < \alpha < +\infty)$.

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1} \; (0 \le \alpha < +\infty)$.

3760. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \; (0 \le \alpha < +\infty)$.

3760.1 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx \; (0 \le p \le 10)$.

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx \; (0 \le \alpha < +\infty)$, kde $p > 0$ je konstanta.

3762. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \; (0 \le \alpha < +\infty)$.

3763. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$: a) $a < \alpha < b$; b) $-\infty < \alpha < +\infty$.

3764. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x\, dy \quad (-\infty < x < +\infty)$.

3765. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx \quad (p \geq 0)$.

3765.1 Najděte číslo $b > 0$ tak, aby platilo $0 < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \varepsilon$ pro $1,1 \leq n \leq 10$, kde $\varepsilon = 10^{-6}$.

3766. $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$: a) $p \geq p_0 > 0$; b) $p > 0 \quad (q > -1)$.

3767. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (0 \leq n < +\infty)$.

3768. $\int_0^1 \sin\frac{1}{x} \frac{dx}{x^n} \quad (0 < n < 2)$.

3769. $\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right)$.

3770. $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$.

3771. Integrál *stejnoměrně konverguje pro danou hodnotu parametru,* jestliže konverguje stejnoměrně na nějakém okolí této hodnoty. Dokažte, že integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2 x^2}$ stejnoměrně konverguje pro každou hodnotu $\alpha \neq 0$ a konverguje, ale nikoli stejnoměrně, pro $\alpha = 0$.

3772. Lze provést limitní přechod v argumentu integrálu $\lim_{\alpha \searrow 0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$?

3773. Funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $(0, +\infty)$. Dokažte, že

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

3773.1 Dokažte, že je-li $f'(x)$ absolutně integrovatelná na intervalu $[a, +\infty]$, pak existuje $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3774. Dokažte, že $\lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx\, dx = 0$, je-li funkce $f(x)$ absolutně integrovatelná na intervalu $(0, +\infty)$.

3775. Dokažte, že jestliže jsou splněny následující podmínky: 1) $f(x,y) \Rightarrow f(x,y_0)$ na každém omezeném intervalu (a,b) a 2) $|f(x,y)| \le F(x)$, kde $\int_a^{+\infty} F(x)dx < +\infty$, pak

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx.$$

3776. Vypočtěte integrál $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right] dx$ pomocí limitního přechodu.

3776.1 Nechť $f(x)$ je spojitá a omezená funkce na intervalu $[0, +\infty)$. Dokažte, že

$$\lim_{y \to 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0).$$

3776.2 Najděte $\lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$.

3777. Dokažte, že integrál $F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx$ je spojitou funkcí parametru a.

3777.1 Dokažte, že $F(a) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$ je spojitou funkcí na intervalu $0 < \alpha < 1$.

3778. Najděte body nespojitosti funkce $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx$. Sestrojte graf funkce $y = F(a)$.

Vyšetřete spojitost následujících funkcí na zadaných intervalech:

3779. $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2 + x^\alpha}$ pro $\alpha > 2$.

3780. $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ pro $\alpha > 0$.

3781. $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$ pro $0<\alpha<2$.

3782. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx$ pro $0<\alpha<1$.

3783. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}dx$ pro $-\infty<\alpha<+\infty$.

§ 3. Derivace a integrování nevlastních integrálů závislých na parametru

1. **DERIVACE NEVLASTNÍHO INTEGRÁLU PODLE PARAMETRU.** Jestliže jsou splněny následující podmínky: 1) funkce $f(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ jsou spojité na množině $\{(x,y);\ a\le x<+\infty,\ y_1<y<y_2\}$; 2) integrál $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ konverguje; 3) integrál $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ konverguje stejnoměrně na intervalu (y_1,y_2), pak

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

pro $y_1<y<y_2$ (*Leibnizovo pravidlo*).

2. **INTEGRACE NEVLASTNÍHO INTEGRÁLU PODLE PARAMETRU.** Jestliže 1) funkce $f(x,y)$ je spojitá pro $x\ge a$ a $y_1\le y\le y_2$; 2) integrál $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ konverguje stejnoměrně na omezeném uzavřeném intervalu $[y_1,y_2]$, pak

$$\int_{y_1}^{y_2}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}dx\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy. \qquad (1)$$

Je-li $f(x,y)\ge 0$, pak vztah (1) platí i pro neomezený interval (y_1,y_2) za předpokladu, že vnitřní integrály rovnosti (1) jsou spojité a alespoň jedna její strana má smysl.

3784. Pomocí rovnosti $\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}$ $(n>0)$ vypočtěte integrál $\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx$, kde m je přirozené číslo.

3785. Pomocí rovnosti $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $(a>0)$ vypočtěte integrál $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$, kde n je přirozené číslo.

3786. Dokažte, že i když má Dirichletův integrál $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ pro $\alpha\neq 0$ derivaci, nelze ji získat použitím Leibnizova pravidla.

NÁVOD: Použijte substituci $\alpha x=y$.

3787. Dokažte, že funkce $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$ je spojitá a diferencovatelná na intervalu $-\infty<\alpha<+\infty$.

3788. Pomocí rovnosti $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$ vypočtěte integrál $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ $(a>0,b>0)$.

3789. Dokažte *Frullaniův vzorec* $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$ $(a>0,b>0)$, kde $f(x)$ je spojitá funkce a integrál $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ má smysl pro libovolnou hodnotu $A>0$.

Pomocí Frullaniova vzorce vypočtěte následující integrály:

3790. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$ $(a>0,b>0)$.

3791. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx$ $(a>0,b>0)$.

3792. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax-\operatorname{arctg}bx}{x}dx$ $(a>0,b>0)$.

Derivací podle parametru vypočtěte následující integrály:

3793. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

3794. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

3795. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\,dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

3796. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx\,dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

Vypočtěte následující integrály:

3797. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \le 1).$

3798. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \le 1).$

3799. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

3800. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}\,dx.$

3801. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\,dx.$

3802. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4}\,dx.$

3803. Vypočtěte Eulerův-Poissonův integrál $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ pomocí rovnosti

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2}\,dy.$$

Pomocí hodnoty Eulerova-Poissonova integrálu vypočtěte:

3804. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$

3805. $\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$

3806. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh bx\,dx \quad (a > 0).$

3807. $\int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + a^2/x^2)}\,dx \quad (a > 0).$

3808. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

3809. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad (a>0)$.

3810. $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx \quad (a>0)$.

3811. $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ (n je přirozené číslo).

3811.1 Dokažte, že $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-axt^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0,\delta>0)$.

3812. Pomocí integrálu $I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha\geq 0)$ vypočtěte *Dirichletův integrál*

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx.$$

3812.1 Jaký přibližný tvar má graf *integrálsinu* $y=\mathrm{Si}x$, kde $\mathrm{Si}x=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$?

Pomocí hodnot Dirichletova a Frullaniova integrálů vypočtěte hodnoty následujících integrálů:

3813. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx \quad (\alpha>0)$.

3814. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx \quad (|\alpha|\neq|\beta|)$.

3815. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$.

3816. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx$.

3817. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$.

3818. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx$.

3819. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$.

3820. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx \quad (\alpha\beta\neq 0)$.

3821. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}dx$.

3822. $\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\,\sin\beta x}{x^2}dx \quad (k\geq 0,\ \alpha>0,\ \beta>0)$.

3823. Najděte *nespojitý Dirichletův faktor* $D(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda\cos\lambda x\frac{d\lambda}{\lambda}$ pro různé hodnoty argumentu x. Sestrojte graf funkce $y=D(x)$.

3824. Vypočtěte integrály:

a) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}dx$; b) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}dx$.

3825. Pomocí rovnosti $\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy$ vypočtěte *Laplaceův integrál*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx.$$

3826. Vypočtěte integrál $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$.

Vypočtěte následující integrály:

3827. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$.

3828. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$.

3829. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx\ (a>0, ac-b^2>0)$.

3830. Pomocí vztahu $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy\ (x>0)$ vypočtěte *Fresnelovy integrály*

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx,\quad \int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$$

Vypočtěte hodnoty následujících integrálů:

3831. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+2bx+c)dx\ (a\neq 0)$.

3832. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cos 2axdx$.

3833. $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cos 2axdx$.

3834. Dokažte následující vztahy:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2-x^2}dx = \frac{\pi}{2a}\sin a\alpha$; 2) $\int_0^{+\infty} x\frac{\sin ax}{a^2-x^2}dx = -\frac{\pi}{2}\cos a\alpha$,

kde $a \neq 0$ a integrály jsou definovány ve smyslu hlavní hodnoty.

3835. Najděte *Laplaceovu transformaci* $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$ $(p>0)$ funkce $f(t)$, je-li:

a) $f(t) = t^n$ (n je přirozené číslo); b) $f(t) = \sqrt{t}$; c) $f(t) = e^{\alpha t}$; d) $f(t) = te^{-\alpha t}$;

e) $f(t) = \cos t$; f) $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$; g) $f(t) = \sin\alpha\sqrt{t}$.

3836. Dokažte vztah (*Lipschitzův integrál*) $\int_0^{+\infty} e^{-at}J_0(bt)dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(a>0)$,

kde $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)d\varphi$ je Besselova funkce indexu 0 (viz úloha **3726**).

3837. Najděte *Weierstrassovu transformaci* $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}f(y)dy$ následujících funkcí:

a) $f(y) = 1$; b) $f(y) = y^2$; c) $f(y) = e^{2ay}$; d) $f(y) = \cos ay$.

3838. *Hermiteovy polynomy* definujeme vztahem $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

($n = 0, 1, 2, \ldots$). Dokažte, že $\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & \text{pro } m = n. \end{cases}$

3839. Vypočtěte hodnotu integrálu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2}\right]}d\xi \quad (\sigma_1>0, \sigma_2>0),$$

která má velký význam v teorii pravděpodobnosti.

3840. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a absolutně integrovatelná na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Dokažte, že integrál

$$u(x,t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

je řešením *rovnice vedení tepla* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s počáteční podmínkou $\lim_{t\searrow 0} u(x,t) = f(x)$.

§ 4. Eulerovy integrály

1. **FUNKCE GAMA.** Pro $x>0$ definujeme $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Základní vlastnost funkce gama je vyjádřena *rekurentním vztahem* $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

Je-li n přirozené číslo, pak $\Gamma(n)=(n-1)!$; $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\,3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$.

2. **VZOREC PRO KOMPLEMENT.** Pro $0<x<1$ platí vztah $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

3. **FUNKCE BETA.** Pro $x>0$ a $y>0$ definujeme $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

Pak $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

3841. Dokažte, že funkce gama $\Gamma(x)$ je na intervalu $x>0$ spojitá a má spojité derivace všech řádů.

3842. Dokažte, že funkce beta $B(x,y)$ je spojitá na množině $x>0$, $y>0$ a má na této množině spojité derivace všech řádů.

Pomocí Eulerových integrálů vypočtěte následující integrály:

3843. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$.

3844. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$.

3845. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

3846. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

3847. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$.

3848. $\int_0^{\pi/2} \sin^6x\cos^4x\,dx$.

3849. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ $(n>1)$.

3850. $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$ (n je přirozené číslo).

Určete, pro které hodnoty parametrů následující integrály konvergují, a pomocí Eulerových integrálů vypočtěte jejich hodnotu:

3851. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx \ (n>0)$.

3852. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx$.

3853. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} \ (a>0, b>0, n>0)$.

3854. $\int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx \ (0<a<b, c>0)$.

3855. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \ (m>0)$.

3856. $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$.

3857. $\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^n x dx$.

3858. $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n}dx \ (0<|k|<1)$.

3859. $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx \ (n>0)$.

3860. $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx$.

3861. $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

3862. $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x dx \ (a>0)$.

3863. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$.

3864. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx$.

3864.1 $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}dx$.

3864.2 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx$.

3865. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx$.

3866. $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx \ (0<p<1)$.

NÁVOD: Tento integrál lze chápat jako $\lim_{\epsilon\searrow 0}[B(p,\varepsilon) - B(1-p,\varepsilon)]$.

3867. $\int_0^{+\infty} \frac{\sinh\alpha x}{\sinh\beta x}dx \ (0<\alpha<\beta)$.

3868. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx$.

3869. $\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)dx \ (a>0)$. **3870.** $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx$.

3871. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x dx$ (n je přirozené číslo).

Dokažte následující rovnosti:

3872. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$.

3873. $\int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

3874. $\prod_{m=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$.

3875. $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = 1$.

Užitím rovnosti $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-xt}dt \ (x>0)$ vypočtěte následující integrály:

3876. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m}dx \ (0<m<1)$. **3877.** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m}dx \ (0<m<2)$.

3878. Dokažte Eulerovy vzorce:

a) $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$;

b) $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x \left(\lambda>0, x>0, -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

3879. Vypočtěte délku křivky $r^n = a^n\cos n\varphi$ ($a>0$, n je přirozené číslo).

3880. Vypočtěte plochu, která je vymezena křivkou $|x|^n + |y|^n = a^n \ (n>0, a>0)$.

§ 5. Integrální Fourierův rozvoj

1. **INTEGRÁLNÍ FOURIERŮV ROZVOJ FUNKCE.** Jestliže jsou splněny následující předpoklady: 1) funkce $f(x)$ je definována na celé ose $-\infty < x < +\infty$; 2) na každém omezeném intervalu je po částech spojitá spolu se svou derivací $f'(x)$ a 3) je absolutně integrovatelná na intervalu $(-\infty, +\infty)$, pak ji ve všech jejích bodech spojitosti lze vyjádřit ve formě *integrálního Fourierova rozvoje*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{1}$$

kde $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi$ a $b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi$.

Pro sudou funkci $f(x)$ má rovnost (1) tvar

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda, \tag{2}$$

kde $a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi$.

Analogicky pro lichou funkci $f(x)$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda, \tag{3}$$

kde $b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi$.

V bodech nespojitosi funkce $f(x)$ musí být levá část rovnosti (1) nahrazena výrazem

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{t\to x} f(t) + \lim_{t\to x} f(t)\right].$$

2. **INTEGRÁLNÍ FOURIERŮV ROZVOJ FUNKCE NA INTERVALU** $(0, +\infty)$. Funkci $f(x)$, která je definovaná a absolutně integrovatelná na intervalu $(0, +\infty)$ a spolu s derivací $f'(x)$ po částech spojitá na každém omezeném intervalu $(a,b) \subset (0, +\infty)$, lze rozvinout na daném intervalu jak vztahem (2) (*sudé prodloužení funkce*), tak vztahem (3) (*liché prodloužení funkce*).

Najděte integrální Fourierův rozvoj následujících funkcí:

3881. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } |x| < 1, \\ 0 \text{ pro } |x| > 1. \end{cases}$

3882. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x \text{ pro } |x| < 1, \\ 0 \quad\;\; \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$

3883. $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b)\ \ (b > a)$.

3884. $f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \text{ pro } |x| \le a, \\ 0 \qquad\quad\;\; \text{pro } |x| > a. \end{cases}$

3885. $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

3886. $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

3887. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{pro } |x|\le\pi,\\ 0 & \text{pro } |x|>\pi.\end{cases}$

3888. $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{pro } |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{pro } |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

3889. $f(t)=\begin{cases}A\sin\omega t & \text{pro } |t|\le\dfrac{2\pi n}{\omega},\\ 0 & \text{pro } |t|>\dfrac{2\pi n}{\omega},\end{cases}$ (n je přirozené číslo).

3890. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

3891. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$ $(\alpha>0)$.

3892. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$ $(\alpha>0)$.

3893. $f(x)=e^{-x^2}$.

3894. $f(x)=xe^{-x^2}$.

3895. Najděte integrální Fourierův rozvoj funkce $f(x)=e^{-x}$ $(0<x<+\infty)$ pomocí jejího a) sudého prodloužení; b) lichého prodloužení.

Najděte *Fourierovu tranformaci* $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-itx}dt$ funkce $f(t)$, je-li:

3896. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

3897. $f(x)=xe^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

3898. $f(x)=e^{-x^2/2}$.

3899. $f(x)=e^{-x^2/2}\cos\alpha x$.

3900. Najděte funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, je-li:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,dy=\frac{1}{1+x^2}$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\,dy=e^{-x}$ $(x>0)$.

KAPITOLA VIII

Vícerozměrné a křivkové integrály

§ 1. Dvojné integrály

1. **PŘÍMÝ VÝPOČET DVOJNÉHO INTEGRÁLU.** *Dvojným integrálem* spojité funkce $f(x,y)$ přes omezenou a uzavřenou množinu Ω se nazývá číslo

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0 \\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\,\Delta x_i \Delta y_j,$$

kde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ a součet se provádí přes všechna i a j, pro která $(x_i,y_j) \in \Omega$. Je-li množina Ω zadána pomocí nerovností $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, kde $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou spojité funkce na uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak odpovídající dvojný integrál vypočteme podle vztahu

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

2. **ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH V DVOJNÉM INTEGRÁLU.** Představují-li spojitě diferencovatelné funkce $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ vzájemně jednoznačné zobrazení omezené a uzavřené množiny Ω' v rovině uv na množinu Ω v rovině xy a má-li Jakobián $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ konstantní znaménko na množině Ω až na množinu míry nula, pak platí vztah

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv.$$

Speciálně v případě přechodu k polárním souřadnicím r a φ pomocí vztahů $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$ dostaneme

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

3901. Vypočtěte integrál $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1}} xy\,dx\,dy$ jako limitu integrálního součtu tak, že rozložíte oblast integrace na čtverce pomocí přímek $x = i/n$, $y = j/n$, $(i,j = 1,2,\ldots,n-1)$ a vyberete hodnoty integrované funkce z pravých horních rohů těchto čtverců.

3902. Sestavte dolní a horní integrální součet $\underline{S}_n$ a $\overline{S}_n$ pro funkci $f(x,y) = x^2 + y^2$ na množině $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 3$ pomocí rozkladu této množiny na obdélníky přímkami

$$x = 1 + \frac{i}{n},\quad y = 1 + \frac{2j}{n}\quad (i,j = 0,1,\ldots,n).$$

Čemu se rovnají limity těchto součtů pro $n \to \infty$?

3903. Vypočtěte přibližně integrál

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

tak, že aproximujete oblast integrace soustavou vepsaných čtverců, jejichž vrcholy A_{ij} se nacházejí v bodech s celočíselnými souřadnicemi, a vyberete hodnoty integrované funkce v těch vrcholech čtverců, které jsou nejvíce vzdáleny od počátku soustavy souřadnic. Porovnejte takto získanou hodnotu s přesnou hodnotou integrálu.

3904. Vypočtěte přibližně integrál $\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS$, kde S je trojúhelník vymezený přímkami $x=0$, $y=0$ a $x+y=1$, tak, že množinu S rozdělíte přímkami $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $x+y=\text{const}$ na čtyři shodné trojúhelníky a použijete hodnoty integrované funkce v těžištích těchto trojúhelníků.

3905. Množina $S=\{x^2+y^2\le 1\}$ je rozdělena na konečný počet měřitelných částí ΔS_i $(i=1,2,\ldots,n)$ o průměru menším než δ. Pro jakou hodnotu δ bude splněna nerovnost

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)\,dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0{,}001,$$

kde $(x_i,y_i)\in\Delta S_i$?

Vypočtěte následující integrály:

3906. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 (x+y)\,dy$.

3907. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy$.

3908. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a r^2\sin^2\varphi\,dr$.

3909. Dokažte rovnost $\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dxdy=\int\limits_a^A X(x)\,dx\int\limits_b^B Y(y)\,dy$, je-li R obdélník popsaný nerovnostmi $a\le x\le A$, $b\le y\le B$ a funkce $X(x)$ a $Y(y)$ jsou spojité na odpovídajících uzavřených intervalech.

3910. Vypočtěte $\int\limits_a^A dx\int\limits_b^B f(x,y)\,dy$, je-li $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

3911. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na intervalu $a \le x \le b$. Dokažte, že $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$, přičemž rovnost nastane jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ konstantní.

NÁVOD: Uvažujte integrál $\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$.

3912. Jaké znaménko mají následující integrály:

a) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)dxdy$; b) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$;

c) $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ -1\le y\le 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy$?

3913. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x,y)=\sin^2 x \sin^2 y$ na čtverci popsaném nerovnostmi $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

3914. Pomocí věty o střední hodnotě odhadněte hodnotu integrálu

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 10} \frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}.$$

3915. Najděte střední hodnotu druhé mocniny vzdálenosti bodu kruhu $(x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$ od počátku soustavy souřadnic.

V úlohách **3916-3922** určete meze integrace pro výpočet $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ v obou možných pořadích proměnných:

3916. Ω je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

3917. Ω je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,1)$.

3918. Ω je lichoběžník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$.

3919. Ω je kruh zadaný vztahem $x^2+y^2 \le 1$.

3920. Ω je kruh zadaný vztahem $x^2+y^2 \le y$.

3921. Ω je parabolická úseč vymezená křivkami $y=x^2$ a $y=1$.

3922. Ω je mezikruží dané vztahem $1 \le x^2+y^2 \le 4$.

3923. Dokažte *Dirichletův vztah*

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)dx \quad (a>0).$$

Změňte pořadí integrace v následujících integrálech:

3924. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

3925. $\int_{-6}^{2} dx \int_{(x^2/4)-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

3926. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$.

3927. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$.

3928. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3929. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$ $(a>0)$.

3930. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

3931. $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy$.

Vypočtěte hodnoty následujících integrálů:

3932. $\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy$, je-li množina Ω vymezena parabolou $y^2=2px$ a přímkou $x=p/2$ $(p>0)$.

3933. $\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}}$ $(a>0)$, je-li množina Ω vymezena osami souřadnic a kratším kruhovým obloukem o středu v bodě (a,a) a poloměru a, který se dotýká os.

3934. $\iint_\Omega |xy|\,dx\,dy$, je-li Ω kruh o poloměru a se středem v počátku soustavy souřadnic.

3935. $\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$, je-li Ω rovnoběžník o stranách $y=x$, $y=x+a$, $y=a$ a $y=3a$ $(a>0)$.

3936. $\iint_\Omega y^2\,dx\,dy$, je-li Ω vymezena osou x a prvním obloukem cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

Přejděte v dvojném integrálu $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ k polárním souřadnicím r a φ pomocí substituce $x=r\cos\varphi$ a $y=r\sin\varphi$ a určete meze integrace, jestliže:

3937. Ω je kruh $x^2+y^2\le a^2$.

3938. Ω je kruh $x^2+y^2\le ax$ $(a>0)$.

3939. Ω je mezikruží $a^2\le x^2+y^2\le b^2$.

3940. Ω je trojúhelník $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$.

3941. Ω je parabolická úseč $-a\le x\le a$; $x^2/a\le y\le a$.

3942. V jakém případě budou po přechodu k polárním souřadnicím meze integrace konstantní?

Přejděte k polárním souřadnicím r a φ pomocí substituce $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$ a určete meze integrace pro obě možná pořadí proměnných v následujících integrálech:

3943. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$.

3944. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3945. $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$.

3946. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$.

3947. $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$, kde množina Ω je vymezena křivkou $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(x \geq 0)$.

Zaměňte pořadí integrace v následujících integrálech za předpokladu, že r a φ jsou polární souřadnice:

3948. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)\,dr \quad (a>0)$.

3949. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,r)\,dr \quad (a>0)$.

3950. $\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi,r)\,dr \quad (0<a<2\pi)$.

Zaměňte následující dvojné integrály za jednoduché přechodem k polárním souřadnicím:

3951. $\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$.

3952. $\iint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, $\Omega = \{|y| \leq |x|;\ |x| \leq 1\}$.

3953. $\iint_{x^2+y^2\leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy$.

Vypočtěte následující dvojné integrály pomocí přechodu k polárním souřadnicím:

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3955. $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3956. Čtverec $S=\{a<x<a+h,\ b<y<b+h\}$ $(a>0, b>0)$ se pomocí funkcí $u=y^2/x$, $v=\sqrt{xy}$ zobrazí na plochu S'. Najděte poměr obsahu plochy S' k obsahu čtverce S. Čemu se rovná limita tohoto poměru pro $h\to 0$?

Zaveďte místo x a y nové proměnné u a v a určete meze integrace v následujících dvojných integrálech:

3957. $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy$ $(0<a<b; 0<\alpha<\beta)$, je-li $u=x$, $v=y/x$.

3958. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,dy$, je-li $u=x+y$, $v=x-y$.

3959. $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$, kde množina Ω je vymezena křivkami $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ $(a>0)$, je-li $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$.

3960. Ukažte, že záměna proměnných $x+y=\xi$, $y=\xi\eta$ převede trojúhelník $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$ na jednotkový čtverec $0\le\xi\le 1$, $0\le\eta\le 1$.

3961. Při jaké záměně proměnných se křivočarý čtyřúhelník, který je vymezený křivkami $xy=1$, $xy=2$, $x-y+1=0$, $x-y-1=0$ $(x>0, y>0)$, transformuje na obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic?

Převeďte následující dvojné integrály na jednorozměrné užitím vhodné záměny proměnných:

3962. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)\,dx\,dy$.

3963. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy$ $(a^2+b^2\ne 0)$.

3964. $\iint\limits_\Omega f(xy)\,dx\,dy$, kde množina Ω je vymezena křivkami $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ $(x>0, y>0)$.

Vypočtěte následující dvojné integrály:

3965. $\iint_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$, kde množina Ω je vymezena křivkou $x^2+y^2=x+y$.

3966. $\iint_{|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy$.

3967. $\iint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, kde Ω je vnitřek elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3968. $\iint_{x^4+y^4\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

3969. $\iint_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$, kde množina Ω je vymezena křivkami

$y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

3970. $\iint_{\Omega}xy\,dx\,dy$, kde množina Ω je vymezena křivkami $xy=1$, $x+y=5/2$.

3971. $\iint_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le y\le\pi}}|\cos(x+y)|\,dx\,dy$.

3972. $\iint_{x^2+y^2\le 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dx\,dy$.

3973. $\iint_{\substack{|x|\le 1\\0\le y\le 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$.

Vypočtěte následující integrály nespojitých funkcí:

3974. $\iint_{x^2+y^2\le 4}\operatorname{sgn}(x^2+y^2+2)\,dx\,dy$.

3975. $\iint_{\substack{0\le x\le 2\\0\le y\le 2}}[x+y]\,dx\,dy$.

3976. $\iint_{x^2\le y\le 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy$.

3977. Dokažte, že $\iint_{x^2+y^2\le a^2}x^m y^n\,dx\,dy=0$, jsou-li m a n přirozená čísla a alespoň jedno z nich je liché.

3978. Najděte $\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\pi \varrho^2} \iint\limits_{x^2+y^2 \le \varrho^2} f(x,y)\,dx\,dy$, kde $f(x,y)$ je spojitá funkce.

3979. Vypočtěte $F'(t)$, je-li $F(t) = \iint\limits_{\substack{0 \le x \le t \\ 0 \le y \le t}} e^{tx/y^2}\,dx\,dy$.

3980. Vypočtěte $F'(t)$, je-li $F(t) = \iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2 \le 1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3981. Vypočtěte $F'(t)$, je-li $F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le t^2} f(x,y)\,dx\,dy \quad (t>0)$.

3982. Dokažte, že jestliže je funkce $f(x,y)$ spojitá, pak funkce

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)\,d\eta$$

splňuje rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$.

3983. Nechť vrstevnice funkce $f(x,y)$ jsou prosté uzavřené křivky a množina $S(v_1,v_2)$ je vymezena křivkami $f(x,y)=v_1$ a $f(x,y)=v_2$. Dokažte, že

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

kde $F(v)$ je obsah plochy vymezené křivkami $f(x,y)=v_1$ a $f(x,y)=v$.

NÁVOD: Integrovanou množinu rozdělte na části, které jsou ohraničené nekonečně blízkými vrstevnicemi funkce $f(x,y)$.

§ 2. Výpočet obsahů rovinných ploch

Obsah plochy S, která je částí roviny xy, je dán vzorcem $S = \iint\limits_S dx\,dy$.

Vypočtěte obsahy rovinných ploch vymezených následujícími křivkami:

3984. $xy = a^2$, $x+y = \frac{5}{2}a \quad (a>0)$.

3985. $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = -2qx + q^2 \quad (p>0,\ q>0)$.

3986. $(x-y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a>0)$.

Pomocí přechodu k polárním souřadnicím vypočtěte obsahy rovinných ploch vymezených následujícími křivkami:

3987. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$; $x^2+y^2\geq a^2$.

3988. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

3989. $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$.

3990. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$; $(x-a)^2+(y-a)^2\leq a^2$ $(a>0)$.

Zaveďte zobecněné polární souřadnice r a φ podle vzorců $x=ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y=br\sin^{\alpha}\varphi$ $(r\geq 0)$, kde a, b a α jsou vhodně zvolené konstanty a $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$, a vypočtěte obsahy rovinných ploch vymezených následujícími křivkami (jejich parametry jsou kladné):

3991. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}$.

3992. $\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{y^3}{b^3}=\dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$.

3993. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4=\dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4=\dfrac{x^2}{h^2}-\dfrac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994.1 $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^5=\dfrac{x^2y^2}{c^4}$.

3995. $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1$; $x=0$, $y=0$.

Pomocí vhodné záměny proměnných vypočtěte obsahy následujících rovinných ploch, které jsou vymezeny danými křivkami:

3996. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$.

3997. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0;\ y>0)$.

3998. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<p<q;\ 0<r<s)$.

3998.1 $x^2=ay$, $x^2=by$, $x^3=cy^2$, $x^3=dy^2$ $(0<a<b;\ 0<c<d)$.

3998.2 $y=ax^p$, $y=bx^p$, $y=cx^q$, $y=dx^q$ $(0<p<q;\ 0<a<b;\ 0<c<d)$.

3999. $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=2$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, $4\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ $(0<a,\ 0<b)$.

3999. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=4$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(x>0, y>0)$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$, kde λ nabývá následujících hodnot: $\frac{1}{3}c^2$, $\frac{2}{3}c^2$, $\frac{4}{3}c^2$, $\frac{5}{3}c^2$ $(x>0,\ y>0)$.

4001. Vypočtěte obsah vnitřku elipsy $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, kde $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

4002. Vypočtěte obsah plochy vymezené elipsami $\frac{x^2}{\cosh^2 u}+\frac{y^2}{\sinh^2 u}=c^2$ $(u=u_1,u_2)$ a hyperbolami $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$ $(v=v_1,v_2)$ $(0<u_1<u_2;\ 0<v_1<v_2;\ x>0, y>0)$.

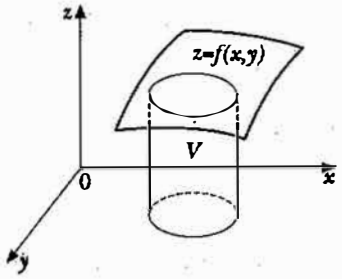
NÁVOD: Položte $x=c\cosh u\cos v$, $y=c\sinh u\sin v$.

4003. Vypočtěte obsah řezu plochy $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ rovinou $x+y+z=0$.

4004. Vypočtěte obsah řezu plochy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ rovinou $z=1-2(x+y)$.

§ 3. Výpočet objemů těles

Objem tělesa s obecným válcovým pláštěm, který je vymezen shora plochou $z=f(x,y)\geq 0$, zdola plochou $z=0$ a z boků přímou válcovou plochou, která vymezuje v rovině xy měřitelnou množinu Ω (viz obr. 14), se rovná $V=\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$.



Obr. 14

4005. Určete tvar tělesa, jehož objem se rovná integrálu $V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy$.

4006. Určete tvary a rozměry těles, jejichž objemy jsou dány následujícími dvojnými integrály:

a) $\iint\limits_{\substack{0\le x+y\le 1\\ x\ge 0,y\ge 0}} (x+y)\,dx\,dy$; b) $\iint\limits_{x^2/4+y^2/9\le 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$; c) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy$;

d) $\iint\limits_{x^2+y^2\le x} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$; e) $\iint\limits_{\substack{1\le x\le 2\\ x\le y\le 2x}} \sqrt{xy}\,dx\,dy$; f) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Vypočtěte objemy těles, která jsou vymezena následujícími plochami:

4007. $z=1+x+y$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4008. $x+y+z=a$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a\ge R\sqrt{2})$.

4009. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

4010. $z=\cos x\cos y$, $z=0$, $|x+y|\le\pi/2$, $|x-y|\le\pi/2$.

4011. $z=\sin\frac{\pi y}{2x}$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=\pi$.

4012. $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

Pomocí přechodu k polárním souřadnicím vypočtěte objemy těles ohraničených plochami:

4013. $z^2=xy$, $x^2+y^2=a^2$.

4014. $z=x+y$, $(x^2+y^2)^2=2xy$, $z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

4015. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

4016. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2\ge a|x|$ $(a>0)$.

4017. $x^2+y^2-az=0$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $z=0$ $(a>0)$.

4018. $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$.

4019. $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $z=0$, $y=x\operatorname{tg}\alpha$, $y=x\operatorname{tg}\beta$ $(a>0,\ c>0,\ 0\le\alpha<\beta\le 2\pi)$.

4020. $z=x^2+y^2$, $z=x+y$.

Vypočtěte objemy těles, která jsou vymezena následujícími plochami (s kladnými parametry):

4021. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

4022. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4023. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $z=0$.

4024. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1$, $z=0$.

4025. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4026. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

4027. $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $(0<a<b)$.

4028. $z=x^2+y^2$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $z=0$.

4029. $z=xy$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$, $y^2=2x$, $z=0$

4030. $z=c\sin\frac{\pi xy}{a^2}$, $z=0$, $xy=a^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<\alpha<\beta; c>0)$.

4031. $z=x^{3/2}+y^{3/2}$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4032. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $z=0$.

4033. $z=c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $z=0$, $\sqrt{x^2+y^2}=a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $(y\geq 0)$.

4033.1 $z=ye^{-xy/a^2}$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=m$, $y=n$, $z=0$ $(0<m<n)$.

4034. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0)$.

4035. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0,\ m>0)$.

§ 4. Výpočet obsahů prostorových ploch

1. **Případ explicitně zadané plochy.** Povrch hladké křivočaré plochy $z=z(x,y)$ se spočítá podle vzorce $S=\iint_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$, kde Ω je průmět dané plochy do roviny xy.

2. **PŘÍPAD PLOCHY V TŘÍROZMĚRNÉM PROSTORU ZADANÉ PARAMETRICKY.** Je-li plocha zadána parametrickými rovnicemi $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, kde $(u,v)\in\Omega$; Ω je omezená a uzavřená množina a funkce x, y a z jsou na ní spojitě diferencovatelné, pak je obsah plochy vyjádřen vzorcem

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

kde $E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$, $F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

4036. Vypočtěte obsah části plochy $az=xy$ uzavřené uvnitř válcové plochy $x^2+y^2=a^2$.

4037. Vypočtěte povrch tělesa, které je vymezeno plochami $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

4038. Vypočtěte obsah části sféry $x^2+y^2+z^2=a^2$, která je uvnitř válcové plochy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b\le a)$.

4039. Vypočtěte obsah části plochy $z^2=2xy$ vymezené rovinami $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4040. Vypočtěte obsah části plochy $x^2+y^2+z^2=a^2$, která se nachází vně válcových ploch $x^2+y^2=\pm ax$ (Vivianiho úloha).

4041. Vypočtěte obsah části plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$ uzavřené uvnitř válcové plochy $x^2+y^2=2x$.

4042. Vypočtěte obsah části plochy $z=\sqrt{x^2-y^2}$ uzavřené uvnitř válcové plochy $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

4043. Vypočtěte obsah části plochy $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ vymezené rovinami $x-y=\pm 1$, $x+y=\pm 1$.

4044. Vypočtěte obsah části plochy $x^2+y^2=2az$ uzavřené uvnitř válcové plochy $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

4045. Vypočtěte obsah části plochy $x^2+y^2=a^2$ vymezené rovinami $x+z=0$, $x-z=0$, $(x>0, y>0)$.

4045.1 Vypočtěte obsah části plochy $(x^2+y^2)^{3/2}+z=1$ vymezené rovinou $z=0$.

4045.2 Vypočtěte obsah části plochy $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{2z}{c}=1$ vymezené rovinami $x=0$, $y=0$ a $z=0$.

4045.3 Vypočtěte obsah části plochy $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$ vymezené plochou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(z\ge 0)$.

4045.4 Vypočtěte obsah části plochy $\sin z = \sinh x \sinh y$ vymezené rovinami $x = 1$ a $x = 2$ $(y \geq 0)$.

4046. Vypočtěte povrch a objem tělesa vymezeného plochami $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$, $x + y + z = 2a$ $(a > 0)$.

4047. Vypočtěte obsah části sféry vymezené dvěma poledníky a dvěma rovnoběžkami.

4048. Vypočtěte obsah části přímkové šroubové plochy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$, kde $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

4049. Vypočtěte obsah části toru $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(0 < a \leq b)$ vymezenou dvěma poledníky $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ a dvěma rovnoběžkami $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$. Čemu je roven povrch celého toru?

4050. Vypočtěte velikost prostorového úhlu ω, pod kterým je pozorován z počátku soustavy souřadnic obdélník $x = a > 0$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$. Odvoďte přibližný vztah pro ω, je-li a velké.

§ 5. Použití dvojných integrálů v mechanice

1. **TĚŽIŠTĚ.** Jsou-li x_0 a y_0 souřadnice těžiště rovinného obrazce Ω, který leží v rovině xy a je-li $\varrho = \varrho(x, y)$ jeho hustota, pak platí následující vztahy

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \varrho x\,dx\,dy, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \varrho y\,dx\,dy, \tag{1}$$

kde $M = \iint_\Omega \varrho\,dx\,dy$ je hmotnost obrazce.

Je-li obrazec homogenní, pak ve vztazích (1) můžeme položit $\varrho = 1$.

2. **MOMENT SETRVAČNOSTI.** Momenty setrvačnosti I_x a I_y rovinného obrazce Ω, který leží v rovině xy, vzhledem k osám x a y, se dají vyjádřit rovnostmi

$$I_x = \iint_\Omega \varrho y^2\,dx\,dy, \quad I_y = \iint_\Omega \varrho x^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

kde $\varrho = \varrho(x, y)$ je hustota obrazce. *Odstředivý moment setrvačnosti* se vyjadřuje vzorcem

$$I_{xy} = \iint_\Omega \varrho xy\,dx\,dy. \tag{3}$$

Dosazením $\varrho = 1$ do vzorců (2) a (3) získáme *geometrické momenty setrvačnosti* rovinného obrazce.

4051. Vypočtěte hmotnost čtvercové destičky o velikosti strany a, je-li hustota destičky v každém jejím bodě přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od nejbližšího vrcholu a je rovna ϱ_0 ve středu čtverce.

Najděte souřadnice těžišť homogenních destiček, které jsou vymezeny následujícími křivkami:

4052. $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$. **4053.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

4054. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(x > 0, y > 0)$. **4055.** $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (smyčka).

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ $(x > 0, y > 0)$. **4057.** $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi = 0$.

4058. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$, $y = 0$.

4059. Najděte souřadnice těžiště kruhové destičky $x^2 + y^2 \le a^2$, je-li její hustota v bodě (x,y) přímo úměrná vzdálenosti od bodu $(a, 0)$.

4060. Najděte křivku opisovanou těžištěm plochy, která je vymezená křivkami $y = \sqrt{2px}$, $y = 0$, $x = X$.

Najděte geometrické momenty setrvačnosti I_x a I_y ploch vzhledem k osám x a y, které jsou vymezeny následujícími křivkami:

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1$, $\frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1$, $y = 0$ $(b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ h > 0)$.

4062. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$ $(0 \le x \le a)$.

4063. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

4064. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

4065. $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

4066. Najděte polární moment $I_0 = \iint_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ plochy S, která je vymezena křivkou $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

4066.1 Vypočtěte odstředivý moment setrvačnosti I_{xy} homogenní plochy vymezené křivkami $ay = x^2$, $ax = y^2$ $(a > 0)$.

4067. Dokažte vzorec $I_l = I_{l_0} + Sd^2$, kde I_l a I_{l_0} jsou momenty setrvačnosti obrazce vzhledem ke dvěma rovnoběžným osám l a l_0 takovým, že l_0 prochází těžištěm tohoto obrazce a d je jejich vzájemná vzdálenost.

4068. Dokažte, že moment setrvačnosti rovinné plochy S vzhledem k přímce, která prochází jejím těžištěm $(0,0)$ a svírá úhel α s osou x, je roven $I = I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha$, kde I_x a I_y jsou momenty setrvačnosti plochy S vzhledem k osám x a y a $I_{xy} = \iint_S \varrho xy\,dx\,dy$ je její odstředivý moment.

4069. Vypočtěte moment setrvačnosti rovnostranného trojúhelníka o straně délky a vzhledem k přímce, která prochází jeho těžištěm a svírá úhel α s jeho výškou.

4070. Vypočtěte tlakovou sílu vody na boční stěnu $x \geq 0$ válcového sudu $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, je-li výška hladiny vody rovna $z=h$.

4071. Koule o poloměru a je ponořena do tekutiny o konstantní hustotě δ do hloubky h (měřeno od středu koule), kde $h \geq a$. Vypočtěte tlakovou sílu tekutiny na vrchní a spodní části povrchu koule.

4072. Rotační válec o poloměru základny a a výšce b je celý ponořen do tekutiny o hustotě δ tak, že jeho těžiště je v hloubce h pod hladinou a osa válce svírá úhel α se svislým směrem. Vypočtěte tlakovou sílu tekutiny na spodní a vrchní podstavu válce.

4073. Určete přitažlivou sílu homogenního válce $x^2+y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$, kterou působí na hmotný bod $(0,0,b)$, je-li hmotnost válce rovna M a hmotnost bodu rovna m.

4074. Rozdělení tlaku tělesa na *plochu přítlaku* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ je dáno vzorcem $p=p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$. Určete střední tlak tělesa na tuto plochu.

4075. Louka, která má tvar obdélníka o stranách a a b, je rovnoměrně pokryta pokosenou travou o hustotě p kg/m^2. Jaká je minimální velikost práce potřebná pro svoz všeho sena do středu louky, jestliže práce na přepravu nákladu P kg na vzdálenost r je dána vztahem kPr $(0<k<1)$?

§ 6. Trojné integrály

1. **PŘÍMÝ VÝPOČET TROJNÉHO INTEGRÁLU.** Nechť je funkce $f(x,y,z)$ spojitá a množina V je omezená a definovaná nerovnostmi: $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$, kde $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ jsou spojité funkce, pak trojný integrál funkce $f(x,y,z)$ přes množinu V lze spočítat podle vzorce

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

V některých případech je vhodné použít vzorec

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{S(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz,$$

kde $S(x)$ je řez množiny V rovinou $x=\text{const}$.

2. **ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH V TROJNÉM INTEGRÁLU.** Je-li omezená a uzavřená podmnožina V' prostoru uvw vzájemně jednoznačně zobrazena na množinu V prostoru xyz pomocí spojitě diferencovatelných funkcí $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, jejichž Jakobián $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ má na V' téměř všude (ve smyslu míry) konstantní znaménko, pak platí vzorec

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

Speciálně tak získáme:

1) *cylindrickou soustavu souřadnic* φ, r, h, kde $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=h$ a $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)}=r$;

2) *sférickou soustavu souřadnic* φ, ψ, r, kde $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$ a $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=r^2\cos\psi$.

Vypočtěte následující trojné integrály:

4076. $\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, kde množina V je vymezena plochami $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

4077. $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, kde množina V je vymezena plochami $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4078. $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, kde množina V je vymezena plochami $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4079. $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$, kde množina V je vymezena plochou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4080. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, kde množina V je vymezena plochami $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

Najděte meze integrace při různém pořadí integrování v následujících výrazech:

4081. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz$.

4082. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz$.

4083. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$.

Nahraďte následující trojné integrály jednorozměrnými:

4084. $\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta)\,d\zeta$.

4085. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z)\,dz$.

4086. Vypočtěte $\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x,y,z)\,dz$, je-li $f(x,y,z) = F'''_{xyz}(x,y,z)$ a a,b,c,A,B,C jsou konstanty.

Vypočtěte následující integrály pomocí přechodu ke sférickým souřadnicím:

4087. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, kde množina V je vymezena plochou $x^2+y^2+z^2=z$.

4088. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz$.

4089. Převeďte do sférických souřadnic integrál $\iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz$, kde množina V je vymezena plochami $z=x^2+y^2$, $x=y$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

4090. Vypočtěte následující integrál pomocí vhodné záměny proměnných:

$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$, kde V je vnitřek elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4091. Vypočtěte následující integrál pomocí přechodu k cylindrickými souřadnicím:

$\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, kde množina V je vymezena plochami $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

4092. Vypočtěte integrál $\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz$, kde množina V je vymezena plochami $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$ $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(0<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>0)$.

4093. Vypočtěte integrál $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, kde množina V se nalézá v oktantu $x>0$, $y>0$, $z>0$ a je vymezena plochami $z=\frac{x^2+y^2}{m}$, $z=\frac{x^2+y^2}{n}$, $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta;\ 0<m<n)$.

4094. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ na množině $x^2+y^2+z^2 \le x+y+z$.

4095. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$ na množině $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$.

4096. Pomocí věty o střední hodnotě odhadněte integrál

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}, \text{ kde } a^2+b^2+c^2>R^2.$$

4097. Dokažte, že jestliže je funkce $f(x,y,z)$ spojitá na množině V a platí $\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)dxdydz=0$ pro každou množinu $\omega \subset V$, pak $f(x,y,z)\equiv 0$ pro $(x,y,z)\in V$.

4098. Vypočtěte $F'(t)$, je-li:

a) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, kde f je diferencovatelná funkce;

b) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\le x\le t\\ 0\le y\le t\\ 0\le z\le t}} f(xyz)dxdydz$, kde f je diferencovatelná funkce.

4099. Vypočtěte $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} x^m y^n z^p dxdydz$, kde m,n a p jsou přirozená čísla.

4100. Vypočtěte *Dirichletův integrál* $\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dxdydz$

$(p>0, q>0, r>0, s>0)$, kde množina V je vymezena rovinami $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, pomocí substituce $x+y+z=\xi$, $y+z=\xi\eta$, $z=\xi\eta\zeta$.

§ 7. Výpočet objemu pomocí trojných integrálů

Objem množiny V lze vyjádřit vzorcem $V=\iiint\limits_V dxdydz$.

Vypočtěte objemy těles, která jsou vymezena následujícími plochami:

4101. $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$.

4102. $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4103. $x^2+z^2=a^2$, $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$.

4104. $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$.

4105. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(a > 0)$.

4106. $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vypočtěte objemy těles vymezených následujícími plochami pomocí přechodu ke sférickým nebo válcovým souřadnicím:

4107. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 \le z^2$.

4108. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

4109. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

4110. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \ge 0)$ $(0 < a < b)$.

V následujících příkladech je vhodné použít zobecněné sférické souřadnice r, φ a ψ $\left(r \ge 0;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}\right)$, které jsou definovány následujícími vztahy:

$$\left.\begin{aligned} x &= ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi, \\ y &= br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi, \\ z &= cr\sin^{\beta}\psi \end{aligned}\right\} \ (a, b, c, \alpha, \beta \text{ jsou konstanty}),$$

kde $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = \alpha\beta abc r^2 \cos^{\alpha-1}\varphi \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{2\beta-1}\psi \sin^{\beta-1}\psi$.

Vypočtěte objemy těles, která jsou vymezena následujícími plochami:

4111. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x}{h}$.

4112. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

4112.1 $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$.

4113. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$.

4114. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$.

4115. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$.

Vypočtěte objemy těles vymezených následujícími plochami (s kladnými parametry) pomocí vhodné záměny proměnných:

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

4116.1 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

4118.1 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

4118.2 $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

4118.3 $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$.

4119. $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0, y>0)$.

4120. $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0$ $(x\ge 0)$.

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}e^{-\frac{z^2/c^2}{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2}}$.

4123. $\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $x=a$.

4124. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $z=0$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

4125. V jakém poměru dělí objem koule $x^2+y^2+z^2\le 4az$ plocha $x^2+y^2+az=4a^2$?

4126. Vypočtěte objem a povrch tělesa, které je vymezeno plochami $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

4127. Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu vymezeného rovinami $a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i$ $(i = 1,2,3)$, je-li $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

4128. Vypočtěte objem tělesa vymezeného plochou $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$, je-li $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

4129. Vypočtěte objem tělesa vymezeného plochou

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n > 1).$$

4130. Vypočtěte objem tělesa, které se nachází v prvním oktantu prostoru xyz $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ a je vymezeno následujícími plochami:

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \ (m > 0, n > 0, p > 0),\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

§ 8. Použití trojných integrálů v mechanice

1. **HMOTNOST TĚLESA.** Jestliže těleso má objem V a $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je jeho hustota v bodě (x,y,z), pak je jeho *hmotnost* rovna

$$M = \iiint_V \varrho\, dx\,dy\,dz. \tag{1}$$

2. **TĚŽIŠTĚ TĚLESA.** *Souřadnice těžiště tělesa* (x_0, y_0, z_0) se vypočítají podle následujících vzorců:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint_V \varrho x\,dx\,dy\,dz,\ y_0 = \frac{1}{M}\iiint_V \varrho y\,dx\,dy\,dz,\ z_0 = \frac{1}{M}\iiint_V \varrho z\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Je-li těleso homogenní, pak můžeme ve vzorcích (1) a (2) položit $\varrho = 1$.

3. **MOMENTY SETRVAČNOSTI.** *Momenty setrvačnosti tělesa vzhledem k souřadnicovým rovinám* se vyjadřují následujícími integrály:

$$I_{xy} = \iiint_V \varrho z^2\,dx\,dy\,dz,\ I_{yz} = \iiint_V \varrho x^2\,dx\,dy\,dz,\ I_{zy} = \iiint_V \varrho y^2\,dx\,dy\,dz.$$

Momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose l se nazývá integrál

$$I_l = \iiint_V \varrho r^2\,dx\,dy\,dz,$$

kde r je vzdálenost bodu tělesa (x,y,z) od osy l. Speciálně pro osy x, y, z platí následující vztahy:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz},\ I_y = I_{yx} + I_{yz},\ I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

Momentem setrvačnosti tělesa vzhledem počátku soustavy souřadnic se nazývá integrál

$$I_0 = \iiint_V \varrho(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Přitom zřejmě platí $I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$.

4. **POTENCIÁL TÍHOVÉHO POLE.** *Newtonovým potenciálem tělesa* v bodě (x,y,z) se nazývá integrál $u(x,y,z) = \iiint_V \varrho(\xi,\eta,\zeta)\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}$, kde V je objem tělesa, $\varrho = \varrho(\xi,\eta,\zeta)$ je jeho hustota a $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Hmotný bod o hmotnosti m a těleso se vzájemně přitahují silou $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$, jejíž projekce na osy x,y,z jsou rovny:

$$F_x = km\frac{\partial u}{\partial x} = km\iiint_V \varrho\frac{\xi - x}{r^3}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$F_y = km\frac{\partial u}{\partial y} = km\iiint_V \varrho\frac{\eta - y}{r^3}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$F_z = km\frac{\partial u}{\partial z} = km\iiint_V \varrho\frac{\zeta - z}{r^3}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

kde k je gravitační konstanta.

4131. Vypočtěte hmotnost tělesa jednotkového objemu $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, jestliže hustota tohoto tělesa v bodě (x,y,z) je dána vzorcem $\varrho = x + y + z$.

4132. Vypočtěte hmotnost tělesa, které vyplňuje neomezenou množinu $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$, jestliže hustota tohoto tělesa se mění podle zákona $\varrho = \varrho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, kde $\varrho_0 > 0$ a $k > 0$ jsou konstanty.

Vypočtěte souřadnice těžišť homogenních těles vymezených následujícími plochami:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4135. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, $z = 0$.

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$ $(z \ge 0)$. **4138.** $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{xyz}{abc}$ $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0;\ a>0, b>0, c>0)$.

4140. $z=x^2+y^2$, $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $x+y=\pm 1$, $x-y=\pm 1$.

4141. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$.

4142. Vypočtěte souřadnice těžiště tělesa tvaru krychle $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$, $0\leq z\leq 1$, jestliže je jeho hustota v bodě (x,y,z) rovna $\varrho=x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}$, kde $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$.

Vypočtěte momenty setrvačnosti homogenních těles, která jsou vymezena následujícími plochami (s kladnými parametry) vzhledem k souřadnicovým rovinám:

4143. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4144. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4145. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

4146. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$.

4147. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

4147.1 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$.

4147.2 $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0; x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$.

Vypočtěte momenty setrvačnosti homogenních těles, která jsou vymezena následujícími plochami vzhledem k ose z:

4148. $z=x^2+y^2$, $x+y=\pm 1$, $x-y=\pm 1$, $z=0$.

4149. $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$.

4149.1 $(x^2+y^2+z^2)^3=a^5z$.

4150. Vypočtěte moment setrvačnosti nehomogenní koule $x^2+y^2+z^2\le R^2$ o hmotnosti M vzhledem k jejímu průměru, je-li hustota koule v bodě (x,y,z) přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od středu koule.

4151. Dokažte rovnost $I_l=I_{l_0}+Md^2$, kde I_l je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k nějaké ose l, I_{l_0} je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose l_0, která je rovnoběžná s l a prochází těžištěm tělesa, d je vzdálenost mezi osami a M je hmotnost tělesa.

4152. Dokažte, že moment setrvačnosti tělesa o objemu V vzhledem k ose l, která prochází jeho těžištěm $(0,0,0)$ a která svírá úhly α,β,γ s osami souřadnic, je roven $I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma$, kde I_x, I_y, I_z jsou momenty setrvačnosti tělesa vzhledem k osám souřadnic a

$$K_{xy}=\int\int\int_V \varrho xy\,dx\,dy\,dz,\quad K_{xz}=\int\int\int_V \varrho xz\,dx\,dy\,dz,\quad K_{yz}=\int\int\int_V \varrho yz\,dx\,dy\,dz$$

jsou odstředivé momenty setrvačnosti tohoto tělesa.

4153. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního válce $x^2+y^2\le a^2, z=\pm h$ o hustotě ϱ_0 vzhledem k přímce $x=y=z$.

4154. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního tělesa vzhledem k počátku, má-li těleso hustotu ϱ_0 a je-li vymezeno plochou $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$.

4155. Vypočtěte Newtonův potenciál homogenní koule $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le R^2$ o hustotě ϱ_0 v bodě (x,y,z).

NÁVOD: Předpokládejte, že osa ζ prochází bodem (x,y,z).

4156. Vypočtěte Newtonův potenciál duté koule $R_1^2\le\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le R_2^2$ v bodě (x,y,z), jestliže hustota tělesa je $\varrho=f(R)$, kde f je známá funkce a $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

4157. Vypočtěte Newtonův potenciál válce $\xi^2+\eta^2\le a^2$, $0\le\zeta\le h$ o konstantní hustotě ϱ_0 v bodě $(0,0,z)$.

4158. Jakou silou přitahuje homogenní koule $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le R^2$ o hmotnosti M hmotný bod $(0,0,a)$ o hmotnosti m?

4159. Vypočtěte přitažlivou sílu mezi bodem $(0,0,z)$ o jednotkové hmotnosti a homogenním válcem $\xi^2+\eta^2\le a^2$, $0\le\zeta\le h$ o hustotě ϱ_0.

4160. Vypočtěte přitažlivou sílu homogenní kulové výseče o hustotě ϱ_0, kterou působí na hmotný bod o jednotkové hmotnosti, který je umístěn v jejím vrcholu, jestliže je poloměr koule roven R a úhel osového řezu výseče je 2α.

§ 9. Nevlastní dvojné a trojné integrály

1. **PŘÍPAD NEOMEZENÉ OBLASTI INTEGRACE.** Jestliže dvojrozměrná množina Ω není omezená a funkce $f(x,y)$ je spojitá na Ω, pak se definuje

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

kde Ω_n je libovolná posloupnost omezených a uzavřených množin, které limitně pokrývají množinu Ω. Jestliže limita na pravé straně rovnosti (1) existuje a nezávisí na výběru posloupnosti Ω_n, pak se odpovídající integrál nazývá *konvergentní*, v opačném případě *divergentní*. Analogicky se definuje nevlastní trojný integrál spojité funkce na neomezené trojrozměrné množině.

2. **PŘÍPAD NESPOJITÉ FUNKCE.** Je-li funkce $f(x,y)$ spojitá na omezené a uzavřené množině Ω všude mimo bod $P=(a,b)$, pak položíme

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \iint_{\Omega - U_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

kde U_ε je otevřená množina o průměru ε, která obsahuje bod P. V případě existence této limity se zkoumaný integrál nazývá *konvergentní*, v opačném případě *divergentní*.
Předpokládejme, že v blízkosti bodu (a,b) platí rovnost

$$f(x,y) = \phi(x,y)/r^{\alpha},$$

kde $0 < m \le |\phi(x,y)| \le M$ a $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Pak je pro $\alpha < 2$ integrál (2) konvergentní a pro $\alpha \ge 2$ je divergentní.
Analogicky se definuje nevlastní integrál (2) funkce $f(x,y)$ nespojité na nějaké křivce.
Pojem nevlastního integrálu nespojité funkce se snadno rozšíří na případ trojných integrálů.

Vyšetřete konvergenci následujících nevlastních integrálů s neomezenou oblastí integrace $(0 < m \le |\phi(x,y)| \le M < +\infty)$:

4161. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\ge 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4162. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

4163. $\displaystyle\iint_{0\le y\le 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4164. $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\ge 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}\quad (p>0, q>0).$

4165. $\displaystyle\iint_{x+y\ge 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\,dx\,dy.$

4166. Dokažte, že jestliže je spojitá funkce $f(x,y)$ nezáporná a S_n $(n=1,2,\ldots)$ je libovolná posloupnost omezených a uzavřených množin, které limitně pokrývají množinu S, pak $\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)\,dx\,dy$, přičemž výraz na levé straně má smysl, právě když má smysl výraz na pravé straně.

4167. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\le n\\ |y|\le n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi$, jestliže

$\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = 0$ (n je přirozené číslo).

4168. Ukažte, že integrál $\iint\limits_{x\ge 1, y\ge 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ je divergentní, ačkoliv násobné integrály $\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$ a $\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$ jsou konvergentní.

Vypočtěte následující integrály s kladnými parametry:

4169. $\iint\limits_{\substack{xy\ge 1,\\ x\ge 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}$.

4170. $\iint\limits_{\substack{z+y\ge 1,\\ 0\le x\le 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$.

4171. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

4172. $\iint\limits_{x^2+y^2\ge 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$.

4173. $\iint\limits_{y\ge x^2+1} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$.

4174. $\iint\limits_{0\le x\le y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.

Vypočtěte následující integrály pomocí přechodu k polárním souřadnicím:

4175. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

4176. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

4177. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Vypočtěte následující integrály:

4178. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$, kde $a<0$, $ac-b^2>0$.

4179. $\iint\limits_{x^2/a^2+y^2/b^2\ge 1} e^{-(x^2/a^2+y^2/b^2)}\,dx\,dy$.

4180. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\,e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy$ $(0<|\varepsilon|<1)$.

Vyšetřete konvergenci následujících dvojných nevlastních integrálů nespojitých funkcí $(0 < m \le |\varphi(x,y)| \le M < +\infty)$:

4181. $\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, kde množina Ω je určena podmínkami: $|y| \le x^2$; $x^2+y^2 \le 1$.

4182. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}dxdy$.

4183. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0, q>0)$.

4184. $\int\limits_0^a \int\limits_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}dxdy$.

4185. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy$.

4186. Dokažte, že je-li: 1) funkce $\varphi(x,y)$ spojitá na omezené množině $a \le x \le A$, $b \le y \le B$; 2) funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $a \le x \le A$; 3) $p < 1$, pak je integrál

$$\int\limits_a^A dx \int\limits_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy$$

konvergentní.

Vypočtěte následující integrály:

4187. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

4188. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$ $(a>0)$.

4189. $\iint\limits_{\Omega} \ln\sin(x-y)dxdy$, kde množina Ω je vymezena přímkami $y=0$, $y=x$, $x=\pi$.

4190. $\iint\limits_{x^2+y^2\le x} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Vyšetřete konvergenci následujících trojných integrálů:

4191. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dxdydz$, kde $0<m\leq|\varphi(x,y,z)|\leq M<+\infty$.

4192. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dxdydz$, kde $0<m\leq|\varphi(x,y,z)|\leq M\leq+\infty$.

4193. $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\geq 1} \frac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ $(p>0,q>0,r>0)$.

4194. $\int\limits_0^a\int\limits_0^a\int\limits_0^a \frac{f(x,y,z)dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$, kde $0<m\leq|f(x,y,z)|\leq M<+\infty$, $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou spojité funkce na uzavřeném intervalu $[0,a]$.

4195. $\iiint\limits_{\substack{|x|\leq 1,\\ |y|\leq 1,\\ |z|\leq 1}} \frac{dxdydz}{|x+y-z|^p}$.

Vypočtěte následující integrály:

4196. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{dxdydz}{x^p y^q z^r}$.

4197. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

4198. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

4199. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$.

4200. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3$,

kde $P(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ je pozitivně definitní kvadratická forma.

§ 10. Vícerozměrné integrály

1. **PŘÍMÝ VÝPOČET VÍCEROZMĚRNÉHO INTEGRÁLU.** Jestliže je funkce $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ spojitá na omezené množině Ω určené nerovnostmi

$$x_1' \le x_1 \le x_1'',$$

$$x_2'(x_1) \le x_2 \le x_2''(x_1),$$

.....

$$x_n'(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) \le x_n \le x_n''(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$$

kde x_1' a x_1'' jsou konstanty a $x_2'(x_1), x_2''(x_1),\ldots, x_n'(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}), x_n''(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ jsou spojité funkce, pak odpovídající vícerozměrný integrál vypočteme podle vztahu

$$\int\int_{\Omega}\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n = \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \ldots \int_{x_n'(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_n.$$

2. **TRANSFORMACE PROMĚNNÝCH VE VÍCEROZMĚRNÉM INTEGRÁLU.** Jestliže jsou splněny následující podmínky:

1) funkce $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ je stejnoměrně spojitá na omezené měřitelné množině Ω;

2) spojitě diferencovatelné funkce $x_i=\phi_i(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ vyjadřují vzájemně jednoznačné zobrazení množiny Ω' v prostoru $\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ na omezenou množinu Ω v prostoru $x_1x_2\ldots x_n$;

3) Jakobián $\dfrac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}$ má na množině Ω' skoro všude stejné znaménko (až na množinu míry nula), pak platí následující vztah

$$\int\int_{\Omega}\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n = \int\int_{\Omega'}\ldots\int f(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\left|\frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}\right| d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n.$$

Speciálně pro transformaci

$$x_1 = r\cos\varphi_1,$$

$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

.....

$$x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

na polární souřadnice $(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ platí

$$\frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}.$$

4201. Nechť $K(x,y)$ je spojitá funkce na množině $\{|(x,y)|\, a \le x \le b;\ a \le y \le b\}$ a nechť

$$K_n(x,y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\dots K(t_n,y)\,dt_1\,dt_2\dots dt_n .$$

Dokažte, že $K_{n+m+1}(x,y) = \int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)\,dt$.

4202. Nechť $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ je spojitá funkce na množině $0 \le x_i \le x$ $(i = 1,2,\dots,n)$. Dokažte rovnost

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \dots \int_{x_2}^x f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1 \quad (n \ge 2).$$

4203. Dokažte, že $\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\dots f(t_n)\,dt_n = \frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}^n$, je-li f spojitá funkce.

Vypočtěte následující vícerozměrné integrály:

4204. a) $\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n$;

b) $\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2\,dx_1\,dx_2\dots dx_n$.

4205. $\iiint\limits_{\substack{x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0,\\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \le a}} \dots\, dx_1\,dx_2\dots dx_n$.

4206. $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_1x_2\dots x_n\,dx_n$.

4207. $\iint\limits_{\substack{x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0\\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \le 1}} \dots \int \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}\,dx_1\dots dx_n$.

4208. Vypočtěte objem n-rozměrného rovnoběžnostěnu vymezeného rovinami $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \pm h_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$, je-li $\Delta = |a_{ij}| \ne 0$.

4209. Vypočtěte objem n-rozměrné pyramidy

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \le 1,\ x_i \ge 0 \quad (i = 1,2,\dots,n) \quad (a_i > 0, i = 1,2,\dots,n).$$

4210. Vypočtěte objem n-rozměrného kužele vymezeného plochami

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\ x_n=a_n.$$

4211. Vypočtěte objem n-rozměrné koule $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le a^2$.

4212. Vypočtěte integrál $\int\int\ldots\int_{\Omega} x_n^2\,dx_1dx_2\ldots dx_n$, kde množina Ω je definována nerovnostmi $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\le a^2$, $-\frac{h}{2}\le x_n\le\frac{h}{2}$.

4213. Vypočtěte integrál $\int\int\ldots\int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le 1}\frac{dx_1dx_2\ldots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}}$.

4214. Dokažte rovnost $\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\ldots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du$.

4215. Dokažte rovnost $\int_0^x x_1dx_1\int_0^{x_1}x_2dx_2\ldots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})dx_{n+1}=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)du$.

4216. Dokažte *Dirichletův vzorec*

$$\int\int\ldots\int_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_n\ge 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\le 1}} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\ldots dx_n=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)}\ (p_1,p_2,\ldots,p_n>0).$$

4217. Dokažte *Liouvilleův vzorec*

$$\int\int\ldots\int_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_n\ge 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\le 1}} f(x_1+x_2+\ldots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}du\ (p_1,p_2,\ldots,p_n>0),$$

je-li $f(u)$ spojitá funkce.

NÁVOD: Použijte metodu matematické indukce.

4218. Převodem na jednorozměrný integrál vypočtěte n-rozměrný integrál $(n\ge 2)$ $\int\int\ldots\int_{\Omega} f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right)dx_1dx_2\ldots dx_n$ definovaný na množině $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le R^2$, kde $f(u)$ je spojitá funkce.

4219. Vypočtěte *potenciál* homogenní koule s poloměrem R a hustotou ϱ_0,

tj. vypočtěte integrál $u=\frac{\varrho_0^2}{2}\iiint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\le R^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\le R^2}}\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1\,dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{1,2}}$,

kde $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

4220. Vypočtěte n-rozměrný integrál $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}dx_1\,dx_2\dots dx_n$,

kde $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ je pozitivně definitní kvadratická forma.

§ 11. Křivkové integrály

1. **KŘIVKOVÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU.** Jestliže $f(x,y,z)$ je funkce definovaná a spojitá v bodech hladké křivky C:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\ \ (t_0\le t\le T) \tag{1}$$

a ds je diferenciál délky křivky, pak křivkový integrál prvního druhu definujeme vztahem

$$\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_{t_0}^{T}f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Hodnota tohoto integrálu nezávisí na orientaci křivky C.

2. **VYUŽITÍ KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU PRVNÍHO DRUHU V MECHANICE.** Je-li $\varrho=\varrho(x,y,z)$ hustota v daném bodě (x,y,z) křivky C, pak *hmotnost křivky* C je rovna $M=\int_C\varrho(x,y,z)\,ds$.

Souřadnice těžiště (x_0,y_0,z_0) této křivky vypočteme pomocí integrálů

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\varrho(x,y,z)\,ds,\ y_0=\frac{1}{M}\int_C y\varrho(x,y,z)\,ds,\ z_0=\frac{1}{M}\int_C z\varrho(x,y,z)\,ds.$$

3. **KŘIVKOVÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU.** Jestliže jsou funkce $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ spojité ve všech bodech křivky (1), která má orientaci ve směru růstu parametru t, pak křivkový integrál druhého druhu definujeme vztahem

$$\int_C P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$
$$=\int_{t_0}^{T}\{P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\}\,dt. \tag{2}$$

Když změníme orientaci křivky C, změní tento integrál znaménko. V mechanice křivkový integrál druhého druhu vyjadřuje práci síly $\{P,Q,R\}$ působící postupně ve všech bodech křivky C.

4. TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL. Je-li $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du$, kde $u=u(x,y,z)$ je jednoznačná funkce na množině V, pak nezávisle na tvaru křivky C, která leží celá v množině V, platí

$$\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1),$$

kde (x_1,y_1,z_1) je počáteční bod a (x_2,y_2,z_2) koncový bod křivky. V nejjednodušším případě, kdy V je souvislá množina a funkce P, Q a R mají spojité parciální derivace prvního řádu, pak k tomu, aby platila výše uvedená rovnost, je nutné a stačí, aby byly splněny následující podmínky:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Je-li V standardní rovnoběžnostěn, lze funkci u vyjádřit vzorcem

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)dz+c,$$

kde (x_0,y_0,z_0) je nějaký pevný bod množiny V a c je libovolná konstanta. V mechanice má tento integrál význam práce potenciální síly.

Vypočtěte následující integrály prvního druhu:

4221. $\int_C (x+y)ds$, kde C je obvod trojúhelníka s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$.

4222. $\int_C y^2 ds$, kde C je oblouk cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4223. $\int_C (x^2+y^2)ds$, kde C je křivka $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4224. $\int_C xy\,ds$, kde C je oblouk hyperboly $x=a\cosh t$, $y=a\sinh t$ $(0\le t\le t_0)$.

4225. $\int_C (x^{4/3}+y^{4/3})ds$, kde C je oblouk astroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, kde C je sjednocení křivek $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r a φ jsou polární souřadnice).

4227. $\int_C |y|\,ds$, kde C je lemniskata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

4228. $\int_C x\,ds$, kde C je část logaritmické spirály $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$, která se nachází uvnitř kruhu $r\le a$.

4229. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kde C je kružnice $x^2+y^2=ax$.

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$, kde C je řetězovka $y=a\cosh\frac{x}{a}$.

Vypočtěte délky následujících prostorových křivek (s kladnými parametry):

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu $(3,3,2)$.

4232. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$ pro $0<t<+\infty$.

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu (x_0,y_0,z_0).

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu (x_0,y_0,z_0).

4235. $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu (x_0,y_0,z_0).

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\cosh\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=a$ od bodu $(a,0,0)$ k bodu (x,y,z).

Vypočtěte následující křivkové integrály prvního druhu podél prostorových křivek:

4237. $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, kde C je část šroubovice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4238. $\int_C x^2\,ds$, kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

4239. $\int_C z\,ds$, kde C je kuželová šroubovice $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\le t\le t_0)$.

4240. $\int_C z\,ds$, kde C je oblouk křivky $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu $(a,a,a\sqrt{2})$.

4241. Vypočtěte hmotnost křivky $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a\ge b>0;\ 0\le t\le 2\pi)$, která má v bodě (x,y) hustotu $\varrho=|y|$.

4241.1 Vypočtěte hmotnost oblouku paraboly $y^2=2px$ $(0\le x\le p/2)$, jestliže se její hustota v bodě (x,y) rovná $|y|$.

4242. Vypočtěte hmotnost křivky $x=at$, $y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\le t\le 1)$ o hustotě, která se mění podle závislosti $\varrho=\sqrt{2y/a}$.

4243. Vypočtěte souřadnice těžiště oblouku homogenní křivky $y = a\cosh\frac{x}{a}$ od bodu $(0,a)$ k bodu (b,h).

4244. Najděte těžiště oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$.

4244.1 Vypočtěte statické momenty $S_y = \int_C x\,ds$, $S_x = \int_C y\,ds$ oblouku C astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(x \ge 0, y \ge 0)$ vzhledem k souřadnicovým osám.

4244.2 Vypočtěte moment setrvačnosti kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ vzhledem k jejímu průměru.

4244.3 Vypočtěte polární momenty setrvačnosti $I_0 = \int_C (x^2 + y^2)\,ds$ vzhledem k bodu $(0,0)$ následujících křivek: a) obvodu C čtverce $\max\{|x|, |y|\} = a$; b) obvodu C rovnostranného trojúhelníku s vrcholy v polárních souřadnicích $(a,0)$, $\left(a, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(a, \frac{4\pi}{3}\right)$.

4244.4 Vypočtěte průměrný poloměr astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ v polárních souřadnicích, tj. číslo r_0 $(r_0 > 0)$ určené vztahem $I_0 = s r_0^2$, kde I_0 je polární moment setrvačnosti astroidy vzhledem k počátku (viz úloha **4244.3**) a s je její délka.

4245. Vypočtěte souřadnice těžiště obvodu sférického trojúhelníka $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

4246. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní křivky $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ $(-\infty < t \le 0)$.

4247. Vypočtěte momenty setrvačnosti jednoho závitu šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \frac{h}{2\pi}t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ vzhledem k souřadnicovým osám.

4248. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu $\int_{OA} x\,dy - y\,dx$, kde O je počátek soustavy souřadnic a bod A má souřadnice $(1,2)$, je-li: a) OA úsečka; b) OA parabola, která má osu souměrnosti y; c) OA lomená křivka tvořená úsečkou OB ležící v ose x a úsečkou BA, která je rovnoběžná s osou y.

4249. Vypočtěte integrál

$$\int_{OA} x\,dy + y\,dx$$

podél křivek a), b) a c) z předchozí úlohy.

Vypočtěte následující křivkové integrály druhého druhu podél křivek orientovaných ve směru růstu jejich parametru:

4250. $\int_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, kde C je parabola $y=x^2$ $(-1\le x\le 1)$.

4251. $\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, kde C je křivka $y=1-|1-x|$ $(0\le x\le 2)$.

4252. $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$, kde C je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ s orientací proti směru hodinových ručiček.

4253. $\int_C (2a-y)dx+xdy$, kde C je oblouk cykloidy $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4254. $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, kde C je kružnice $x^2+y^2=a^2$ orientovaná proti směru hodinových ručiček.

4255. $\oint_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, kde $ABCDA$ je obvod čtverce s vrcholy $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$, $D=(0,-1)$.

4256. $\int_{AB} dx\sin y+dy\sin x$, kde AB je úsečka spojující body $A=(0,\pi)$ a $B=(\pi,0)$.

4257. $\oint_{OAO} dy\,\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-dx$, kde OA je část paraboly $y=x^2$ a AO je část přímky $y=x$.

Ověřte, že integrovaný výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce, a vypočtěte následující křivkové integrály:

4258. $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$.

4259. $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx+ydy$.

4260. $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy$.

4261. $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$.

4262. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$, kde $f(u)$ je spojitá funkce.

4263. $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ podél křivek, které neprotínají osu y.

4264. $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ podél křivek, které neprocházejí počátkem soustavy souřadnic.

4265. $\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$, kde φ a ψ jsou spojité funkce.

4266. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$.

4267. $\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ podél křivek, které neprotínají přímku $y = x$.

4268. $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ podél křivek, které neprotínají osu y.

4269. $\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$.

4270. Dokažte, že je-li $f(u)$ spojitá funkce a C je po částech hladká uzavřená křivka, pak $\oint\limits_C f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0$.

Najděte primitivní funkci z, je-li:

4271. $dz = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy$.

4272. $dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$.

4273. $dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy}{(x+y)^3}$.

4274. $dz = e^x[e^y(x - y + 2) + y]\,dx + e^x[e^y(x - y) + 1]\,dy$.

4275. $dz = \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^{m}}dx + \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n}\partial y^{m+1}}dy.$

4276. $dz = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dx - \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dy$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

4277. Dokažte, že pro křivkový integrál platí následující odhad:

$$\left|\int_C P\,dx + Q\,dy\right| \le LM,$$

kde L je délka křivky a $M = \max\sqrt{P^2+Q^2}$ na křivce C.

4278. Odhadněte integrál $I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \dfrac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}$. Dokažte, že $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

Vypočtěte následující křivkové integrály podél prostorových křivek (soustava souřadnic je pravotočivá) :

4279. $\int_C (y^2-z^2)dx + 2yz\,dy - x^2dz$, kde C je křivka $x=t,\ y=t^2, z=t^3$ $(0\le t\le 1)$ orientovaná ve směru růstu parametru.

4280. $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, kde C je jeden závit šroubovice $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$ orientovaný ve směru růstu parametru.

4281. $\int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=a^2,\ y=x\operatorname{tg}\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$ orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu ze strany kladných hodnot x.

4282. $\int_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, kde C je část Vivianiho křivky $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ $(z\ge 0, a>0)$ orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu ze strany kladných hodnot x $(x>a)$.

4283. $\int_C (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz$, kde C je hranice části sféry $x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0$ orientovaná tak, že vnější strana plochy zůstává nalevo od oblouku křivky.

Vypočtěte následující křivkové integrály totálních diferenciálů:

4284. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz$.

4285. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.

4286. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, kde bod (x_1,y_1,z_1) leží na sféře $x^2+y^2+z^2=a^2$ a bod (x_2,y_2,z_2) na sféře $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(a>0, b>0)$.

4287. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy + \chi(z)\,dz$, kde φ, ψ, χ jsou spojité funkce.

4288. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$, kde f je spojitá funkce.

4289. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx + + y\,dy + z\,dz)$, kde f je spojitá funkce.

Najděte primitivní funkci u, je-li:

4290. $du = (x^2-2yz)\,dx + (y^2-2xz)\,dy + (z^2-2xy)\,dz$.

4291. $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz$.

4292. $du = \frac{(x+y-z)\,dx + (x+y-z)\,dy + (x+y+z)\,dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

4293. Vypočtěte práci, kterou vykoná gravitační síla při přemístění tělesa o hmotnosti m z bodu (x_1,y_1,z_1) do bodu (x_2,y_2,z_2) (osa z má směr kolmo vzhůru).

4294. Vypočtěte práci síly pružnosti směřující k počátku soustavy souřadnic o velikosti úměrné vzdálenosti hmotného bodu od počátku, jestliže tento bod opíše ve směru proti hodinovým ručičkám čtvrtinu elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v prvním kvadrantu.

4295. Vypočtěte práci přitažlivé síly $F = k/r^2$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, působící na bod o jednotkové hmotnosti, který je přemístěn z bodu (x_1,y_1,z_1) do bodu (x_2,y_2,z_2).

§ 12. Greenova věta

1. **SOUVISLOST KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU S DVOJNÝM INTEGRÁLEM.** Nechť C je uzavřená a po částech hladká křivka, která je hranicí omezené souvislé množiny S a má orientaci takovou, že množina S je po levé straně při obíhání křivky, a nechť funkce $P=(x,y)$ a $Q=(x,y)$ jsou spolu se svými parciálními derivacemi $P'_y(x,y)$ a $Q'_x(x,y)$ spojité na množině S i na její hranici. Pak platí *Greenova věta*:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (1)$$

Rovnost (1) platí i pro omezenou množinu S vymezenou konečným počtem jednoduchých smyček, jestliže za její hranici C budeme považovat všechny hraniční křivky orientované tak, aby při jejich obíhání množina S zůstala po levé straně.

2. **OBSAH PLOCHY V TŘÍROZMĚRNÉM PROSTORU.** Obsah plochy S vymezené jednoduchou a po částech hladkou smyčkou C je roven

$$S = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx).$$

V tomto paragrafu, jestliže není stanoveno jinak, předpokládáme, že uzavřená křivka integrace je jednoduchá (neprotíná sebe sama) a že má orientaci takovou, aby množina, kterou vymezuje a která neobsahuje žádný nekonečně vzdálený bod, zůstala při jejím obíhání nalevo (obíhání v kladném směru).

4296. Pomocí Greenovy věty transformujte křivkový integrál

$$I = \oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left[xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy,$$

kde smyčka C je hranicí omezené plochy S.

4297. Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál

$$I = \oint_K (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy,$$

kde K je obvod trojúhelníka ABC a křivka integrace probíhá vrcholy $A=(1,1)$, $B=(3,2)$, $C=(2,5)$ v kladném směru. Výsledek ověřte pomocí přímého výpočtu křivkového integrálu.

Pomocí Greenovy věty vypočtěte následující křivkové integrály:

4298. $\oint_C xy^2dy - x^2y\,dx$, kde C je kružnice $x^2+y^2=a^2$.

4299. $\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$, kde C je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4300. $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, kde C je smyčka s kladnou orientací, která vymezuje množinu $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$.

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$.

4302. O kolik se liší hodnoty křivkových integrálů

$$I_1=\int_{AB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy \text{ a } I_2=\int_{p(AB)}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy,$$

kde AB je úsečka, která spojuje body $A=(1,1)$ a $B=(2,6)$, a $p(AB)$ je parabola se svislou osou souměrnosti, která prochází body A a B a počátkem soustavy souřadnic?

4303. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{p(AO)}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy,$$

kde $p(AO)$ je horní půlkružnice $x^2+y^2=ax$, vedoucí z bodu $A=(a,0)$ do bodu $O=(0,0)$.

NÁVOD: Doplňte křivku $p(AO)$ do uzavřené smyčky úsečkou OA na ose x.

4304. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{p(AB)}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy,$$

kde $\varphi(y)$ a $\varphi'(y)$ jsou spojité funkce a $p(AB)$ je libovolná dráha spojující body $A=(x_1,y_1)$ a $B=(x_2,y_2)$, která společně s úsečkou BA vymezuje plochu o obsahu S.

4305. Najděte dvakrát spojitě diferencovatelné funkce $P=(x,y)$ a $Q=(x,y)$ tak, aby křivkový integrál $I=\oint_C P(x+\alpha,y+\beta)dx+Q(x+\alpha,y+\beta)dy$ pro libovolnou uzavřenou křivku C nezávisel na konstantách α a β.

4306. Jakou podmínku musí splňovat diferencovatelná funkce $F(x,y)$, aby křivkový integrál $\int_{p(AB)}F(x,y)(ydx+xdy)$ nezávisel na tvaru dráhy $p(AB)$ z bodu A do bodu B?

4307. Vypočtěte integrál $I=\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, kde C je jednoduchá uzavřená křivka s kladnou orientací, která neprochází počátkem soustavy souřadnic.

NÁVOD: Uvažujte dva případy: 1) počátek soustavy souřadnic se nachází vně uzavřené křivky; 2) počátek souřadnic leží uvnitř plochy vymezené křivkou C.

Užitím křivkových integrálů vypočtěte obsahy ploch vymezených následujícími uzavřenými křivkami:

4308. Elipsou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4309. Astroidou $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4310. Parabolou $(x+y)^2 = ax$ $(a > 0)$ a osou x.

4311. Smyčkou Descartesova listu $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$.

NÁVOD: Uvažujte parametrizaci $y = tx$.

4312. Lemniskatou $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

NÁVOD: Položte $y = x\operatorname{tg}\varphi$.

4313. Křivkou $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ a osami souřadnic.

4314. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a > 0, n > 0, m > 0).$$

4315. Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a > 0, b > 0, n > 0)$$

a osami souřadnic.

NÁVOD: Použijte parametrizaci $\frac{x}{a} = \cos^{2/n}\varphi$ a $\frac{y}{b} = \sin^{2/n}\varphi$.

4316. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \quad (a > 0, b > 0, n > 1)$$

a osami souřadnic.

4317. Vypočtěte obsah plochy vymezené smyčkou křivky

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a > 0, b > 0, c > 0, n > 0).$$

4318. *Epicykloidou* nazveme křivku, kterou opisuje bod na kružnici o poloměru r valící se po vnější části nehybné kružnice o poloměru R. Vypočtěte obsah plochy, kterou vymezuje epicykloida, za předpokladu, že poměr $\frac{R}{r} = n$ je přirozené číslo. Vyšetřete speciální případ $r = R$ (kardioida).

4319. *Hypocykloidou* nazveme křivku, kterou opisuje bod na kružnici o poloměru r valící se po vnitřní části nehybné kružnice o poloměru R. Vypočtěte obsah plochy, kterou vymezuje hypocykloida, za předpokladu, že poměr $R/r = n$ je přirozené číslo $(n \ge 2)$. Vyšetřete speciální případ $r = R/4$ (astroida).

4320. Vypočtěte obsah části válcové plochy $x^2 + y^2 = ax$, kterou vymezuje plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4320.1 Dokažte, že objem tělesa, které vznikne rotací jednoduché uzavřené křivky C umístěné v horní polovině $y \geq 0$ kolem osy x, je roven $V = -\pi \oint_C y^2 dx$.

4321. Vypočtěte integrál $I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2}$, kde $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ a jednoduchá uzavřená křivka C obíhá počátek soustavy souřadnic $(ad - bc \neq 0)$.

4322. Vypočtěte integrál I z předchozí úlohy, jestliže $X = \varphi(x,y)$, $Y = \psi(x,y)$ a jednoduchá uzavřená křivka C obíhá počátek soustavy souřadnic, přičemž křivky $\varphi(x,y) = 0$ a $\psi(x,y) = 0$ se několikrát protínají uvnitř plochy vymezené křivkou C.

4323. Dokažte, že je-li C uzavřená křivka a $\boldsymbol{l}$ libovolný směrový vektor, pak $\oint_C \cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}) ds = 0$, kde $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor ke křivce C.

4324. Vypočtěte hodnotu integrálu $\oint_C [x \cos(\boldsymbol{n}, x) + y \cos(\boldsymbol{n}, y)] ds$, kde C je jednoduchá uzavřená křivka, která je hranicí omezené plochy S, a $\boldsymbol{n}$ je její vnější normálový vektor.

4325. Najděte $\lim_{d(S) \to 0} \frac{1}{S} \oint_C (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) ds$, kde S je plocha vymezená křivkou C, která obíhá bod (x_0, y_0), $d(S)$ je průměr plochy S, $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor vnější normály ke křivce C a $\boldsymbol{F}$ je spojitě diferencovatelný vektor na $S \cup C$.

§ 13. Využití křivkových integrálů ve fyzice

4326. Jakou silou přitahuje hmotnost M rovnoměrně rozložená na horní půlkružnici $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, bod o hmotnosti m, který je umístěn v počátku soustavy souřadnic?

4327. Vypočtěte *logaritmický potenciál jednoduché vrstvy* $u(x,y) = \oint_C \varkappa \ln \frac{1}{r} ds$, kde $\varkappa = \text{const}$ je její hustota, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ a C je kružnice $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Vyjádřete v polárních souřadnicích ϱ a φ logaritmické potenciály jednoduché vrstvy $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi$ a $I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi$, kde r je vzdálenost mezi body (ϱ, φ) a $(1, \psi)$ a m je přirozené číslo.

4329. Vypočtěte *Gaussův integrál* $u(x,y)=\oint_C \frac{\cos(r,n)}{r}ds$, kde $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ je délka vektoru r, který spojuje bod (x,y) s bodem $M=(\xi,\eta)$ jednoduché uzavřené křivky C, a (r,n) je úhel mezi vektorem r a vnějším normálovým vektorem n ke křivce C v jejím bodě M.

4330. Vyjádřete v polárních souřadnicích ϱ a φ *logaritmické potenciály dvojité vrstvy*

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{\cos(r,n)}{r}d\psi,\quad K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\,\frac{\cos(r,n)}{r}d\psi,$$

kde r je vzdálenost mezi bodem $A=(\varrho,\varphi)$ a proměnným bodem $M=(1,\psi)$, (r,n) je úhel mezi směrovým vektorem $AM=r$ a vektorem průvodiče $OM=n$ z bodu $O=(0,0)$ a m je přirozené číslo.

4331. Dvakrát diferencovatelnou funkci $u=u(x,y)$ nazveme *harmonickou*, jestliže vyhovuje rovnici $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$. Dokažte, že u je harmonickou funkcí tehdy a jen tehdy, když $\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$, kde C je libovolná uzavřená křivka a $\frac{\partial u}{\partial n}$ je derivace podle vnější normály k této křivce.

4332. Dokažte, že

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\iint_S u\,\Delta u\,dx\,dy+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

kde hladká uzavřená křivka C je hranicí omezené plochy S.

4333. Dokažte, že funkce, která je harmonická uvnitř omezené množiny S a na její hranici C, je jednoznačně určená svými hodnotami na křivce C (viz úloha **4332**).

4334. Dokažte *druhou Greenovu větu* v rovině

$$\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dx\,dy=\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}ds,$$

kde hladká křivka C je hranicí omezené plochy S a $\frac{\partial}{\partial n}$ je derivace ve směru vnější normály ke křivce C.

4335. Užitím druhé Greenovy věty dokažte, že jestliže $u=u(x,y)$ je harmonická funkce na uzavřené omezené množině S, pak

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

kde C je hranice množiny S, $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor ke křivce C, (x,y) je vnitřní bod množiny S a $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ je vzdálenost mezi bodem (x,y) a bodem (ξ,η) na křivce C.

NÁVOD: Uvažujte bod (x,y) množiny S spolu s jeho nekonečně malým kruhovým okolím a použijte druhou Greenovu větu na zbylé části množiny S.

4336. Dokažte *větu o střední hodnotě* pro harmonickou funkci $u(M)=u(x,y)$ ve tvaru

$$u(M)=\frac{1}{2\pi R}\oint_C u(\xi,\eta)ds,$$

kde C je kružnice o poloměru R se středem v bodě M.

4337. Dokažte, že funkce $u(x,y)$, která je harmonická a nekonstantní na omezené uzavřené množině, nenabývá své maximální ani minimální hodnoty ve vnitřním bodě této množiny (*princip maxima*).

4338. Dokažte *Riemannovu rovnost*

$$\iint_S\begin{vmatrix}L[u] & M[v]\\ u & v\end{vmatrix}dxdy=\oint_C Pdx+Qdy,$$

kde $L[u]=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial u}{\partial y}+cu$, $M[v]=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-a\dfrac{\partial v}{\partial x}-b\dfrac{\partial v}{\partial y}+cv$ (a,b,c jsou konstanty), P a Q jsou funkce a křivka C je hranicí omezené množiny S.

4339. Nechť $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$ jsou složky rychlosti stacionárního toku tekutiny. Vypočtěte množství tekutiny, které vyteče za jednotku času plochou S vymezenou křivkou C (tj. rozdíl mezi množstvím kapaliny, která vyteče a přiteče danou plochou). Jakou rovnici splňují funkce u a v, jestliže je tekutina nestlačitelná a v ploše S nejsou žádné zdroje ani odtoky kapaliny?

4340. Podle Biotova-Savartova-Laplaceova zákona indukuje elektrický proud i, který protéká vodičem délky ds, v bodě $M=(x,y,z)$ magnetické pole o intenzitě

$$d\boldsymbol{H}=ki\frac{(\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s})}{r^3},$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektor, který spojuje element $d\boldsymbol{s}$ s bodem M a k je příslušný koeficient úměrnosti. Najděte jednotlivé projekce H_x,H_y,H_z intenzity $\boldsymbol{H}$ v bodě M v případě vodiče tvaru smyčky C.

§ 14. Plošné integrály

1. **PLOŠNÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU.** Jestliže S je po částech hladká oboustranná plocha

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)\ \ ((u,v)\in\Omega) \tag{1}$$

a $f(x,y,z)$ je funkce definovaná a spojitá ve všech bodech plochy S, pak definujeme *plošný integrál prvního druhu* předpisem

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{2}$$

kde $E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$, $F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

Speciálně, jestliže má rovnice plochy S tvar $z=z(x,y)$ $((x,y)\in\sigma)$, kde $z(x,y)$ je jednoznačná spojitě diferencovatelná funkce, pak platí

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_\sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Tento integrál nezávisí na volbě strany plochy S. Jestliže budeme funkci $f(x,y,z)$ považovat za hustotu plochy S v bodě (x,y,z), pak má integrál (2) význam hmotnosti této plochy.

2. **PLOŠNÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU.** Nechť S je hladká oboustranná plocha, S^+ je její strana, kterou charakterizuje směr normálového vektoru $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ a nechť $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$ a $R=R(x,y,z)$ jsou tři funkce definované a spojité na ploše S. *Plošný integrál druhého druhu* definujeme jako

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS. \tag{3}$$

Jestliže je plocha S zadána v parametrickém tvaru (1), pak směrové kosiny normálového vektoru $\boldsymbol{n}$ mají tvar

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

kde $A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$, $C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ a znaménko před výrazem se určuje způsobem odpovídajícím zvolenému směru normálového vektoru. V případě přechodu na druhou stranu S^- plochy S se mění znaménko integrálu (3).

4341. Jak se liší hodnoty plošných integrálů

$$I_1=\iint_S(x^2+y^2+z^2)\,dS \text{ a } I_2=\iint_P(x^2+y^2+z^2)\,dP,$$

je-li S sféra $x^2+y^2+z^2=a^2$ a P povrch osmistěnu $|x|+|y|+|z|=a$ vepsaného do této sféry?

4342. Vypočtěte $\iint_S z\,dS$, kde S je část plochy $x^2+z^2=2az$ $(a>0)$ vymezená plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Vypočtěte následující plošné integrály prvního druhu:

4343. $\iint_S (x+y+z)\,dS$, kde S je plocha $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$.

4344. $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, kde S je povrch tělesa $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$.

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, kde S je povrch čtyřstěnu $x+y+z\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

4346. $\iint_S |xyz|\,dS$, kde S je část plochy $z=x^2+y^2$, kterou vymezuje rovina $z=1$.

4347. $\iint_S \frac{dS}{h}$, kde S je elipsoid a h je vzdálenost jeho středu od tečné roviny v bodě dS elipsoidu.

4348. $\iint_S z\,dS$, kde S je část šroubové plochy $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ $(0<u<a; 0<v<2\pi)$.

4349. $\iint_S z^2\,dS$, kde S je část povrchu kužele $x=r\cos\varphi\sin\alpha$, $y=r\sin\varphi\sin\alpha$, $z=r\cos\alpha$ $(0\leq r\leq a;\ 0\leq\varphi\leq 2\pi)$ a α je konstanta $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint_S (xy+yz+zx)\,dS$, kde S je část kuželové plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kterou vymezuje plocha $x^2+y^2=2ax$.

4351. Dokažte *Poissonův vzorec*

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du,$$

kde S je sféra $x^2+y^2+z^2=1$.

4352. Vypočtěte hmotnost části paraboloidu $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\leq z\leq 1)$ o hustotě, která se mění podle závislosti $\varrho=z$.

4352.1 Vypočtěte hmotnost polosféry $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$ o hustotě, která je v každém jejím bodě (x,y,z) rovna z/a.

4352.2 Vypočtěte statické momenty homogenní trojúhelníkové destičky $x+y+z=a$ $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ vzhledem k souřadnicovým rovinám.

4353. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní sféry $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$ o hustotě ϱ_0 vzhledem k ose z.

4354. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního kuželového pláště

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \quad (0\le z\le b)$$

o hustotě ϱ_0 vzhledem k přímce $y=0,\ z=b$.

4355. Vypočtěte souřadnice těžiště části homogenní plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kterou vymezuje plocha $x^2+y^2=ax$.

4356. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní plochy $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x\ge 0; y\ge 0; x+y\le a)$.

4356.1 Vypočtěte polární momenty setrvačnosti

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$$

následujících ploch S: a) povrchu krychle $\max\{|x|,|y|,|z|\}=a$; b) celého povrchu válce $x^2+y^2\le R^2;\ 0\le z\le H$.

4356.2 Vypočtěte momenty setrvačnosti trojúhelníkové destičky $x+y+z=1$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ vzhledem k souřadnicovým rovinám.

4357. Jakou silou přitahuje homogenní komolá kuželová plocha $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r$ $(0\le\varphi\le 2\pi, 0<b\le r\le a)$ o hustotě ϱ_0 bod o hmotnosti m, který se nachází ve vrcholu odpovídajícího kužele?

4358. Vypočtěte potenciál homogenní sférické plochy $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ o hustotě ϱ_0 vzhledem k bodu (x_0,y_0,z_0), tj. vypočtěte integrál

$$u=\iint_S \frac{\varrho_0\,dS}{r},$$

kde $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

4359. Vypočtěte $F(t)=\iint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\,dS$, kde

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2 & \text{pro } x^2+y^2+z^2\le 1,\\ 0 & \text{pro } x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

Sestrojte graf funkce $u=F(t)$.

4360. Vypočtěte integrál $F(t)=\iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\,dS$, kde

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2 & \text{pro } z\ge\sqrt{x^2+y^2},\\ 0 & \text{pro } z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

4361. Vypočtěte integrál $F(x,y,z,t)=\int\int_S f(\xi,\eta,\zeta)\,dS$, kde S je sféra $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$ o proměnném poloměru a

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1 \text{ pro } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2,\\ 0 \text{ pro } \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geq a^2,\end{cases}$$

za předpokladu, že $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$.

Vypočtěte následující plošné integrály druhého druhu:

4362. $\int\int_S (x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$, kde S je vnější strana sféry $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4363. $\int\int_S f(x)\,dy\,dz+g(y)\,dz\,dx+h(z)\,dx\,dy$, kde $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ jsou spojité funkce a S je vnější strana povrchu rovnoběžnostěnu $0\leq x\leq a$; $0\leq y\leq b$; $0\leq z\leq c$.

4364. $\int\int_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$, kde S je vnější strana kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$ $(0\leq z\leq h)$.

4365. $\int\int_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$, kde S je vnější strana elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4366. $\int\int_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, kde S je vnější strana sféry $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

§ 15. Stokesova věta

Jestliže $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce a C je jednoduchá uzavřená a po částech hladká křivka, která je hranicí omezené a po částech hladké oboustranné plochy S, pak platí *Stokesova věta*

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\int_S \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} dS,$$

kde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny normálového vektoru k ploše S orientované tak, aby křivka C obíhala proti směru hodinových ručiček (pro pravotočivou soustavu souřadnic).

4367. Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy x. Výsledek ověřte přímým výpočtem.

4368. Vypočtěte integrál

$$\int_{p(AB)} (x^2-yz)\,dx + (y^2-xz)\,dy + (z^2-xy)\,dz$$

podél části šroubovice $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$ od bodu $A=(a,0,0)$ k bodu $B=(a,0,h)$.

NÁVOD: Doplňte křivku $p(AB)$ úsečkou a použijte Stokesovu větu.

4369. Nechť C je uzavřená křivka, která leží v rovině $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny normálového vektoru roviny) a která vymezuje plochu S. Vypočtěte

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

přičemž křivka C je kladně orientována.

Užitím Stokesovy věty vypočtěte následující integrály:

4370. $\oint_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, kde C je elipsa $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$ $(0\le t\le\pi)$ orientovaná ve směru růstu parametru t.

4371. $\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, kde C je elipsa $x^2+y^2=a^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ $(a>0, h>0)$ orientovaná proti směru hodinových ručiček vzhledem ke kladné části osy x.

4372. $\oint_C (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, kde C je křivka $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R,\ z>0)$, kterou orientujeme tak, že nejmenší část vnější sférické plochy $x^2+y^2+z^2=2Rx$, kterou tato křivka vymezuje, zůstává po levé straně.

4373. $\oint_C (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz$, kde C je řez povrchu krychle $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ rovinou $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ s orientací proti směru hodinových ručiček vzhledem ke kladné části osy x.

4374. $\oint_C y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$, kde C je uzavřená křivka $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$ s orientací ve směru růstu parametru t.

4375. Dokažte, že funkce $W(x,y,z) = ki\iint_S \frac{\cos(r,n)}{r^2}dS$ ($k = \text{const}$), kde S je plocha vymezená křivkou C, n je normálový vektor plochy S a r je vektor průvodiče, který spojuje bod prostoru (x,y,z) s proměnným bodem (ξ,η,ζ) křivky C, je potenciálem magnetického pole H, které indukuje elektrický proud i protékající křivkou C (viz úloha **4340**).

§ 16. Gaussova-Ostrogradského věta

Nechť S je po částech hladká plocha, která je hranicí tělesa V, a $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ jsou funkce spojité spolu se svými parciálními derivacemi prvního řádu na množině $V \cup S$. Pak platí *Gaussova-Ostrogradského věta*

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$

kde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnějšího normálového vektoru plochy S.

Pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty transformujte následující plošné integrály (předpokládáme, že hladká plocha S vymezuje těleso V konečného objemu a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnějšího normálového vektoru plochy S):

4376. $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$.

4377. $\iint_S yzdydz + zxdzdx + xydxdy$.

4378. $\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$.

4379. $\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$.

4380. $\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$.

4381. Dokažte, že je-li S uzavřená jednoduchá plocha a $\boldsymbol{l}$ libovolný konstantní vektor, pak $\iint_S \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,dS = 0$, kde $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S.

4382. Dokažte, že objem tělesa, které vymezuje plocha S, je roven $V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$, kde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnějšího normálového vektoru plochy S.

4383. Dokažte, že objem kužele vymezeného hladkou kuželovou plochou $F(x,y,z) = 0$ a rovinou $Ax + By + Cz + D = 0$ je roven $V = \frac{1}{3}SH$, kde S je obsah podstavy kužele, která leží v dané rovině, a H je jeho výška.

4384. Vypočtěte objem tělesa vymezeného plochami $z = \pm c$ a $x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v$, $y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v$, $z = c\sin u$.

4385. Vypočtěte objem tělesa vymezeného plochou $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = -u + a\cos v$ $(u \geq 0)$ a rovinami $x = 0$, $z = 0$ $(a > 0)$.

4385.1 Vypočtěte objem tělesa, jehož hranicí je torus $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(0 < a \leq b)$.

4386. Dokažte platnost vzorce

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq t^2} f(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\right\} = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\,dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,dy\,dz \quad (t > 0).$$

Pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty vypočtěte následující plošné integrály:

4387. $\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, kde S je vnější strana pláště krychle $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

4388. $\iint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, kde S je vnější strana sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4389. $\iint_S (x - y + z)\,dy\,dz + (y - z + x)\,dz\,dx + (z - x + y)\,dx\,dy$, kde S je vnější strana plochy $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

4390. Vypočtěte $\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, kde S je část kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leq z \leq h)$ a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny normálového vektoru této plochy.

NÁVOD: Uvažujte navíc část roviny $z = h$, $x^2 + y^2 \leq h^2$.

4391. Dokažte rovnost

$$\iiint_V \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,dS,$$

kde S je uzavřená plocha, která vymezuje těleso V, $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S v jejím bodě (ξ,η,ζ), $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ a $\boldsymbol{r}$ je vektor průvodiče spojujícího bod (x,y,z) s bodem (ξ,η,ζ).

4392. Vypočtěte *Gaussův integrál*

$$I(x,y,z)=\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\,dS,$$

kde S je jednoduchá uzavřená hladká plocha, která vymezuje těleso V, $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S v bodě (ξ,η,ζ), $\boldsymbol{r}$ je vektor průvodiče spojujícího bod (x,y,z) s bodem (ξ,η,ζ) a $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$. Uvažujte dva případy: a) těleso vymezené plochou S neobsahuje bod (x,y,z); b) těleso vymezené plochou S bod (x,y,z) obsahuje.

4393. Dokažte, že je-li $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ a S je hladká plocha, která vymezuje těleso V o konečném objemu, pak platí následující vztahy:

a) $$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint_V \Delta u\,dx\,dy\,dz;$$

b) $$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+\iiint_V u\,\Delta u\,dx\,dy\,dz,$$

kde u je funkce spojitá na množině $V\cup S$ spolu se svými parciálními derivacemi do druhého řádu včetně a $\frac{\partial u}{\partial n}$ je její derivace podle vnější normály k ploše S.

4394. Dokažte *druhou Greenovu větu* v prostoru:

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy\,dz=\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

kde těleso V je vymezeno plochou S, $\boldsymbol{n}$ je směrový vektor vnější normály plochy S a funkce $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ jsou dvakrát diferencovatelné na množině $V\cup S$.

4395. Funkce $u=u(x,y,z)$, která má na nějaké množině spojité derivace do druhého řádu včetně, se nazývá *harmonickou* na této množině, jestliže

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Dokažte, že jestliže je u harmonická funkce na omezené uzavřené množině V, která je vymezena hladkou plochou S, pak platí následující vztahy:

a) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$; b) $\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS$,

kde $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S. Pomocí vztahu b) dokažte, že harmonická funkce na množině V je jednoznačně určena hodnotami na její hranici S.

4396. Dokažte, že je-li funkce $u = u(x,y,z)$ harmonická na omezené uzavřené množině V, která je vymezena hladkou plochou S, pak

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektor průvodiče spojujícího vnitřní bod (x,y,z) množiny V s bodem (ξ,η,ζ) plochy S, $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}$ a $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S v jejím bodě (ξ,η,ζ).

4397. Dokažte, že je-li funkce $u = u(x,y,z)$ harmonická uvnitř sféry S o poloměru R a středu v bodě (x_0,y_0,z_0), pak

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x,y,z)\,dS \quad (\textit{věta o střední hodnotě}).$$

4398. Dokažte, že funkce $u = u(x,y,z)$, která je spojitá na omezené uzavřené množině V a harmonická uvnitř této množiny, nenabývá své maximální ani minimální hodnoty ve vnitřním bodě, pokud není identicky konstantní funkcí (*princip maxima*).

4399. Těleso V bylo ponořeno do kapaliny. Pomocí Pascalova zákona dokažte, že těleso je nadlehčováno silou orientovanou vzhůru, jejíž velikost je rovna tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem tělesa (*Archimedův zákon*).

4400. Nechť S_t je koule $(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 = t^2$ o proměnném poloměru a nechť $f(\xi,\eta,\zeta)$ je spojitá funkce. Dokažte, že funkce

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t} dS_t$$

je řešením *vlnové rovnice* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ s počátečními podmínkami

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x,y,z).$$

NÁVOD: Vyjádřete derivaci $\frac{\partial u}{\partial t}$ pomocí trojného integrálu.

§ 17. Základy vektorové analýzy a teorie pole

1. **GRADIENT.** Jestliže $u(\boldsymbol{r}) = u(x,y,z)$, kde $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, je spojitě diferencovatelné skalární pole, pak jeho *gradientem* nazveme vektor

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

neboli $\operatorname{grad} u = \nabla u$, kde $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$. Gradient pole u má v bodě (x,y,z) směr normálového vektoru *ekvipotenciální plochy* $u(x,y,z) = C$, která tímto bodem prochází. Velikost tohoto vektoru je

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

a jeho směr je směrem největšího spádu pole u.
Derivace pole u ve směru $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u\, \boldsymbol{l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. **DIVERGENCE A ROTACE VEKTOROVÉHO POLE.** Je-li $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + a_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$ spojitě diferencovatelné *vektorové pole*, pak skalár

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

nazýváme *divergencí* tohoto pole. Vektor

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

nazýváme *rotací* vektorového pole $\boldsymbol{a}$.

3. **TOK VEKTORU PLOCHOU.** Jestliže vektor $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ určuje nějaké vektorové pole na množině Ω, pak *tokem vektoru danou plochou* S ležící v množině Ω daným směrem, který charakterizuje normálový vektor $\boldsymbol{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, nazýváme integrál

$$\iint_S a_n \, dS = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\, dS,$$

kde $a_n = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ je projekce vektoru do směru normálového vektoru. *Gaussova-Ostrogradského věta* má ve vektorovém zápisu tvar

$$\iint_S a_n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz,$$

kde S je plocha, která vymezuje těleso V a $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vnější normálový vektor plochy S.

4. **CIRKULACE VEKTORU.** *Křivkovým integrálem* vektoru $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ na nějaké křivce C (*práce pole*), nazýváme hodnotu

$$\int_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Jestliže je křivka C uzavřená, pak tento křivkový integrál nazýváme *cirkulací vektoru* $\boldsymbol{a}$ na křivce C. Ve vektorovém zápisu má *Stokesova věta* tvar

$$\oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_n\,dS,$$

kde C je uzavřená křivka, která vymezuje plochu S, přičemž směr normálového vektoru $\boldsymbol{n}$ plochy je třeba zvolit tak, aby pro pozorovatele stojícího na ploše S s hlavou ve směru normálového vektoru byla křivka C orientována proti směru hodinových ručiček (pro pravotočivý souřadnicový systém).

5. **POTENCIÁLNÍ POLE.** Vektorové pole $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, které je gradientem nějakého skalárního pole u, $\mathrm{grad}\,u = \boldsymbol{a}$, nazýváme *potenciálním polem* a veličina u se nazývá *potenciálem pole*. Je-li potenciál u jednoznačnou funkcí, pak platí

$$\int_{AB} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

Speciálně je v tomto případě cirkulace vektoru $\boldsymbol{a}$ rovna nule. Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby vektorové pole $\boldsymbol{a}$, které je definováno na souvislé oblasti, bylo potenciálním polem, je rovnost $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = 0$.

4401. Určete velikost a směr gradientu skalárního pole $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ v následujících bodech: a) $(0,0,0)$; b) $(1,1,1)$; c) $(2,0,1)$. Ve kterém bodě je tento gradient nulový?

4401.1 Nechť $u = xy - z^2$. Určete velikost a směr gradientu skalárního pole u v bodě $(-9,12,10)$. Čemu se rovná derivace $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ ve směru osy souměrnosti souřadnicového kvadrantu xy?

4402. Ve kterých bodech prostoru xyz je gradient skalárního pole $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ a) kolmý na osu z; b) rovnoběžný s osou z; c) nulový?

4403. Nechť $u = \ln\dfrac{1}{r}$ je skalární pole, kde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. Pro které body prostoru xyz platí rovnost $|\mathrm{grad}\,u| = 1$?

4404. Sestrojte ekvipotenciální plochy skalárního pole $u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$. Najděte ekvipotenciální plochu, která prochází bodem $(9,12,28)$. Čemu se rovná $\max u$ na množině $x^2 + y^2 + z^2 \le 36$?

4405. Vypočtěte úhel φ mezi gradienty pole $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodech $(1,2,2)$ a $(-3,1,0)$.

4406. Nechť $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ je skalární pole. Sestrojte ekvipotenciální plochy a plochy se stejnou velikostí gradientu. Určete $\inf u$, $\sup u$, $\inf |\operatorname{grad} u|$, $\sup |\operatorname{grad} u|$ na množině $1 < z < 2$.

4407. S přesností na nekonečně malou veličinu vyššího řádu určete vzdálenost mezi dvěma nekonečně blízkými ekvipotenciálními plochami $u(x,y,z) = c$ a $u(x,y,z) = c + \Delta c$ v bodě (x_0,y_0,z_0), kde $u(x_0,y_0,z_0) = c$ $(\operatorname{grad} u(x_0,y_0,z_0) \neq 0)$.

4408. Dokažte platnost následujících vztahů:

a) $\operatorname{grad}(u+c) = \operatorname{grad} u$ (c je konstanta);

b) $\operatorname{grad} cu = c \operatorname{grad} u$ (c je konstanta); c) $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;

d) $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$; e) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$;

f) $\operatorname{grad} f'(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

4409. Vypočtěte: a) $\operatorname{grad} \boldsymbol{r}$; b) $\operatorname{grad} \boldsymbol{r}^2$; c) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{\boldsymbol{r}}$, kde $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

4410. Vypočtěte $\operatorname{grad} f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4411. Vypočtěte $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})$, kde $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor a $\boldsymbol{r}$ je vektor průvodiče z počátku soustavy souřadnic.

4412. Vypočtěte $\operatorname{grad}\{|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2\}$ ($\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor).

4413. Dokažte rovnost $\operatorname{grad} f(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \dfrac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$.

4414. Dokažte rovnost $\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v$,

kde $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\nabla^2 = \nabla\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

4415. Dokažte, že jestliže je funkce $u = u(x,y,z)$ diferencovatelná na konvexní množině Ω a $|\operatorname{grad} u| \leq M$, kde M je konstanta, pak pro libovolné dva body A, B z množiny Ω je $|u(A) - u(B)| \leq M\varrho(A,B)$, kde $\varrho(A,B)$ je vzdálenost mezi body A a B.

4415.1 Vyjádřete gradient funkce $u = u(x,y,z)$ a) v cylindrických souřadnicích; b) ve sférických souřadnicích.

4416. Najděte derivaci skalárního pole $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ v daném bodě (x,y,z) ve směru vektoru jeho průvodiče $\boldsymbol{r}$. V jakém případě bude tato derivace rovna velikosti gradientu?

4417. Najděte derivaci skalárního pole $u = 1/r$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ve směru $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. V jakém případě je tato derivace nulová?

4418. Najděte derivaci pole $u=u(x,y,z)$ ve směru jeho gradientu $v=v(x,y,z)$. V jakém případě bude tato derivace rovna nule?

4419. Určete tvar vektorového pole $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\operatorname{grad} u$, jestliže

$$u=\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ a } \boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

4420. Určete siločáry vektorového pole $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$.

4421. Dokažte přímým výpočtem, že divergence pole $\boldsymbol{a}$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic.

4422. Dokažte, že

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\int\!\!\int_S a_n\,dS,$$

kde S je uzavřená plocha, která vymezuje těleso o objemu V obsahující bod M, $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S a $d(S)$ je průměr plochy S.

4422.1 Vypočtěte divergenci pole

$$\boldsymbol{a}=\frac{-i\boldsymbol{x}+j\boldsymbol{y}+k\boldsymbol{z}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

v bodě $(3,4,5)$. Čemu se přibližně rovná tok Π vektoru $\boldsymbol{a}$ nekonečně malou sférou $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\varepsilon^2$?

4423. Vypočtěte $\operatorname{div}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$.

4424. Dokažte následující vztahy:

a) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b}$;

b) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\operatorname{grad}u$ ($\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor a u je skalární pole);

c) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\operatorname{grad}u$.

4425. Vypočtěte $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$.

4426. Vypočtěte $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Pro které funkce f je $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$?

4427. Vypočtěte: a) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$; b) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}/r$.

4428. Vypočtěte $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{c}]$, kde $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor.

4429. Vypočtěte $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]$. V jakém případě je divergence tohoto vektoru rovna nule?

4430. Vypočtěte: a) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$; b) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$.

4431. Tekutina, která vyplňuje prostor, rotuje kolem osy z proti směru hodinových ručiček s konstantní úhlovou rychlostí ω. Vypočtěte divergenci vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ a vektoru zrychlení $\boldsymbol{w}$ v bodě (x,y,z) v určitém časovém okamžiku.

4432. Určete divergenci gravitačního silového pole indukovaného konečným počtem hmotných bodů.

4433. Vyjádřete divergenci rovinného vektoru $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ v polárních souřadnicích r a φ.

4434. Vyjádřete $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(x,y,z)$ v ortogonálních křivočarých souřadnicích u,v,w, jestliže $x=f(u,v,w)$, $y=g(u,v,w)$, $z=h(u,v,w)$. Jako speciální případ odvoďte výraz pro $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ v cylindrických a sférických souřadnicích.

NÁVOD: Uvažujte tok vektoru $\boldsymbol{a}$ nekonečně malým rovnoběžnostěnem, který je vymezen plochami $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, $w=\text{const}$.

4435. Dokažte platnost následujících vztahů:

a) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$; b) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}(u\times\boldsymbol{a})$.

4436. Vypočtěte: a) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}$; b) $\operatorname{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$.

4436.1 Vypočtěte velikost a směr vektoru $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ v bodě $(1,2,-2)$, je-li

$$\boldsymbol{a}=\frac{y}{z}\boldsymbol{i}+\frac{z}{x}\boldsymbol{j}+\frac{x}{y}\boldsymbol{k}.$$

4437. Vypočtěte: a) $\operatorname{rot} cf(r)$; b) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$ ($\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor).

4438. Dokažte, že $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

4439. Vypočtěte: a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u)$; b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})$.

4440. Tekutina, která vyplňuje prostor, rotuje kolem osy $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ konstantní úhlovou rychlostí ω. Vypočtěte rotaci vektoru obvodové rychlosti $\boldsymbol{v}$ v bodě (x,y,z) v určitém časovém okamžiku.

4440.1 Najděte vyjádření rotace rovinného vektoru $\boldsymbol{a}=a(r,\varphi)$ v polárních souřadnicích r a φ.

4440.2 Vyjádřete $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(x,y,z)$: a) v cylindrických souřadnicích; b) ve sférických souřadnicích.

4441. Vypočtěte tok vektoru $\boldsymbol{r}$: a) pláštěm kužele $x^2+y^2\le z^2$ $(0\le z\le h)$; b) podstavou tohoto kužele.

4442. Vypočtěte tok vektoru $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}yz+\boldsymbol{j}xz+\boldsymbol{k}xy$: a) pláštěm válce $x^2+y^2\le a^2$ $(0\le z\le h)$; b) celým povrchem tohoto válce.

4443. Vypočtěte tok vektoru průvodiče $\boldsymbol{r}$ plochou $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$.

4444. Vypočtěte tok vektoru $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ kladným oktantem sféry $x^2+y^2+z^2=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

4445. Vypočtěte tok vektoru $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ celým povrchem pyramidy vymezené rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ $(a > 0)$. Výsledek ověřte pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty.

4445.1 Vypočtěte tok vektoru $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ sférou $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

4446. Dokažte, že tok vektoru rot $\boldsymbol{a}$ plochou S zadanou rovnicí

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) \ \ ((u,v) \in \Omega) \text{ je roven } \iint_S a_n \, dS = \iint_\Omega \left(\boldsymbol{a} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) du\,dv,$$

kde $a_n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy S.

4447. Vypočtěte tok vektoru $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{r}/r^3$ (m je konstanta) uzavřenou plochou S, která obklopuje počátek soustavy souřadnic.

4448. Vypočtěte tok vektoru

$$a(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right),$$

kde e_i jsou konstanty a r_i je vzdálenost bodu M_i (*zdroje*) od pohybujícího se bodu $M(\boldsymbol{r})$, uzavřenou plochou S, která body $M_i = (i = 1, 2, \ldots, n)$ obklopuje.

4449. Dokažte, že

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u \, dx\,dy\,dz,$$

jestliže plocha S vymezuje těleso V.

4450. Množství tepla, které vtéká do tepelného pole u za jednotku času elementem plochy dS, se rovná $dQ = -k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, dS$, kde k je koeficient tepelné vodivosti a $\boldsymbol{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy S. Vypočtěte celkové množství tepla, které absorbuje těleso V za jednotku času. Pomocí vztahu pro rychlost zvyšování teploty odvoďte rovnici pro teplotu tělesa (*rovnici vedení tepla*).

4451. Nestlačitelná tekutina, která vyplňuje prostor V, je v pohybu. Za předpokladu, že v tělese V nejsou žádné zdroje ani odtoky, odvoďte *rovnici kontinuity*

$$\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div}(\varrho v) = 0,$$

kde $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je hustota kapaliny, v vektor rychlosti a t čas.

NÁVOD: Uvažujte tok tekutiny libovolným tělesem ω, které je částí V.

4452. Vypočtěte práci vektoru $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ podél části šroubovice $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4452.1 Vypočtěte práci vektorového pole $\boldsymbol{a} = \frac{1}{y}\boldsymbol{i} + \frac{1}{z}\boldsymbol{j} + \frac{1}{x}\boldsymbol{k}$ podél úsečky, která spojuje body $(1,1,1)$ a $(2,4,8)$.

4452.2 Vypočtěte práci vektorového pole $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}e^{y-z} + \boldsymbol{j}e^{z-x} + \boldsymbol{k}e^{x-y}$ podél úsečky s krajními body $(0,0,0)$ a $(1,3,5)$.

4452.3 Vypočtěte práci vektorového pole $\boldsymbol{a} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$ podél kratší části poledníku sféry $x^2+y^2+z^2=25$, který spojuje body $(3,4,0)$ a $(0,0,5)$.

4453. Vypočtěte práci vektoru $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$, kde f je spojitá funkce, na dráze AB.

4454. Vypočtěte cirkulaci vektoru $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ (c je konstanta): a) na kružnici $x^2+y^2=1$, $z=0$; b) na kružnici $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$.

4455. Vypočtěte cirkulaci Γ vektoru

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$$

na křivce C ve dvou případech: a) C neobklopuje osu z; b) C obklopuje osu z.

4455.1 Je zadáno vektorové pole $\boldsymbol{a} = \frac{y}{\sqrt{z}}\boldsymbol{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j} + \sqrt{xy}\,\boldsymbol{k}$. Pomocí výpočtu $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ v bodě $(1,1,1)$ vyjádřete přibližně cirkulaci Γ vektorového pole nekonečně malé kružnice

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2,\quad (x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0,$$

kde $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4456. Rovinné stacionární proudění tekutiny se popisuje vektorem rychlosti $\boldsymbol{w} = u(x,y)\boldsymbol{i} + v(x,y)\boldsymbol{j}$. Vypočtěte: 1) množství Q tekutiny, která protéká uzavřenou křivkou C, jež vymezuje plochu S (průřez výtoku tekutiny); 2) cirkulaci Γ vektoru rychlosti na křivce C. Jaké rovnice splňují funkce u a v, jestliže je tekutina nestlačitelná a její tok má nulovou rotaci?

4457. Dokažte, že vektorové pole $\boldsymbol{a} = yz(2x+y+z)\boldsymbol{i} + xz(x+2y+z)\boldsymbol{j} + xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ je potenciální, a najděte jeho potenciál.

4457.1 Přesvědčete se, že pole

$$\boldsymbol{a} = \frac{2}{(y+z)^{1/2}}\boldsymbol{i} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\boldsymbol{j} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\boldsymbol{k}$$

je potenciální, a vypočtěte práci pole na dráze, která spojuje v kladném oktantu body $(1,1,3)$ a $(2,4,5)$.

4458. Určete potenciál gravitačního pole $\boldsymbol{a} = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$, které je indukované bodem o hmotnosti m umístěným v počátku soustavy souřadnic.

4459. Určete potenciál gravitačního pole, které je indukované soustavou těles o hmotnostech m_i $(i=1,2,\ldots,n)$ umístěných v bodech M_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

4460. Dokažte, že vektorové pole $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$, kde $f(r)$ je jednoznačná spojitá funkce, je polem potenciálním. Najděte potenciál tohoto pole.

VÝSLEDKY

ČÁST PRVNÍ

KAPITOLA I

16. 0; 1. **17.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **22.** $-1{,}01 < x < -0{,}99$. **23.** $x \le -8$; $x \ge 12$. **24.** $x < -\frac{1}{2}$. **25.** $0 < x < \frac{2}{3}$. **26.** $|x| \le 6$.

27. $x > -\frac{1}{2}$. **28.** $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. **29.** $\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10}$; $\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}$. **31.** Druhé. **32.** Dvě číslice.

33. Není větší než 0,41 %. **34.** $9{,}9102\,\mathrm{cm}^2 \le S \le 10{,}0902\,\mathrm{cm}^2$; $\Delta \le 0{,}0902\,\mathrm{cm}^2$; $\delta \le 0{,}91\%$.

35. $3{,}93\,\mathrm{g/cm}^3 \pm 0{,}27\,\mathrm{g/cm}^3$; $\delta \le 7{,}3\%$. **36.** $\delta \le 3{,}05\%$. **37.** $172{,}480\,\mathrm{m}^3 \le V \le 213{,}642\,\mathrm{m}^3$;

$V = 192{,}660\,\mathrm{m}^3 \pm 20{,}982\,\mathrm{m}^3$; $\delta \approx 12\%$. **38.** $\Delta \le 0{,}17\,\mathrm{mm}$. **39.** $\Delta < 0{,}0005\,\mathrm{m}$. **42.** a) $N \ge \frac{1}{\varepsilon}$; b) $N \ge \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$;

c) $N \ge 1 + \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$; d) $N \ge \frac{\log\varepsilon}{\log 0{,}999} \approx 2330 \log\frac{1}{\varepsilon}$. **43.** a) $N \ge E$; b) $N \ge \left(\frac{\log E}{\log 2}\right)^2$; c) $N \ge 10^{10}$. **46.** 0. **47.** 0.

48. 0. **49.** $\frac{1}{3}$. **50.** $\frac{1-b}{1-a}$. **51.** $\frac{1}{2}$. **52.** $\frac{1}{2}$. **53.** $\frac{1}{3}$. **54.** $\frac{4}{3}$. **55.** 3. **56.** 1. **57.** 2. **67.** a) druhý; b) první;

c) druhý. **72.** $e = 2{,}71828\ldots$ **92.** Je rovna 1 pro $x \ne 0$; je z uzavřeného intervalu $[-1, 1]$ nebo neexistuje pro

$a = 0$. **96.** $x_3 = 1\frac{1}{8}$. **97.** $x_{100} = \frac{1}{20}$. **98.** $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2{,}49 \cdot 10^{452}$. **99.** $x_4 = x_5 = -120$. **100.** $x_{10} = 20$.

101. 0; 1; 1; 1. **101.1** $-3\frac{1}{2}$; 5; -2; 2. **102.** -1; $1\frac{1}{2}$; 0; 1. **103.** 0; 2; 0; 2. **104.** -4; 6; -4; 6. **105.** $-\frac{1}{2}$; 1;

$-\frac{1}{2}$; 1. **106.** $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. **107.** $-\infty$; -1; $-\infty$; $-\infty$. **108.** 0; $+\infty$; 0; $+\infty$. **109.** $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. **110.** -5;

1,25; 0; 0. **111.** $-\frac{1}{2}$; 1. **112.** $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $e + 1$. **113.** 0; 1. **114.** 1; 2. **115.** 0; 1. **116.** 0; 1. **117.** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$;

...; 0. **118.** Všechna reálná čísla mezi 0 a 1, včetně. **119.** 1; 5. **120.** a; b. **127.** a) diverguje; b) může jak

divergovat, tak i konvergovat. **128.** a) nelze; b) nelze. **129.** Ne. **130.** Ne. **144.** a) 0; b) 0. **147.** $\ln 2$.

148. $\frac{1}{3}(a + 2b)$. **151.** $-\infty < x < +\infty$, $x \ne -1$. **152.** $-\infty < x \le -\sqrt{3}$ a $0 \le x \le \sqrt{3}$. **153.** $-1 \le x < 1$. **154.** a) $|x| > 2$;

b) $x > 2$. **155.** $4k^2\pi^2 \le x \le (2k+1)^2\pi^2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. **156.** $|x| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ a $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)} \le |x| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$

$(k = 1, 2, \ldots)$. **157.** $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ a $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. **158.** $x > 0$, $x \ne n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

159. $-\frac{1}{3} \le x \le 1$. **160.** $|x - k\pi| \le \frac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **161.** $10^{\pi(2k-1/2)} < x < 10^{\pi(2k+1/2)}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

162. $x = -1, -2, -3, \ldots$ a $x \ge 0$. **163.** $x < 0$, $x \ne -n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. **164.** $1 < x \le 2$. **165.** $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

165.1 $x>4$. **165.2** $k\pi+\frac{\pi}{4}\le x<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$. **165.3** $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{3\pi}{2}$. **166.** $-1\le x\le 2$; $0\le y\le 1\frac{1}{2}$. **167.** $2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; $-\infty<y\le\log 3$. **168.** $-\infty<x<+\infty$; $0\le y\le\pi$. **169.** $1\le x\le 100$; $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$. **170.** $x=\frac{p}{2q+1}$, kde p a q jsou celá čísla; $y=\pm1$. **171.** $P=2b+2\left(1-\frac{b}{h}\right)x$ $(0<x<h)$; $S=bx\left(1-\frac{x}{h}\right)$ $(0<x<h)$. **172.** $a=\sqrt{100-96\cos x}$ $(0<x<\pi)$; $S=24\sin x$ $(0<x<\pi)$.

173. $S=\frac{h}{a-b}x^2$ pro $0\le x\le\frac{a-b}{2}$; $S=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right)$ pro $\frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}$; $S=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right]$, pro $\frac{a+b}{2}\le x\le a$.

174. $m(x)=0$ pro $-\infty<x\le 0$; $m(x)=2x$ pro $0<x\le 1$; $m(x)=2$ pro $1<x\le 2$; $m(x)=3$ pro $2<x\le 3$; $m(x)=4$ pro $3<x<+\infty$. **178.** $E_y=\{0\le y\le 4\}$. **179.** $E_y=\{1<y<3\}$. **180.** $E_y=\{0<y<1\}$. **181.** $E_y=\{1\le|y|<+\infty\}$. **182.** $E_y=\{1\le y\le 2\}$. **183.** $a<y<b$, je-li $a<b$ a $b<y<a$, je-li $a>b$. **184.** $1<y<+\infty$. **185.** $0>y>-\infty$ a $+\infty>y>1$. **186.** $0<y\le\frac{1}{2}$. **187.** $+\infty>y>-\infty$. **188.** $0<y<\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{2}\le y<2$. **189.** 0; 0; 0; 0; 24. **190.** 0; -6; 4. **191.** 1; 1; 1; 2. **192.** -1; 0; 1; 2; 4. **193.** 1; $\frac{1+x}{1-x}$; $\frac{-x}{2+x}$; $\frac{2}{1+x}$; $\frac{x-1}{x+1}$; $\frac{1+x}{1-x}$. **194.** a) $f(x)=0$ pro $x=-1, x=0$ a $x=1$; $f(x)>0$ pro $-\infty<x<-1$ a $0<x<1$; $f(x)<0$ pro $-1<x<0$ a $1<x<+\infty$; b) $f(x)=0$ pro $x=\pm\frac{1}{k}$; $f(x)>0$ pro $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ a $-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$ $(k=0,1,2,\ldots)$; $f(x)<0$ pro $\frac{1}{2k+2}<x<\frac{1}{2k+1}$ a $-\frac{1}{2k}<x<-\frac{1}{2k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$; c) $f(x)=0$ pro $x\le 0$ a $x=1$; $f(x)>0$ pro $0<x<1$; $f(x)<0$ pro $1<x<+\infty$. **195.** a) a; b) $2x+h$; c) $a^x\frac{a^h-1}{h}$. **197.** $f(x)=\frac{7}{3}x-2$; $f(1)=\frac{1}{3}$; $f(2)=2\frac{2}{3}$. **198.** $f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$; $f(-1)=-\frac{2}{3}$; $f(0{,}5)=2\frac{17}{24}$. **199.** $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2$. **200.** $f(x)=10+5\cdot 2^x$. **203.** a) $2k\pi<x<\pi+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; b) $1<x<e$; c) $x>0$, $x\ne k$ $(k=0,1,2,\ldots)$. **205.** a) $z=x+y$; b) $z=\frac{xy}{x+y}$; c) $z=\frac{x+y}{1-xy}$; d) $z=\frac{x+y}{1+xy}$. **206.** $\varphi(\varphi(x))=x^4$; $\psi(\psi(x))=2^{2x}$; $\varphi(\psi(x))=2^{2x}$; $\psi(\varphi(x))=2^{x^2}$. **207.** $\varphi(\varphi(x))=\operatorname{sgn}x$; $\psi(\psi(x))=x$ $(x\ne 0)$; $\varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x))=\operatorname{sgn}x$ $(x\ne 0)$. **208.** $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$; $\psi(\varphi(x))=\psi(x)$; $\psi(\psi(x))=\varphi(\psi(x))=0$. **209.** $-\frac{1-x}{x}$; x $(x\ne 0, x\ne 1)$. **210.** $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. **211.** x^2-5x+6. **212.** x^2-2 $\left(|x|\ge 2\frac{1}{2}\right)$. **213.** $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. **213.1** $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. **221.** a) Je rostoucí pro $a>0$ a klesající pro $a<0$; b) pro $a>0$ je klesající na intervalu $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ a rostoucí na intervalu $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$; c) je rostoucí; d) pro $ad-bc>0$ je rostoucí na intervalech $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ a $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$; e) je rostoucí pro $a>1$ a klesající pro $0<a<1$. **222.** Můžeme, je-li základ logaritmů větší než 1. **224.** $\frac{y-3}{2}$ $(-\infty<y<+\infty)$. **225.** a) $-\sqrt{y}$ $(0\le y<+\infty)$; b) $\sqrt{y}$ $(0\le y<+\infty)$. **226.** $\frac{1-y}{1+y}$ $(y\ne -1)$. **227.** a) $-\sqrt{1-y^2}$ $(0\le y\le 1)$; b) $\sqrt{1-y^2}$ $(0\le y\le 1)$. **228.** $\operatorname{Argsinh}y=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ $(-\infty<y<+\infty)$. **229.** $\operatorname{Argtgh}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ $(-1<y<1)$. **230.** $x=y$ pro $-\infty<y<1$; $x=\sqrt{y}$ pro $1\le y\le 16$; $x=\log_2 y$ pro $16<y<+\infty$. **231.** a) Lichá; b) sudá; c) sudá; d) lichá; e) lichá.

233. a) Periodická, $T=2\pi/\lambda$; b) periodická, $T=2\pi$, c) periodická, $T=6\pi$; d) periodická, $T=\pi$; e) neperiodická; f) periodická, $T=\pi$; g) neperiodická; h) neperiodická. **241.** $t=1\frac{2}{3}$ s, $x=-3\frac{1}{3}$ m. **243.** $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$. **244.** $y=x-\frac{x^2}{36000}$; 9 km; 36 km. **251.** $x_0=-\frac{d}{c}$; $y_0=\frac{a}{c}$. **252.** $V=V_0\frac{p_0}{p}$ $(p>0)$. **263.** $k=\frac{a}{a_1}$, $m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$, $n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)$, $x_0=-\frac{b_1}{a_1}$. **264.** $y=\frac{10}{x^2}$. **287.** $A=\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin x_0=-\frac{a}{A}$, $\cos x_0=\frac{b}{A}$. **356.** $y=2\sin x$ pro $|x-\pi k|\le\frac{\pi}{6}$ a $y=(-1)^k$ pro $\frac{\pi}{6}<|x-\pi k|<\frac{5\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **357.** a) $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$; b) a c) $y=x^2$ pro $x\ge0$; $y=0$ pro $x<0$; d) $y=x$ pro $x<0$; $y=x^4$ pro $x\ge0$. **358.** a) $y=1$; b) $y=1$ pro $1\le|x|\le\sqrt{3}$; $y=0$ pro $|x|<1$ a $|x|>\sqrt{3}$; c) $y=1$ pro $|x|\le1$; $y=2$ pro $|x|>1$; d) $y=-2$ pro $|x|>2$; $y=2-(2-x^2)^2$ pro $|x|\le2$. **359.** Pro $x<0$ dostaneme a) 1) $f(x)=1+x$, 2) $f(x)=-(1+x)$; b) 1) $f(x)=-2x-x^2$, 2) $f(x)=2x+x^2$; c) 1) $f(x)=\sqrt{-x}$, 2) $f(x)=-\sqrt{-x}$; d) 1) $f(x)=-\sin x$, 2) $f(x)=\sin x$; e) 1) $f(x)=e^{-x}$, 2) $f(x)=-e^{-x}$; f) 1) $f(x)=\ln(-x)$, 2) $f(x)=-\ln(-x)$. **360.** a) $x=-\frac{b}{2a}$; b) $x=\frac{1}{2}$; c) $x=\frac{b-a}{2}$; d) $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **361.** a) (x_0,ax_0+b), kde x_0 je libovolné číslo; b) $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$; c) (x_0,y_0), kde $x_0=-\frac{b}{3a}$ a $y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$; d) (2, 0); e) (2, 1). **372.** Kořeny rovnice jsou −1,88; 0,35; 1,53. **373.** 2,11; −0,25; −1,86. **374.** 0,25; 1,49. **375.** 0,64. **376.** 1,37; 10. **377.** −0,54. **378.** 0; 4,49. **379.** $x_1=-0,57$, $y_1=-1,26$; $x_2=-0,42$, $y_2=1,19$; $x_3=0,45$, $y_3=0,74$; $x_4=0,54$, $y_4=-0,68$. **380.** $x_1=-1,30$, $y_1=9,91$; $x_2=2,30$, $y_2=9,73$; $x_3=-0,62$, $y_3=-9,98$; $x_4=1,62$, $y_4=-9,87$. **382.** a) Obecně nemusí být; b) je. **385.** Je omezená shora a neomezená zdola. **387.** $f(a)$ a $f(b)$. **388.** 0; 25. **389.** 0; 1. **390.** 0; 1. **391.** 2; $+\infty$. **392.** −1; 1. **393.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **394.** $\frac{1}{2}$; 4. **395.** a) 0; 1; b) 0; 2. **396.** 0; 1. **397.** a) 8; b) 0,8; c) 0,08; d) 0,008. **398.** a) π; b) π; c) π; d) π. **411.** a) 1; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{2}$. **412.** 6. **413.** 10. **414.** $\frac{1}{2}nm(n-m)$. **415.** 5^{-5}. **416.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. **417.** $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. **418.** $-\frac{1}{2}$. **419.** $\frac{1}{2}$. **420.** 1. **421.** $\frac{1}{4}$. **422.** $\frac{1}{3}$. **423.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. **424.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **424.1** $2\frac{1}{24}$. **425.** $\frac{m}{n}$. **426.** $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. **427.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **428.** $\frac{m-n}{2}$. **429.** $x+\frac{a}{2}$. **430.** $x^2+ax+\frac{a^2}{3}$. **431.** 1. **432.** $\frac{1}{2}$. **433.** 3. **434.** $\frac{ab}{3}$. **435.** 1. **436.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **437.** $\frac{4}{3}$. **438.** −2. **439.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. **440.** $-\frac{1}{16}$. **441.** $\frac{1}{144}$. **442.** $\frac{1}{4}$. **443.** $\frac{12}{5}$. **444.** $\frac{1}{n}$. **445.** −2. **446.** $\frac{1}{4}$. **447.** $\frac{2}{27}$. **448.** $\frac{3}{2}$. **449.** $4\frac{4}{27}$. **450.** $\frac{7}{36}$. **451.** $-\frac{1}{2}$. **452.** $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$. **453.** $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$. **455.** $\frac{n}{m}$. **455.1** $\frac{1}{2}$. **456.** $\frac{1}{n!}$. **457.** $\frac{1}{2}(a+b)$. **458.** $\frac{1}{2}$. **459.** $-\frac{1}{4}$. **460.** 1. **461.** $\frac{2}{3}$. **462.** 2. **463.** $\frac{4}{3}$. **464.** $-\frac{1}{4}$. **465.** $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. **466.** 2^n. **467.** $2n$. **468.** $\lim_{a\to0}x_1=\infty$, $\lim_{a\to0}x_2=-\frac{c}{b}$. **469.** $a=1$, $b=-1$. **470.** $a_i=\pm1$; $b_i=\mp\frac{1}{2}$ $(i=1,2)$. **471.** 5. **472.** 0. **473.** $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$. **474.** $\frac{1}{2}$. **474.1** 1. **474.2** $\frac{1}{3}$. **475.** $\frac{1}{2}$. **476.** 2. **477.** 4. **478.** $\frac{1}{p}$. **479.** $\frac{1}{2}$. **480.** $\frac{2}{\pi}$. **482.** $\cos a$. **483.** $-\sin a$. **484.** $\sec^2 a$ $\left(a\ne(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0,\pm1,\ldots\right)$. **485.** $-\frac{1}{\sin^2 a}$ $(a\ne k\pi$, kde k je celé). **486.** $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ $(a\ne(2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé). **487.** $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ $(a\ne k\pi$, kde k je celé). **488.** $-\sin a$. **489.** $-\cos a$.

490. $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$ $\left(a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ kde } k \text{ je celé}\right)$. **491.** $\frac{2\cos a}{\sin^3 a}$ $(a \neq k\pi, \text{ kde } k \text{ je celé})$. **492.** $\frac{3}{2}\sin 2a$. **493.** -3.

494. 14. **495.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **496.** -24. **497.** $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ $\left(a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ kde } k \text{ je celé}\right)$. **498.** $\frac{3}{4}$. **499.** $\frac{1}{4}$.

500. $\frac{4}{3}$. **501.** $-\frac{1}{12}$. **502.** $\sqrt{2}$. **503.** 0. **504.** 3. **505.** 0. **506.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 1. **507.** 0. **508.** 0.

509. 0. **510.** 0. **511.** 1. **512.** e^3. **513.** 1. **514.** e^{-2}. **515.** e^{2a}. **516.** 0, je-li $a_1 < a_2$; $+\infty$, je-li $a_1 > a_2$; $e^{(b_1 - b_2)/a_1}$, je-li $a_1 = a_2$. **517.** e. **518.** e^{-1}. **519.** 1. **519.1** $\sqrt{e}$. **520.** $e^{\operatorname{cotg} a}$ $(a \neq k\pi, \text{ kde } k \text{ je celé})$. **521.** $e^{3/2}$.

522. e^{-1}. **523.** 1. **524.** e^{-2}. **525.** e. **526.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **527.** e^{x+1}. **528.** $e^{-x^2/2}$. **529.** 1. **530.** 1. **531.** $\frac{1}{a}$. **532.** 0.

533. $\frac{1}{5}$. **534.** -2. **535.** $\frac{3}{2}$. **536.** $\frac{3}{2}$. **537.** $-\frac{\log e}{x^2}$. **538.** $\frac{2a}{b}$. **539.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **540.** 0. **540.1** n. **541.** $\ln a$.

542. $a^a \ln\frac{a}{e}$. **543.** $a^a \ln(ea)$. **544.** e^2. **545.** $\frac{2}{3}$. **545.1** $e^{\beta^2 - \alpha^2}$. **545.2** $\frac{\alpha}{\beta}$. **545.3** -2. **546.** e^2. **547.** 1.

548. $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$. **549.** $a^b \ln a$. **550.** $a^x \ln^2 a$. **551.** $e^{-(a+b)}$. **552.** $\ln x$. **553.** $\ln x$. **554.** $\sqrt[a]{b}$. **555.** $\sqrt{ab}$.

556. $\sqrt[3]{abc}$. **557.** $(a^a b^b c^c)^{1/(a+b+c)}$. **558.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. **559.** $\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}$. **560.** $a^{a^a} \ln a$. **561.** a) 0; b) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. **562.** $\ln 8$.

563. $-\ln 2$. **566.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. **567.** 1. **568.** 0. **569.** $\ln a^2$. **570.** $\frac{1}{8}$. **571.** $\frac{1}{2}$. **572.** -2. **573.** e^2. **574.** $e^{2/\pi}$.

575. $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$. **576.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 1. **576.1** $\frac{2}{9}$. **577.** $2\sinh\frac{1}{2}$. **577.1** a) $\cosh a$; b) $\sinh a$. **577.2** -1.

578. $\ln 2$. **579.** 1. **580.** e^{π^2}. **581.** $-\frac{\pi}{2}$. **582.** $\frac{\pi}{3}$. **583.** $-\frac{\pi}{2}$. **584.** $\frac{3\pi}{4}$. **585.** $\frac{1}{1+x^2}$. **586.** 2.

587. $\frac{e^x}{x^2+1}$. **588.** $\frac{1}{2}$. **589.** 1. **590.** $e^{2/\pi}$. **591.** 0. **592.** 0. **593.** a) $+\infty$; b) $\frac{1}{2}$. **594.** a) -1; b) 1.

594.1 $\ln\frac{b^2}{a^2}$. **595.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$. **596.** a) 1; b) 0. **597.** a) 0; b) 1. **600.** 2; 1; 2. **601.** 0; $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$.

602. 0. **603.** 1. **604.** 0. **605.** 1. **606.** 0. **613.** b) $y = 1$ pro $|x| < 1$; $y = 0$ pro $|x| = 1$. **614.** b) $y = 0$ pro $0 \leq x < 1$; $y = \frac{1}{2}$ pro $x = 1$; $y = 1$ pro $1 < x < +\infty$. **615.** $y = -1$ pro $0 < |x| < 1$; $y = 0$ pro $|x| = 1$; $y = 1$ pro $|x| > 1$.

616. $y = |x|$. **617.** $y = 1$ pro $0 \leq x \leq 1$; $y = x$ pro $x > 1$. **618.** $y = 1$ pro $0 \leq x \leq 1$; $y = x$ pro $1 < x < 2$; $y = \frac{x^2}{2}$ pro $x \geq 2$. **619.** $y = 0$ pro $0 \leq x < 2$; $y = 2\sqrt{2}$ pro $x = 2$; $y = x^2$ pro $x > 2$. **620.** b) $y = 0$ pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $y = 1$ pro $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **621.** $y = \ln 2$ pro $0 \leq x \leq 2$; $y = \ln x$ pro $x > 2$. **622.** $y = 0$ pro $-1 < x \leq 1$; $y = \frac{\pi}{2}(x-1)$ pro $x > 1$. **623.** $y = 1$ pro $x \leq -1$; $y = e^{x+1}$ pro $x > -1$. **624.** $y = x$ pro $x < 0$; $y = \frac{1}{2}$ pro $x = 0$; $y = 1$ pro $x > 0$. **625.** $\frac{1}{x}$. **625.1** $y = \sqrt{x}$ pro $0 \leq x < 1$ a $4k-1 < x < 4k+1$; $y = x$ pro $4k-3 < x < 4k-2$ a $4k-2 < x < 4k-1$; $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + x)$ pro $x = 2k-1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. **625.2** $y = 0$ pro x racionální; $y = x$ pro x iracionální. **625.3** Obvod čtverce $\max\{|x|, |y|\} = 1$. **627.** a) $x = 1$; $x = -2$, $y = x - 1$; b) $y = x + \frac{1}{2}$ pro $x \to +\infty$, $y = -x - \frac{1}{2}$ pro $x \to -\infty$; c) $y = \frac{1}{3} - x$; d) $y = x$ pro $x \to +\infty$, $y = 0$ pro $x \to -\infty$; e) $y = 0$ pro $x \to -\infty$, $y = x$ pro $x \to +\infty$; f) $y = x + \frac{\pi}{2}$. **628.** 0. **629.** $\frac{1}{1-x}$. **630.** $\frac{\sin x}{x}$. **632.** $\frac{1}{6}$. **633.** $\frac{a}{2}$. **634.** $\frac{1}{2}\ln a$. **635.** $\sqrt{e}$. **636.** $e^{-a^2/6}$.

637. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$. **637.1** $\frac{2}{3}$. **637.2** $\frac{b}{1-a}$. **637.3** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **638.** $\sqrt{1+x}-1$. **639.** $1-\sqrt{1-x}$. **641.** a) 2; b) $+\infty$; c) 0; d) 1; e) 2; f) 1; g) $2\sinh 1$. **643.** a) $l=-1$, $L=2$; b) $l=-2$, $L=2$; c) $l=2$, $L=e$. **644.** a) $l=-1$, $L=1$; b) $l=0$, $L=+\infty$; c) $l=\frac{1}{2}$, $L=2$; d) $l=0$, $L=+\infty$. **645.** a) Prvního stupně; b) druhého; c) prvního; d) třetího; e) třetího; f) třetího. **653.** a) $2x$; b) x; c) $\frac{x^2}{2}$; d) $\frac{x^3}{2}$. **655.** a) $3(x-1)^2$; b) $\frac{(1-x)^{1/3}}{\sqrt[3]{2}}$; c) $x-1$; d) $e(x-1)$; e) $x-1$. **656.** a) x^2; b) $2x^2$; c) $x^{2/3}$; d) $x^{1/8}$. **657.** a) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/2}$; c) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$; d) $\left(\frac{1}{x}\right)^2$. **658.** a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$; b) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/2}$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/3}$; $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-x}$; d) $\frac{1}{x-1}$. **663.** a) $9{,}95<x<10{,}05$; b) $9{,}995<x<10{,}005$; c) $9{,}9995<x<10{,}0005$; d) $\sqrt{100-\varepsilon}<x<\sqrt{100+\varepsilon}$. **664.** $\Delta<\frac{\varepsilon}{27}$; a) $\Delta<3{,}7\,\mathrm{mm}$; b) $\Delta<0{,}37\,\mathrm{mm}$; c) $\Delta<0{,}037\,\mathrm{mm}$. **665.** $100\left[1-10^{-(n+1)}\right]^2<x<100\left[1+10^{-(n+1)}\right]^2$; a) $81<x<121$; b) $98{,}01<x<102{,}01$; c) $99{,}8001<x<100{,}2001$; d) $99{,}980001<x<100{,}020001$. **666.** $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{11},1\right)$. **667.** $\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\approx 0{,}001x_0^2$; a) $\delta\approx 10^{-5}$; b) $\delta\approx 10^{-7}$; c) $\delta\approx 10^{-9}$. Neexistuje. **669.** a) Nemůžeme; b) můžeme. **671.** Ne; omezenost v bodě x_0. **672.** Ne. Je-li funkce $f(x)$ definována na omezeném intervalu (a,b), pak jsou tyto nerovnosti splněny vždy. Je-li alespoň jedno z čísel a nebo b rovno nevlastnímu symbolu $\pm\infty$, pak platí $\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty$. **673.** Ne; jednoznačnost a spojitost inverzní funkce. **675.** Spojitá. **676.** Spojitá, je-li $A=4$, a nespojitá v bodě $x=2$, je-li $A\neq 4$. **677.** Nespojitá v $x=-1$. **678.** a) Spojitá; b) nespojitá v $x=0$. **679.** Nespojitá v $x=0$. **680.** Spojitá. **681.** Spojitá. **682.** Nespojitá v $x=1$. **683.** Spojitá, je-li $a=0$, a nespojitá, je-li $a\neq 0$. **684.** Nespojitá v $x=0$. **685.** Nespojitá v bodech $x=k$, kde k je celé. **686.** Nespojitá v bodech $x=k^2$ $(k=1,2,\ldots)$. **687.** $x=-1$ je bod nekonečné nespojitosti. **688.** $x=-1$ je bod odstranitelné nespojitosti. **689.** $x=-2$ a $x=1$ – body nekonečné nespojitosti. **690.** $x=0$ a $x=1$ – body odstranitelné nespojitosti; $x=-1$ je bod nekonečné nespojitosti. **691.** $x=0$ – bod odstranitelné nespojitosti; $x=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nekonečné nespojitosti. **692.** $x=\pm2$ – body odstranitelné nespojitosti. **693.** $x=0$ – bod nespojitosti druhého druhu. **694.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu; $x=0$ – bod nespojitosti druhého druhu. **695.** $x=0$ a $x=\frac{2}{2k+1}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$ – body odstranitelné nespojitosti. **696.** $x=0$ – bod nespojitosti prvního druhu. **697.** $x=0$ – bod odstranitelné nespojitosti. **698.** $x=0$ – bod nespojitosti druhého druhu. **699.** $x=0$ – bod odstranitelné nespojitosti; $x=1$ – bod nekonečné nespojitosti. **700.** $x=0$ – bod nekonečné nespojitosti; $x=1$ – bod nespojitosti druhého druhu. **701.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2)$ – body nespojitosti prvního druhu. **702.** $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu. **703.** $x=k$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu. **704.** Funkce je spojitá. **705.** $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu. **706.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu; $x=0$ – bod nekonečné nespojitosti. **707.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu; $x=0$ – bod odstranitelné nespojitosti. **708.** $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu; $x=0$ – bod nespojitosti druhého druhu **709.** $x=\pm\frac{1}{k}$ a $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k=1,2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu, $x=0$ – bod nespojitosti druhého druhu. **710.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nekonečné nespojitosti; $x=0$ – bod nespojitosti druhého druhu. **711.** $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ –

body nekonečné nespojitosti; $x=0$ – bod nespojitosti druhého druhu. **712.** $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ – body nespojitosti prvního druhu. **713.** $x=0$, $x=1$ a $x=2$ – body nespojitosti prvního druhu. **714.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nekonečné nespojitosti. **715.** $x=\pm\sqrt{k\pi}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ – body nekonečné nespojitosti. **716.** $x=-1$ a $x=3$ – body nekonečné nespojitosti. **717.** $x=0$ – bod nespojitosti druhého druhu. **718.** $x=0$ – bod odstranitelné nespojitosti. **719.** $x=\pm1$ – body nespojitosti prvního druhu. **720.** $y=1$ pro $0\le x<1$; $y=\frac{1}{2}$ pro $x=1$; $y=0$ pro $x>1$; $x=1$ – bod nespojitosti prvního druhu. **721.** $y=\operatorname{sgn}x$; $x=0$ – bod nespojitosti prvního druhu. **722.** $y=1$ pro $|x|\le1$; $y=x^2$ pro $|x|>1$. Funkce je spojitá. **723.** $y=0$ pro $x\neq k\pi$; $y=1$ pro $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; $x=k\pi$ – body nespojitosti prvního druhu. **724.** $y=x$ pro $|x-k\pi|<\frac{\pi}{6}$; $y=\frac{x}{2}$ pro $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$; $y=0$ pro $\frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$; $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ – body nespojitosti prvního druhu. **725.** $y=\frac{\pi}{2}x$ pro $k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$; $y=-\frac{\pi}{2}x$ pro $k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi$; $y=0$ pro $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{k\pi}{2}$ – body nespojitosti prvního druhu. **726.** $y=x$ pro $x\le0$; $y=x^2$ pro $x>0$. Funkce je spojitá.

727. $y=0$ pro $x\le0$ a $y=x$ pro $x>0$. Funkce je spojitá. **728.** $y=-(1+x)$ pro $x<0$; $y=0$ pro $x=0$ a $y=1+x$ pro $x>0$; $x=0$ – bod nespojitosti prvního druhu. **729.** Není. **730.** $a=1$. **731.** a) Funkce je spojitá; b) $x=-1$ – bod nespojitosti prvního druhu; c) $x=-1$ – bod nespojitosti prvního druhu; d) $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nekonečné nespojitosti; e) $x\neq k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – body nespojitosti druhého druhu. **732.** $d=-x$ pro $-\infty<x<0$; $d=0$ pro $0\le x\le1$; $d=x-1$ pro $1<x\le\frac{3}{2}$; $d=2-x$ pro $\frac{3}{2}<x<2$; $d=0$ pro $2\le x\le3$; $d=x-3$ pro $3<x<+\infty$. Funkce je spojitá. **733.** $S=3y-\frac{y^2}{2}$ pro $0\le y\le1$; $S=\frac{1}{2}+2y$ pro $1<y\le2$; $S=\frac{5}{2}+y$ pro $2<y\le3$; $S=\frac{11}{2}$ pro $3<y<+\infty$; funkce je spojitá, $b=3-y$ pro $0\le y\le1$; $b=2$ pro $1<y\le2$; $b=1$ pro $2<y\le3$; $b=0$ pro $3<y<+\infty$; $x=2$ a $x=3$ – body nespojitosti prvního druhu. **735.** Nespojitá pro $x\neq0$ a spojitá pro $x=0$. **737.** Nespojitá pro všechny záporné a pro všechny kladné racionální hodnoty argumentu. **738.** $f(0)=0{,}5$. **740.** a) 1,5; b) 2; c) 0; d) e; e) 0; f) 1; g) 0. **741.** a) Ano; b) ne. **742.** a) Ne; b) ne. **743.** Ne. Příklad: $f(x)=1$ pro x racionální a $f(x)=-1$ pro x iracionální. **744.** a) $f(g(x))$ je spojitá, $g(f(x))$ je nespojitá v $x=0$; b) $f(g(x))$ je nespojitá v $x=-1$, $x=0$ a $x=1$, $g(f(x))=0$ je spojitá; c) $f(g(x))$ a $g(f(x))$ jsou spojité. **745.** $f(\varphi(x))\equiv x$. **759.** $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$; $a+d=0$ nebo $a-d=0$ a $b=c=0$ $(ad-bc\neq0)$ **760.** $x=y-k$ pro $2k\le y<2k+1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **764.** $f(f(x))\equiv x$. **767.** $x=-\sqrt{y}$ $(0\le y<+\infty)$; $x=\sqrt{y}$ $(0\le y<+\infty)$. **768.** $x=1-\sqrt{1-y}$ $(-\infty<y\le1)$; $x=1+\sqrt{1-y}$ $(-\infty<y\le1)$. **769.** $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(-1\le y\le1)$, $x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(0<|y|\le1)$. **770.** $x=(-1)^k\arcsin y+k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ $(-1\le y\le1)$. **771.** $x=2k\pi\pm\arccos y$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ $(-1\le y\le1)$. **772.** $x=\operatorname{arctg}y+k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ $(-\infty<y<+\infty)$. **776.** $\varepsilon=0$, je-li $xy<1$; $\varepsilon=\operatorname{sgn}x$, je-li $xy>1$. **779.** a) $y=-\frac{\pi}{2}$ pro $-1\le x\le0$; $y=2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$ pro $0\le x\le1$; b) $y=-(\pi+4\arcsin x)$ pro $-1\le x\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$ pro $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y=\pi-4\arcsin x$ pro $\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le1$. **780.** $y=\frac{\pi}{2}-x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$. **781.** $y=\sqrt{x^2-1}$ $(1\le x<+\infty)$; $y=-\sqrt{x^2-1}$ $(1\le x<+\infty)$. **782.** Pro všechna t, pro která $\varphi(t)=x$, kde x je libovolná hodnota funkce $\varphi(t)$, musí mít funkce $\psi(t)$ stále stejnou hodnotu. **783.** Množina hodnot $\chi(\tau)$ pro $\alpha<\tau<\beta$ musí být intervalem (a,b). **784.** Pro všechna x taková, že $\varphi(x)=u$, kde u je libovolná hodnota z intervalu (A,B) musí mít funkce $\psi(x)$ stále stejnou hodnotu.

785. $|\delta|\le\frac{\varepsilon}{20}$ cm. a) 0,5 mm; b) 0,005 mm; c) 0,00005 mm. **786.** a) $\delta<\frac{1}{4}$; b) $\delta<2{,}5\cdot10^{-4}$; c) $\delta<\frac{5}{2}\cdot10^{-7}$;

d) $\delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$ $(\varepsilon \le 1)$. **793.** a) Ano; b) ne. **794.** Stejnoměrně spojitá. **795.** Není stejnoměrně spojitá. **796.** Stejnoměrně spojitá. **797.** Není stejnoměrně spojitá. **798.** Stejnoměrně spojitá. **799.** Stejnoměrně spojitá. **800.** Není stejnoměrně spojitá. **802.** a) $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$; b) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$; c) $\delta = 0{,}01\,\varepsilon$; d) $\delta = \varepsilon^2$ $(\varepsilon \le 1)$; e) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; f) $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$. **803.** $n \ge 1\,800\,000$. **808.** a) $\omega_f(\delta) \le 3\delta$; b) $\omega_f(\delta) \le \sqrt{\delta}$; $\omega_f(\delta) \le \frac{\delta}{\sqrt{2a}}$; c) $\omega_f(\delta) \le \delta\sqrt{2}$. **818.** $f(x) = \cos ax$ a $f(x) = \cosh ax$ $(a = \text{const})$. **819.** $f(x) = \cos ax$; $g(x) = \pm \sin ax$ $(a = \text{const})$.

KAPITOLA II

821. $\Delta x = 999$; $\Delta y = 3$. **822.** $\Delta x = -0{,}009$; $\Delta y = 990\,000$. **823.** a) $\Delta y = a\,\Delta x$; b) $\Delta y = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$; c) $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. **825.** a) 5; b) 4,1; c) 4,01; d) $4 + \Delta x$; 4. **826.** $3 + 3h + h^2$; a) 3,31; 3, b) 3,0301; c) 3,003001; 3. **827.** a) $\bar{v} = 215$ m/s; b) $\bar{v} = 210{,}5$ m/s; c) $\bar{v} = 210{,}05$ m/s; 210 m/s. **828.** a) $2x$; b) $3x^2$; c) $-\frac{1}{x^2}$ $(x \ne 0)$; d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$; e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x \ne 0)$; f) $\frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \ne (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \ldots\right)$; g) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \ne k\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots)$; h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$; i) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$; j) $\frac{1}{1+x^2}$. **829.** -8; 0; 0. **830.** 4.

831. $1 + \frac{\pi}{4}$. **832.** $f'(a)$. **834.** $y' = 1 - 2x$; 1, 0, -1, 21. **835.** $y' = x^2 + x - 2$; a) -2; 1; b) -1; 0; c) -4; 3.

836. $10a^3x - 5x^4$. **837.** $\frac{a}{a+b}$. **838.** $2x - (a+b)$. **839.** $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$. **840.** $x\sin 2a + \cos 2a$.

841. $mn\left[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}\right]$. **842.** $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$.

842.1 $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$. **843.** $-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)$ $(x \ne 0)$. **845.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x| \ne 1)$.

846. $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. **847.** $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ $(|x| \ne 1)$. **848.** $\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ $(x \ne 1)$.

849. $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ $(x \ne -1)$. **850.** $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}\left[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2\right]$ $(x \ne -1)$.

851. $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x > 0)$. **852.** $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$. **853.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x > 0)$. **854.** $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

855. $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$ $\left(x \ne \sqrt[3]{-3}\right)$. **856.** $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$. **857.** $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ $(|x| < |a|)$.

858. $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $(|x| \ne 1)$. **859.** $-\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$. **860.** $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ $(x > 0)$.

861. $\frac{1}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$ $(x \ne 0, x \ne -1, x \ne -8)$.

862. $-2\cos x(1+2\sin x)$. **863.** $x^2\sin x$. **864.** $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$. **865.** $n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

866. $\cos x\cos(\sin x)\cos[\sin(\sin x)]$. **867.** $\frac{2\sin x(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$ $(x^2 \ne k\pi;\ k = 1, 2\ldots)$.

868. $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$ $(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2\ldots)$. **869.** $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{ je celé}\right)$. **870.** $\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$.

871. $\frac{2}{\sin^2 x}$ $(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2\ldots)$. **872.** $1+\operatorname{tg}^6 x$ $\left(x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\ldots\right)$. **873.** $-\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}$

$(x\neq k\pi;\ k\text{ je celé})$. **874.** $\frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$ $\left(x\neq\frac{k\pi a}{2},\ k\text{ je celé}\right)$. **875.** $-3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\sin(2\operatorname{tg}^3 x)\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$

$\left(x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi,k\text{ je celé}\right)$. **876.** $-2xe^{-x^2}$. **877.** $-\frac{1}{x^2}2^{\operatorname{tg}1/x}\sec^2\frac{1}{x}\ln 2$. **878.** x^2e^x. **879.** $x^2e^{-x}\sin x$.

880. $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ $(x\neq 2k\pi,\ k\text{ je celé})$. **881.** $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$. **882.** $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$. **883.** $e^x\left[1+e^{e^x}\left(1+e^{e^{e^x}}\right)\right]$.

884. $y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x}\right)$ $(x>0)$. **885.** $a^a\cdot x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$. **886.** $\frac{6}{x}\log e\ \log^2 x^2$ $(x\neq 0)$.

887. $\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ $(x>e)$. **888.** $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$ $(x>e)$. **889.** $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}$ $(x>-1)$. **890.** $\frac{x}{x^4-1}$ $(|x|>1)$.

891. $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$ $(x\neq 0)$. **892.** $\frac{1}{3x^2-2}$ $\left(|x|>\sqrt{2/3}\right)$. **893.** $\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}$ $(|x|<1)$. **894.** $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$

$(x>-1)$. **895.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **896.** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **897.** $\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **898.** $\sqrt{x^2+a^2}$. **899.** $\frac{1}{a-bx^2}$

$\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. **900.** $-\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$. **901.** $\frac{1}{\sin x}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\text{ je celé})$. **902.** $\frac{1}{\cos x}$

$\left(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2},\ k\text{ je celé}\right)$. **903.** $-\operatorname{cotg}^3 x$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\text{ je celé})$. **904.** $-\frac{1}{\cos x}$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{ je celé}\right)$.

905. $\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\text{ je celé})$. **906.** $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$. **907.** $-\frac{\ln^3 x}{x^2}$ $(x>0)$. **908.** $\frac{1}{x^5}\ln x$ $(x>0)$.

909. $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$. **910.** $-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$. **911.** $2\sin(\ln x)$ $(x>0)$. **912.** $\sin x\ln\operatorname{tg} x$

$\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\text{ je celé}\right)$. **913.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $(|x|<2)$. **914.** $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $\left(|x-1|<\sqrt{2}\right)$. **915.** $\frac{2ax}{x^4+a^2}$ $(a\neq 0)$.

916. $\frac{1}{x^2+2}$ $(x\neq 0)$. **917.** $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ $(x\geq 0)$. **918.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$ $(|x|<1)$. **919.** $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ $(x\geq 0)$.

920. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$. **921.** $\operatorname{sgn}(\cos x)$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{ je celé}\right)$. **922.** $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $(x\neq k\pi,\ k\text{ je celé})$.

923. $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ $\left(0<x-k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\text{ je celé}\right)$. **924.** $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<|x|<1)$. **925.** $\frac{1}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$.

926.1 $\left(x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\text{ je celé}\right)$. **927.** $\frac{1}{a+b\cos x}$. **928.** $-\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$. **929.** $\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}$ $(|x|<1)$.

930. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. **931.** $-2\cos x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$. **932.** $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $(x>1)$. **933.** $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ $(x>-a)$.

934. $\sqrt{a^2-x^2}$. **935.** $\frac{1}{x^3+1}$ $(x\neq -1)$. **936.** $\frac{1}{x^4+1}$ $(|x|\neq 1)$. **937.** $(\arcsin^2 x)$ $(|x|<1)$. **938.** $-\frac{\arccos x}{x^2}$ $(0<|x|<1)$. **939.** $\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$ $(x>1)$. **940.** $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<1)$. **941.** $\frac{x^3}{x^6+1}$ $\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **942.** $\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$.

943. $-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}$ $(x<1)$. **944.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. **945.** $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$ $(0<x<a)$. **946.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ $(|x+1|<\sqrt{2})$.

947. $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. **948.** $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k \text{ je celé}\right)$. **949.** $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $(|x|<1)$.

950. $\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$. **951.** $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. **952.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$. **953.** $\frac{\sin a\ \operatorname{sgn}(\cos x-\cos a)}{1-\cos a\cos x}$ $(\cos x\neq\cos a)$.

954. $\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$ $(0<|x|<1)$. **955.** $\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ $(|x|\neq 1)$. **956.** $\frac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

957. $\frac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$ $\left(\sqrt{k\pi}<|x|<\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi},\ k=0,1,\ldots\right)$. **958.** $2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2)+\operatorname{sgn}(\sin x^2)]$ $\left(|x|\neq\frac{k\pi}{2},\ k=0,1,2,\ldots\right)$. **959.** $\frac{2m}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{m(\arcsin x)}\cos m(\arcsin x)$ $(|x|<1)$. **960.** $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$.

960.1 $\frac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. **960.2** $\frac{1}{x^3\cos\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{1}{x^2}}}$.

960.3 $\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}}\ln 2\cdot\sin\left(2^{\sqrt[3]{x}}\right)\cdot\ln\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2\left(2^{\sqrt[3]{x}}\right)}$. **961.** $1+x^x(1+\ln x)+x^{x^x}x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$ $(x>0)$.

962. $x^{a^x-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}\left(\frac{1}{x}+\ln a\ln x\right)+x^x a^{x^x}\ln a(1+\ln x)$ $(x>0)$. **963.** $x^{1/x-2}(1-\ln x)$ $(x>0)$.

964. $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{cotg}^2 x-\ln\sin x)-(\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x)$ $\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k \text{ je celé}\right)$.

965. $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\left[x-2\ln^2 x+x\ln x\cdot\ln(\ln x)\right]$ $(x>1)$.

965.1 $y'=2y\left\{\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}+\operatorname{arctg}^2 x\left[\frac{\sin x\operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}-\frac{\cos x\operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]\right\}$ $\left(x\neq\frac{k\pi}{2},\ k=0,\pm 1,\ldots\right)$. **966.** $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $(x>0,x\neq 1)$. **967.** $\operatorname{tgh}^3 x$. **968.** $-\frac{2}{\sinh^3 x}$ $(x>0)$. **969.** $\frac{1}{\cosh 2x}$.

970. $\frac{\operatorname{sgn}(\sinh x)}{\cosh x}$ $(x\neq 0)$. **971.** $\frac{a+b\cosh x}{b+a\cosh x}$. **972.** $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$. **973.** $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln(\arccos x)$ $(|x|<1)$. **974.** $-\frac{x^{-1}}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. **975.** $-\frac{2xe^{-x^2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{\left(1-e^{-2x^2}\right)^{3/2}}$ $(x\neq 0)$. **976.** $\frac{4a^{2x}\ln a}{\left(1+a^{2x}\right)^2}\operatorname{arccotg} a^{-x}$ $(a>0)$.

977. a) $\operatorname{sgn} x$ $(x\neq 0)$; b) $2|x|$; c) $\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$. **978.** a) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$; b) $\frac{3}{2}\sin 2x\cdot|\sin x|$; c) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; d) $\pi[x]\sin 2\pi x$. **979.** $y'=-1$ pro $-\infty<x<1$; $y'=2x-3$ pro $1\le x\le 2$; $y'=1$ pro $2<x<+\infty$. **980.** $y'=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$ pro $x\in[a,b]$; $y'=0$ pro $x\notin[a,b]$. **981.** $y'=1$ pro $x<0$;

$y'=\frac{1}{1+x}$ pro $0\le x<+\infty$. **982.** $y'=\frac{1}{1+x^2}$ pro $-1<x\le 1$; $y'=1/2$ pro $|x|>1$. **983.** $y'=2xe^{-x^2}(1-x^2)$ pro $|x|\le 1$; $y'=0$ pro $|x|>1$. **984.** a) $\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$; b) $\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$ $(x\ne 0,\ x\ne 1,\ x\ne\pm 3)$; c) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$;

d) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$. **985.** a) $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$ $\left(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\ne 0\right)$; b) $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ $\left(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\ne 0\right)$;

c) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}$; d) $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$. **986.** a) $2xf'(x^2)$;

b) $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$; c) $e^{f(x)}\left[e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)\right]$; d) $f'(x)f'[f'(x)]f'\{f[f(x)]\}$. **986.1** 1000!

988. $3x^2+15$. **989.** $6x^2$. **992.** a) $n>0$; b) $n>1$; c) $n>2$. **993.** a) $n\ge m+1$; b) $1<n<m+1$. **994.** $\varphi(a)$.

995. $f'_-(a)=-\varphi(a)$; $f'_+(a)=\varphi(a)$. **999.** a) Nediferencov atelnápro $x=1$; b) nediferencovatelná pro $x=\frac{2k-1}{2}\pi$, k je celé; c) všude diferencovatelná; d) nediferencovatelná pro $x=k\pi$, k je celé; e) nediferencovatelná pro $x=-1$. **1000.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\operatorname{sgn}x$ pro $x\ne 0$ a $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **1001.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x$ pro $x\ne$ celé číslo; $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$, $f'_+(k)=\pi k(-1)^k$ pro k celé.

1002. $f'_-(x)=f'_+(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\cdot\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$ pro $x\ne\frac{2}{2k+1}$ (k je celé); $f'_-\left(\frac{1}{2k+1}\right)=-(2k+1)\frac{\pi}{2}$,

$f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=(2k+1)\frac{\pi}{2}$. **1003.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$ pro $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k=0,1,2,\ldots)$; $f'_-(0)=-1$,

$f'_+(0)=1$; $f'_\pm\left(\sqrt{(2k+1)\pi}\right)=\pm\infty$, $f'_\pm\left(\sqrt{2k\pi}\right)=\pm\infty$ $(k=1,2,\ldots)$. **1004.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(-1+\frac{1}{x}\right)e^{1/x}}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}$ pro $x\ne 0$;

$f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=(0)$. **1005.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ pro $x\ne 0$; $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **1006.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{\varepsilon}{x}$, kde

$\varepsilon=-1$ pro $0<|x|<1$ a $\varepsilon=1$ pro $1<|x|<+\infty$, $f'_-(\pm 1)=-1$, $f'_+(\pm 1)=1$. **1007.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$ pro

$x\ne\pm 1$; $f'_-(\pm 1)=\mp 1$, $f'_+(\pm 1)=\mp 1$. **1008.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{(x-2)^2+1}$ pro $x\ne 2$; $f'_\pm(2)=\pm\pi/2$.

1009.1 a) $f'_-(0)=-1/2$, $f'_+(0)=1/2$; b) $f'_-(1)=f'_+(1)=1/2$; c) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$. **1010.** $a=2x_0$; $b=-x_0^2$.

1011. $a=f'_-(x_0)$; $b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$. **1012.** $A=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$, $c=\frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$. **1013.** $a=\frac{3m^2}{2c}$, $b=-\frac{m^2}{2c^3}$.

1014. a) Můžeme; b) nemůžeme. **1015.** a) Nemůžeme; b) nemůžeme. **1016.** a), b), c) Funkce $F(x)$ může mít i nemusí mít derivaci $F'(x)$. **1017.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. **1018.** a) Nemůže; b) může. **1019.** 1) Ne nutně; 2) nutně. **1020.** Ne nutně. **1021.** Nevyplývá. **1022.** Nevyplývá. **1023.** Obecně nezachovává.

1024. $P_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; $Q_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$

1025. $S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$; $T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{nx}{2}}$. **1025.1** $S_n=\frac{n\sinh\frac{x}{2}\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sinh^2\frac{nx}{2}}{2\sinh^2\frac{x}{2}}$.

1026. $S_n=\frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{cotg}x$. **1029.** $40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$. **1030.** $25\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$; $0{,}4\,\mathrm{m/s}$. **1031.** $50\,\mathrm{km/h}$.

1032. $S(x)=\frac{x^2}{2}$ pro $0\le x\le 2$; $S(x)=x^2-2x+2$ pro $x>2$; $S'(x)=x$ pro $0\le x\le 2$; $S'(x)=2x-2$ pro $x>2$.

1033. $S(x)=\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}$; $S'(x)=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn}x$ $(0<|x|\le a)$. **1034.** $y'_x=\frac{1}{3(y^2+1)}$.

1035. $y'_x=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. **1036.** a) $-\infty<y<+\infty$; $x'_y=\frac{x}{x+1}$; b) $-\infty<y<+\infty$, $x'_y=\frac{1}{1-x+y}$; c) $-\infty<y<+\infty$, $x'_y=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; d) $-1<y<1$, $x'_y=\frac{1}{1-y^2}$. **1037.** a) $x_1=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\le 1)$; $x_2=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\le y\le 1)$; $x_3=\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\le y\le 1)$; $x_4=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\le 1)$; $x'_i=\frac{1}{4x(1-x^2)}$ $(i=1,2,3,4)$; b) $x_1=-\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0\le y<1)$; $x_2=\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0\le y<1)$; $x'_i=\frac{x^3}{2y^2}$ $(i=1,2)$; c) $x_1=-\ln\left(1+\sqrt{1-y}\right)$ $(-\infty<y\le 1)$; $x_2=\ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y}$ $(0<y\le 1)$; $x'_i=-\frac{1}{2\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)}$ $(i=1,2)$. **1038.** $y'_x=-\frac{3}{2}(1+t)$; -3; $-\frac{3}{2}$ a $-\frac{9}{2}$; $(-4,4)$. **1039.** $\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t\left(1-\sqrt[3]{t}\right)^8}}$ $(t>0, t\ne 1)$. **1040.** $y'_x=-1$ $(0<x<1)$. **1041.** $y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{cotg}t$ $(0<|t|<\pi)$. **1042.** $y'_x=\frac{b}{a}\operatorname{cotgh}t$ $(|t|>0)$. **1043.** $y'_x=-\operatorname{tg}t$ $\left(t\ne\frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ je celé}\right)$. **1044.** $y'_x=\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$ $(t\ne 2k\pi, k \text{ je celé})$. **1045.** $y'_x=\operatorname{tg}t\cdot\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(t\ne\frac{\pi}{4}+k\pi, t\ne\frac{\pi}{2}+k\pi, k \text{ celé}\right)$. **1046.** $y'_x=\operatorname{sgn}t$ $(0<|t|<+\infty)$. **1048.** $y'=\frac{1-x-y}{x-y}$; $\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **1049.** $\frac{p}{y}$. **1050.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **1051.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. **1052.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **1053.** $\frac{x+y}{x-y}$. **1054.** a) $\operatorname{tg}(\varphi+\operatorname{arctg}\varphi)$; b) $-\operatorname{cotg}\frac{3\varphi}{2}$ $\left(\varphi\ne 0, \varphi\ne\pm\frac{2\pi}{3}\right)$; c) $\operatorname{tg}\left(\varphi+\operatorname{arctg}\frac{1}{m}\right)$. **1055.** a) $y=\sqrt[3]{4}(x+1)$; $y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; b) $y=3$, $x=2$; c) $x=3$, $y=0$. **1056.** a) $\left(\frac{1}{2},2\frac{1}{4}\right)$; b) $(0,2)$. **1058.** $|x|<\frac{\pi}{3}$ a $\frac{2\pi}{3}<|x|\le\pi$. **1059.** $\max|y'_1-y'|=10\pi\approx 31{,}4$. **1060.** $\frac{\pi}{4}$. **1061.** $\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\approx 37°$. **1062.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\approx 70°30'$. **1063.** $n>57{,}3$. **1064.** a) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{|a|}$; b) $\frac{\pi}{2}$. **1066.** $\left|\frac{x}{n}\right|$. **1069.** $\frac{y_0^2}{|a|}$. **1071.** $b^2-4ac=0$. **1072.** $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$. **1073.** $a=\frac{1}{2e}$. **1077.** a) $3x-2y=0$, $2x+3y=0$; b) $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$. **1078.** a) $y=x$, $y=-x$; b) $3x-y-4=0$, $x+3y-3=0$; c) $y=-x$, $y=x$. **1079.** $y-2a=(x-at_0)\operatorname{cotg}\frac{t_0}{2}$. Tečna cykloidy je kolmá k úsečce, která spojuje bod dotyku tečny s bodem dotyku kutálející se kružnice. **1081.** $3x+5y-50=0$, $5x-3y-10{,}8=0$. **1082.** $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$. **1083.** $\Delta f(1)=\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $df(1)=\Delta x$. a) 5,1; b) 0,131; 0,1; c) 0,010301, 0,01. **1084.** $\Delta x=20\Delta t+5(\Delta t)^2$; $dx=20\Delta t$; a) 25m, 20m; b) 2,05 m, 2m; c) 0,020005m, 0, 02m. **1085.** $-\frac{dx}{x^2}$ $(x\ne 0)$. **1086.** $\frac{dx}{a^2+x^2}$. **1087.** $\frac{dx}{x^2-a^2}$ $(|x|\ne|a|)$. **1088.** $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. **1089.** $\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ $(|x|<|a|)$. **1090.** a) $(1+x)e^x dx$; b) $x\sin x dx$; c) $-\frac{3dx}{x^4}$ $(x\ne 0)$; d) $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}dx$ $(x>0)$; e) $\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; f) $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<1)$; g) $-\frac{2xdx}{1-x^2}$ $(|x|<1)$; h) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; i) $\frac{dx}{\cos^3 x}$ $\left(x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi, k \text{ je celé}\right)$. **1091.** $vwdu+uwdv+uvdw$. **1092.** $\frac{vdu-2udv}{v^3}$ $(v\ne 0)$. **1093.** $-\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)^{3/2}}$ $(u^2+v^2>0)$. **1094.** $\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1095.** $\frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1096.** a) $1-4x^3-3x^6$; b) $\frac{1}{2x^2}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$; c) $-\operatorname{cotg}x$ $(x\ne k\pi, k \text{ je celé})$; d) $-\operatorname{tg}^2 x$ $\left(x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi, k \text{ je celé}\right)$; e) -1 $(|x|<1)$. **1097.** a) Zvětší se o $104{,}7\ \text{cm}^2$; b) zmenší se o $43{,}6\ \text{cm}^2$.

1098. Zvětšit o 2,23 cm. **1099.** 1,007 (podle tabulek: 1,0066). **1100.** 0,4849 (podle tabulek: 0,4848). **1101.** −0,8747 (podle tabulek: −0,8746). **1102.** 0,8104 = 46° 26′ (podle tabulek: 46° 24′). **1103.** 1,043 (podle tabulek: 1,041). **1104.** a) 2,25 (podle tabulek: 2,24); b) 5,833 (podle tabulek: 5,831); c) 10,9546 (podle tabulek: 10,9545). **1105.** a) 2,083 (podle tabulek: 2,080); b) 2,9907 (podle tabulek: 2,9907); c) 1,938 (podle tabulek: 1,931); d) 1,9954 (podle tabulek: 1,9953). **1106.** 0,24 m²; 4,2%. **1107.** $\delta_R \leq 0{,}33\%$.

1108. a) $\delta_g = \delta_l$; b) $\delta_g = 2\delta_T$. **1109.** 0,43δ. **1111.** $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. **1112.** $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$ $(|x|<1)$.

1113. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **1114.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ $\left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi,\ k=0,\pm1,\ldots\right)$. **1115.** $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$.

1116. $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$ $(|x|<1)$. **1117.** $\frac{1}{x}$ $(x>0)$. **1118.** $\frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$ $(f(x)>0)$.

1119. $-\frac{2}{x}\sin(\ln x)$ $(x>0)$. **1120.** $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$. **1121.** $2(uu''+u'^2)$.

1122. $\frac{uu''-u'^2}{u^2} - \frac{vv''-v'^2}{v^2}$ $(uv>0)$. **1123.** $\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'') + (u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$ $(u^2+v^2>0)$.

1124. $y'' = u^v\left[\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)^2 + v\frac{uu''-u'^2}{u^2} + \frac{2u'v'}{u} + v''\ln u\right]$. **1125.** $y'' = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2)$;

$y''' = 8x^3 f'''(x^2) + 12xf''(x^2)$. **1126.** $y'' = \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$; $y''' = -\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

1127. $y'' = e^{2x}f''(e^x) + e^x f'(e^x)$; $y''' = e^{3x}f'''(e^x) + 3e^{2x}f''(e^x) + e^x f'(e^x)$. **1128.** $y'' = \frac{1}{x^2}[f''(\ln x) - f'(\ln x)]$;

$y''' = \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)]$. **1129.** $y'' = \varphi'^2(x)f''(\varphi(x)) + \varphi''(x)f'(\varphi(x))$;

$y''' = \varphi'^3(x)f'''(\varphi(x)) + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x)) + \varphi'''(x)f'(\varphi(x))$. **1130.** a) $e^x dx^2$; b) $e^x(dx^2 + d^2x)$.

1131. $\frac{dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. **1132.** $\frac{2\ln x - 3}{x^3}dx^2$ $(x>0)$. **1133.** $x^x\left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]dx^2$. **1134.** $ud^2v + 2du dv + vd^2u$.

1135. $\frac{(vd^2u - ud^2v) - 2dv(vdu - udv)}{v^3}$ $(v>0)$.

1136. $u^{m-2}v^{n-2}\left\{\left[m(m-1)v^2du^2 + 2mnuvdudv + n(n-1)u^2dv^2\right] + uv(mvd^2u + nud^2v)\right\}$.

1137. $a^x \ln a(du^2 \ln a + d^2u)$. **1138.** $\left[(v^2-u^2)du^2 - 4uvdudv + (u^2-v^2)dv^2 + (u^2+v^2)(ud^2u + vd^2v)\right](u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1139.** $\left[-2uvdu^2 + 2(u^2-v^2)dudv + 2uvdv^2 + (u^2+v^2)(vd^2u - ud^2v)\right](u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$.

1140. $y'' = \frac{3}{4(1-t)}$; $y''' = \frac{3}{8(1-t)^3}$; $(t \neq 1)$. **1141.** $y'' = -\frac{1}{a\sin^3 t}$; $y''' = -\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$ $(t \neq k\pi,\ k$ je celé$)$.

1142. $y'' = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; $y''' = \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$ $(t \neq 2k\pi,\ k$ je celé$)$. **1143.** $y'' = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$;

$y''' = \frac{e^{-2t}(2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$ $\left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k=0,\pm1,\ldots\right)$. **1144.** $y'' = \frac{1}{f''(t)}$; $y''' = -\frac{f'''(t)}{f'^3(t)}$ $(f''(t)\neq 0)$. **1145.** $x' = \frac{1}{y'}$;

$x'' = -\frac{y''}{y'^3}$; $x''' = -\frac{y'y''' - 3y''^2}{y'^5}$; $x^{(4)} = \frac{y'^2y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15y''^3}{y'^7}$ $(y'\neq 0)$. **1146.** $-\frac{x}{y}$, $-\frac{25}{y^3}$, $-\frac{75x}{y^5}$; $-\frac{3}{4}$, $-\frac{25}{64}$,

$-\frac{225}{1024}$. **1147.** $\frac{p}{y}$, $-\frac{p^2}{y^3}$, $\frac{3p^3}{y^5}$. **1148.** $y' = \frac{2x-y}{x-2y}$, $y'' = \frac{6}{(x-2y)^3}$, $y''' = \frac{54x}{(x-2y)^5}$. **1149.** $y' = \frac{2x^3y}{1+y^2}$;

$y'' = \frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}\left[3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)\right]$. **1150.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$; $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **1151.** $a = \frac{1}{2}f''(x_0)$; $b = f'(x_0)$; $c = f(x_0)$.

1152. $20-10t$, -10; 0, -10. **1153.** $v=-\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$, $j=-\frac{4\pi^2 a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$. **1154.** $x=v_0 t\cos\alpha$;

$y=v_0 t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$; $v=\sqrt{v_0^2-2v_0 gt\sin\alpha+g^2t^2}$, $j=g$; $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$; $\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$; $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

1155. $x^2+y^2=25$; $5\,|\omega|$, $5\omega^2$. **1156.** $y^{(6)}=4\cdot 6!$; $y^{(7)}=0$. **1157.** $y'''=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$ $(x\neq 0)$.

1158. $y^{(10)}=-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$ $(x>0)$, kde $n!!$ označuje součin přirozených čísel, která nejsou větší než číslo n a která jsou stejné parity jako n. Například: $17!!=1\cdot 3\cdot 5\ldots 17$. **1159.** $y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}$ $(x\neq 1)$.

1160. $y^{(100)}=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$ $(x<1)$. **1161.** $y^{(20)}=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$. **1162.** $y^{(10)}=e^x\sum_{i=1}^{10}(-1)^i\frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$

kde $A_{10}^i=10\cdot 9\ldots(11-i)$ a $A_{10}^0=1$. **1163.** $y^{(5)}=-\frac{6}{x^4}$ $(x>0)$. **1164.** $y^{(5)}=\frac{274}{x^6}-\frac{120}{x^6}\ln x$ $(x>0)$.

1165. $y^{(50)}=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right)$.

1166. $y'''=\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{7/3}}\sin 3x-\frac{27(1-3x)^2-28}{(1-3x)^{10/3}}\cos 3x$ $\left(x\neq\frac{1}{3}\right)$.

1167. $y^{(10)}=-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x$. **1168.** $y^{(100)}=x\sinh x+100\cosh x$. **1169.** $y^{(4)}=-4e^x\cos x$.

1170. $y^{(6)}=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}-\frac{96}{x}\right)\sin 2x+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x$. **1171.** $120dx^5$.

1172. $-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3$ $(x>0)$. **1173.** $-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)dx^{10}$. **1174.** $e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$.

1175. $8\sin x\sinh x\,dx^6$. **1176.** $2ud^{10}u+20du\,d^9u+90d^2u\,d^6u+240d^3u\,d^7u+420d^4u\,d^6u+252(d^5u)^2$.

1177. $e^u(du^4+6du^2d^2u+4du\,d^3u+3d^2u^2+d^4u)$. **1178.** $\frac{2du^2}{u^3}-\frac{3du\,d^2u}{u^2}+\frac{d^3u}{u}$. **1179.** $d^2y=y''dx^2+y'd^2x$;

$d^3y=y'''dx^3+3y''dxd^2x+y'd^3x$; $d^{(4)}y=y^{(4)}dx^4+6y'''dx^2d^2x+4y''dxd^3x+3y''d^2x^2+y'd^4x$.

1180. $y''=\frac{\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{d^3x}$; $y'''=\frac{dx\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^3x & d^3y\end{vmatrix}-3d^2x\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^5}$. **1187.** $P^{(n)}(x)=a_0 n!$ **1188.** $\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$.

1189. $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$. **1190.** $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$. **1191.** $\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{(1-2x)^{n+1/2}}$ $\left(x<\frac{1}{2}\right)$.

1192. $\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\ldots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+1/3}}$ $(n\geq 2;\ x\neq -1)$. **1193.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1194.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

1195. $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1196.** $\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

1197. $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1198. $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1199. $\frac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\sin\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1200. $\frac{b^n}{2}\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{(2a-b)^n}{4}\cos\left[(2a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(2a+b)^n}{4}\cos\left[(2a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1201. $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1202.** $a^n x\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+na^{n-1}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$.

1203. $a^n\left[x^2-\frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)-2na^{n-1}x\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1204.** $(-1)^n e^{-x}\left[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)\right]$.

1205. $e^x\left\{\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}$. **1206.** $e^x 2^{n/2}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$. **1207.** $e^x 2^{n/2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

1208. $\frac{(n-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}\left[(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a+bx)^n\right]\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right)$. **1209.** $e^{ax}\left[a^n P(x)+\binom{n}{1}a^{n-1}P'(x)+\dots+P^{(n)}(x)\right]$.

1210. $\frac{1}{2}\{[(x+n)-(-1)^n(x-n)]\cosh x+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\sinh x\}$.

1211. $d^n y=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\dots+n!\right]dx^n$. **1212.** $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left\{\ln x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right\}dx^n$ $(x>0)$.

1214. a) $(a^2+b^2)^{n/2}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\cosh ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\sinh ax\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$;

b) $(a^2+b^2)^{n/2}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\cosh ax\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\sinh ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$, kde $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1215.** $f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^n\binom{2p}{k}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1216. a) $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}\binom{2p+1}{k}\sin\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]$;

b) $\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^n\binom{2p}{k}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$; c) $\sum_{k=0}^{p}\left\{\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}\binom{2p+1}{k}\cos\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]\right\}$.

1218. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin(n\,\mathrm{arccotg}\,x)$ $(x\neq 0)$. **1219.** a) $\frac{n!}{3}\left[2^{n+1}+(-1)^n\right]$; b) $\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}$ $(n>1)$.

1220. a) $n(n-1)a^{n-2}$; b) $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$ $(k=0,1,2,\dots)$; c) $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=[1\cdot 3\dots(2k-1)]^2$ $(k=0,1,2,\dots)$. **1221.** a) $f^{(2k)}(0)=(-1)^k m^2(m^2-2^2)\dots[m^2-(2k-2)^2]$, $f^{(2k-1)}(0)=0$; b) $f^{(2k)}(0)=0$, $f'(0)=m$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k m(m^2-1^2)\dots[m^2-(2k-1)^2]$ $(k=1,2,\dots)$.

1222. a) $f^{(2k)}(0)=(-1)^{k-1}2(2k-1)!\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2k-1}\right)$, $f^{(2k+1)}(0)=0$ $(k=1,2,\dots)$; b) $f^{(2k)}(0)=2^{2k-1}[(k-1)!]^2$, $f^{(2k-1)}(0)=0$ $(k=1,2,\dots)$. **1223.** $n!\varphi(a)$. **1228.** $L_m(x)=(-1)^m\left[x^m-m^2x^{m-1}+\frac{m^2(m-1)^2}{1\cdot 2}x^{m-2}+\dots+(-1)^m m!\right]$.

1231. $H_m(x)=(2x)^m-\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\dots$ **1236.** Pro $x=0$ neexistuje konečná derivace $f'(x)$. **1244.** $(-1,-1)$, $(1,1)$. **1245.** Neplatí. **1246.** a) $\theta=1/2$; b) $\theta=\frac{\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2}-x}{\Delta x}$ $(x\geq 0,\Delta x>0)$; c) $\theta=\frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)$ $(x(x+\Delta x)>0)$; d) $\theta=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. **1248.** $c=\frac{1}{2}$ a $\sqrt{2}$. **1250.** Obecně nelze. **1261.** $f(x)=c_0+c_1x+\dots+c_{n-1}x^{n-1}$, kde c_i $(i=0,1,\dots,n-1)$ jsou konstanty. **1268.** Pro $-\infty<x<\frac{1}{2}$ je funkce rostoucí, pro $\frac{1}{2}<x<+\infty$ je klesající. **1269.** Pro $-\infty<x<-1$ je funkce klesající, pro $-1<x<1$ je rostoucí; pro $1<x<+\infty$ je klesající. **1270.** Pro $-\infty<x<-1$ je funkce klesající, pro $-1<x<1$ je rostoucí; pro $1<x<+\infty$ je klesající. **1271.** Pro $0<x<100$ je funkce rostoucí; pro $100<x<+\infty$ je klesající. **1272.** Funkce je rostoucí.

1273. Na intervalech $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ je funkce rostoucí; na intervalech $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ je klesající ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). **1274.** Na intervalech $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ a $\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ je funkce rostoucí; na intervalech $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ a $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ je klesající ($k=0, 1, 2, \ldots$). **1275.** Pro $-\infty < x < 0$ je funkce klesající; pro $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ je rostoucí; pro $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ je klesající. **1276.** Pro $0 < x < n$ je funkce rostoucí; pro $n < x < +\infty$ je klesající. **1277.** Funkce je klesající pro $-\infty < x < -1$ a $0 < x < 1$; je rostoucí pro $-1 < x < 0$ a $1 < x < +\infty$. **1278.** Na intervalech $(e^{-7\pi/12+2k\pi}, e^{13\pi/12+2k\pi})$ je funkce rostoucí; na intervalech $(e^{13\pi/12+2k\pi}, e^{17\pi/12+2k\pi})$ je klesající ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). **1283.** Nemusí to platit. **1298.** V bodě $(-1, 0)$ je funkce konvexní; v bodě $(1, 2)$ je konkávní; $(0, 0)$ je inflexní bod. **1299.** Pro $-\infty < x < 1$ je funkce konvexní; pro $1 < x < +\infty$ je konkávní; $x=1$ je inflexní bod. **1300.** Pro $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ je funkce konkávní; pro $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ je konvexní; $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ jsou inflexní body. **1301.** Pro $x<0$ je funkce konkávní; pro $x>0$ je konvexní; $x=0$ je inflexní bod. **1302.** Funkce je konvexní. **1303.** Pro $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ je funkce konkávní; pro $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ je konvexní; $x=k\pi$ jsou inflexní body ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). **1304.** Pro $|x| < \sqrt{1/2}$ je funkce konkávní; pro $|x| > \sqrt{1/2}$ je konvexní; $x = \pm\sqrt{1/2}$ jsou inflexní body. **1305.** Pro $|x| < 1$ je funkce konvexní; pro $|x| > 1$ je konkávní; $x = \pm1$ jsou inflexní body. **1306.** Pro $e^{2k\pi - 3\pi/4} < x < e^{2k\pi + \pi/4}$ je funkce konvexní; pro $e^{2k\pi+\pi/4} < e^{2k\pi+5\pi/4}$ je konkávní; $x = e^{k\pi+\pi/4}$ jsou inflexní body ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). **1307.** Je konvexní pro $0 < x < +\infty$. **1309.** $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **1310.** Je konkávní (pro $a>0$). **1318.** $\frac{a}{b}$. **1319.** 1. **1320.** 2. **1321.** -2.

1322. $\frac{1}{3}$. **1323.** $-\frac{1}{3}$. **1324.** $\frac{1}{3}$. **1325.** $\frac{1}{6}$. **1326.** $\frac{1}{2}$. **1327.** 1. **1328.** $\frac{a-b}{3ab}$. **1329.** $\frac{1}{6}\ln a$. **1330.** -2.

1331. 1. **1332.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **1333.** $\frac{1}{6}$. **1334.** $\frac{2}{3}$. **1335.** 1. **1336.** 0. **1337.** 0. **1338.** 0. **1339.** 0. **1340.** 0.

1341. 0. **1342.** 1. **1343.** 1. **1344.** -1. **1345.** e^k. **1346.** e^{-1}. **1347.** $e^{2/\pi}$. **1348.** e^{-1}. **1349.** 1. **1350.** 1.

1351. 1. **1352.** $e^{2/\sin 2a}$ $\left(a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ je celé}\right)$. **1353.** $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$. **1354.** $\frac{1}{2}$. **1355.** $\frac{1}{2}$. **1356.** 0. **1357.** $-\frac{1}{2}$.

1358. $a^a(\ln a - 1)$. **1359.** $-\frac{e}{2}$. **1360.** $\frac{1}{a}$. **1361.** $e^{-2/\pi}$. **1362.** 1. **1363.** $e^{1/6}$. **1363.1** $e^{-1/6}$. **1363.2** $e^{1/3}$.

1363.3 $e^{-1/3}$. **1363.4** $e^{-1/6}$. **1364.** $e^{-1/2}$. **1365.** $e^{-2/\pi}$. **1366.** e^{-1}. **1367.** $\frac{mn}{n-m}$. **1368.** $\sqrt{e}$. **1368.1** 0.

1369. $-\frac{1}{6}$. **1370.** a. **1371.** $\operatorname{tg}\alpha$. **1373.1** $f'(0) = -\frac{1}{12}$. **1373.2** $y = \frac{1}{e}\left(x + \frac{1}{2}\right)$. **1374.** a) l'Hospitalovo pravidlo nelze použít; limita je rovna nule; b) l'Hospitalovo pravidlo nelze použít; limita je rovna jedné; c) formální použití l'Hospitalova pravidla vede k špatnému výsledku 0; limita ovšem neexistuje; d) l'Hospitalovo pravidlo, které by vedlo k špatnému výsledku 0, nelze použít; limita ovšem neexistuje.

1375. $\frac{4}{3}$. **1376.** $5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$. **1377.** $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$; -48.

1378. $1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$. **1379.** $a + \frac{x}{ma^{m-1}} - \frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2)$. **1380.** $\frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^5)$.

1381. $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$. **1382.** $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$. **1383.** $x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13})$.

1384. $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$. **1385.** $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. **1386.** $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

1387. $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6)$. **1388.** $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$.

1389. $(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3)$. **1390.** $y=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2)$. **1391.** $\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

1392. $\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n)$. **1394.** a) Je menší než $\frac{3}{(n+1)!}$; b) není větší než $\frac{1}{3840}$;

c) je menší než $2\cdot10^{-6}$; d) je menší než $\frac{1}{16}$. **1395.** $|x|<0{,}222=12°30'$. **1396.** a) 3,1072; b) 3,0171,

c) 1,9961; d) 1,64872; e) 0,309017; f) 0,182321; g) $0{,}67474=38°39'35''$; h) $0{,}46676=26°44'37''$; i) 1,12117.

1397. a) 2,718281828; b) 0,01745241; c) 0,98769; d) 2,2361; e) 1,04139. **1398.** $-\frac{1}{12}$. **1399.** $\frac{1}{3}$.

1400. $-\frac{1}{4}$. **1401.** $\frac{1}{3}$. **1402.** $\frac{1}{6}$. **1403.** $\ln^2 a$. **1404.** $\frac{1}{2}$. **1405.** 0. **1406.** $\frac{1}{3}$. **1406.1** $\frac{19}{90}$. **1406.2** $\frac{1}{2}$.

1406.3 $\frac{1}{2}$. **1407.** $\frac{x^7}{30}$. **1408.** x^2. **1409.** $\frac{x}{2}$. **1410.** $a=\frac{4}{3}$; $b=-\frac{1}{3}$. **1410.1** $A=-\frac{2}{5}$; $B=-\frac{1}{15}$.

1410.2 $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{12}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{12}$. **1411.** a) $\frac{2x}{R^3}$; b) $\frac{4}{3}x$; c) $\frac{An}{100}$; d) $\frac{70}{x}$. **1412.** $\alpha=\frac{2}{3}$; $\beta=\frac{1}{3}$.

1413. $\frac{\alpha^4}{180}$, kde α je polovina středového úhlu kruhového oblouku. **1414.** Maximum $y=2\frac{1}{4}$ v bodě $x=\frac{1}{2}$.

1415. Nemá lokální extrémy. **1416.** Minimum $y=0$ v bodě $x=1$. **1417.** Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$ pro m sudé, nemá lokální extrém v bodě $x=0$ pro m liché; lokální maximum $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ v bodě $x=\frac{m}{m+n}$; lokální minimum $y=0$ v bodě $x=1$ pro n sudé, nemá lokální extrém v bodě $x=1$ pro liché n.

1418. Lokální minimum $y=2$ v bodě $x=0$. **1419.** Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=-1$; lokální maximum $y=10^{10}e^{-9}\approx1\,234000$ v bodě $x=9$. **1420.** Lokální maximum $y=1$ v bodě $x=0$ pro n liché, nemá lokální extrém v bodě $x=0$ pro sudé n. **1421.** Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$. **1422.** Lokální maximum $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\approx0{,}529$ v bodě $x=\frac{1}{3}$; lokální minimum $y=0$ v bodě $x=1$; v bodě $x=0$ nemá lokální extrém.

1423. Lokální minimum $f(x_0)=0$ pro $\varphi(x_0)>0$ a n sudé; lokální maximum $f(x_0)=0$ pro $\varphi(x_0)<0$ a n sudé; $f(x_0)$ není lokálním extrémem pro n liché. **1425.** Nemůžeme. **1427.** a) Lokální minimum $f(0)=0$; b) lokální minimum $f(0)=0$. **1428.** Lokální minimum $f(0)=0$. **1429.** Lokální maximum $y=0$ v bodě $x=1$; lokální minimum $y=-4$ v bodě $x=3$. **1430.** Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$; lokální maximum $y=1$ v bodech $x=\pm1$. **1431.** V bodě $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}\approx0{,}23$ je lokální minimum $y\approx-0{,}76$; v bodě $x=1$ je lokální maximum $y=0$; v bodě $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\approx1{,}43$ je lokální minimum $y\approx-0{,}05$; v bodě $x=2$ funkce nemá extrém.

1432. V bodě $x=-1$ je lokální maximum $y=-2$; v bodě $x=1$ je lokální minimum $y=2$. **1433.** V bodě $x=-1$ je lokální minimum $y=-1$; v bodě $x=1$ je lokální maximum $y=1$. **1434.** V bodě $x=\frac{7}{5}$ je lokální minimum $y=-\frac{1}{24}$. **1435.** Funkce má v hraničních bodech $x=0$ a $x=2$ svého definičního oboru minimum $y=0$; v bodě $x=1$ má maximum $y=1$. **1436.** V bodě $x=\frac{3}{4}$ má funkce lokální minimum $y=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}=-0{,}46$; v bodě $x=1$ funkce nemá extrém. **1437.** V bodě $x=1$ má funkce lokální maximum $y=e^{-1}=0{,}368$. **1438.** V hraničním bodě svého definičního oboru $x=0$ má funkce maximum; v bodě $x=e^{-2}\approx-0{,}135$ má funkce lokální minimum $y=-\frac{2}{e}\approx-0{,}736$. **1439.** V bodě $x=1$ má funkce lokální minimum $y=0$; v bodě $x=e^2\approx7{,}389$ má lokální maximum $y=\frac{4}{e^2}\approx0{,}541$. **1440.** V bodech $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ má funkce lokální maximum

$y=(-1)^k+\frac{1}{2}$; v bodech $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ má lokální minimum $y=-\frac{3}{4}$. **1441.** V bodech $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ má funkce lokální maximum $y=10$; v bodech $x=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ má lokální minimum $y=5$. **1442.** V bodě $x=1$ má funkce lokální maximum $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0{,}439$.

1443. V bodech $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ má funkce lokální minimum $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4+2k\pi}$; v bodech $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ má lokální maximum $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4+2k\pi}$. **1444.** V bodě $x=-1$ má funkce lokální maximum $y=e^{-2}\approx 0{,}135$; v bodě $x=0$ má lokální minimum $y=0$ (hrot); v bodě $x=1$ má maximum $y=1$ (hrot). **1445.** $\frac{1}{2}$; 32. **1446.** 2; 66. **1447.** 0; 132. **1448.** 2; 100,01. **1449.** 1; 3. **1450.** 0; $\frac{100}{e}\approx 36{,}8$. **1451.** 0; 1. **1452.** 0; $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx 1{,}2$. **1453.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-3\pi/4}\approx -0{,}067$; 1. **1454.** $m(x)=-\frac{1}{6}$ pro $-\infty<x\le -3$; $m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$ pro $-3<x\le -1$; $m(x)=0$ pro $-1<x<+\infty$; $M(x)=\frac{1}{2}$ pro $-\infty<x\le 1$; $M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$ pro $1<x<+\infty$.

1455. a) $\frac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1{,}77\,10^7$; b) $\frac{1}{200}$; c) $\sqrt[3]{3}\approx 1{,}44$. **1457.** $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4{,}85$. **1458.** $q=-\frac{1}{2}$. **1459.** $\frac{4}{27}$. **1460.** $g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}\left(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2\right)$; $\Delta=\frac{1}{8}(x_1-x_2)^2$. **1461.** $\frac{2}{3}$. **1462.** Jeden kořen v intervalu $(3,+\infty)$. **1463.** Jeden kořen $-\infty<x_1<1$ pro $h>27$; tři kořeny $-\infty<x_1<1$, $-1<x_2<3$ a $3<x_3<+\infty$ pro $-5<h<27$; jeden kořen $3<x_3<+\infty$ pro $h<-5$. **1464.** Dva kořeny $-\infty<x_1<-1$ a $1<x_2<+\infty$. **1465.** Jeden kořen $-\infty<x_1<-1$ pro $-\infty<a<-4$; tři kořeny $-\infty<x_1<-1$, $-1<x_2<1$ a $1<x_3<+\infty$ pro $-4<a<4$; jeden kořen $1<x_1<+\infty$ pro $4<a<+\infty$. **1466.** Jeden kořen $0<x_1<1$ pro $-\infty<k<0$; dva kořeny $0<x_1<\frac{1}{k}$ a $\frac{1}{k}<x_2<+\infty$ pro $0<k<\frac{1}{e}$; nemá kořeny pro $k>\frac{1}{e}$. **1467.** Nemá kořeny pro $a<0$; jeden kořen $-\infty<x_1<0$ pro $0<a<\frac{e^2}{4}$; tři kořeny $-\infty<x_1<0$, $0<x_2<2$ a $2<x_3<+\infty$ pro $\frac{e^2}{4}<a<+\infty$. **1468.** Dva kořeny pro $|a|<3\sqrt{3}/16$; nemá kořeny pro $|a|>3\sqrt{3}/16$. **1469.** Dva kořeny $0<|x_1|<\xi$ a $\xi<|x_2|<+\infty$, kde $\xi\approx 1{,}2$ je kladný kořen rovnice $\operatorname{cotgh}x=x$, pro $|k|>\sinh\xi\approx 1{,}50$; nemá kořeny pro $|k|<\sinh\xi$. **1470.** a) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$; b) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$. **1471.** [1] Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nulové body funkce: $x=0$ a $x=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}73$. Lokální minimum $y=-2$ v bodě $x=-1$; lokální maximum $y=2$ v bodě $x=1$. Inflexní bod $x=0$, $y=0$. **1472.** Symetrie vzhledem k ose y. Nulové body funkce $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx\pm 1{,}65$. Lokální minimum $y=1$ v bodě $x=0$; lokální maximum $y=1\frac{1}{2}$ v bodech $x=\pm 1$. Inflexní body $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\pm 0{,}58$; $y=1\frac{5}{18}$. **1473.** Symetrie vzhledem k bodu $(1,2)$. Nulové body funkce $x=-1$ a $x=2$. Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=2$; lokální maximum $y=4$ v bodě $x=0$. Inflexní bod $x=1$, $y=2$. **1474.** Symetrie vzhledem k ose y. Nulové body funkce $x=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1{,}41$. Lokální maximum $y=2$ v bodě $x=0$; lokální minimum $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx -0{,}12$ v bodech $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx\pm 2{,}06$. Inflexní body $x_{1,2}\approx\pm 0{,}77$, $y_{1,2}\approx 1{,}04$; $x_{3,4}\approx\pm 2{,}67$, $y_{3,4}\approx -0{,}010$. Asymptota $y=0$. **1475.** Body nespojitosti $x=2$ a $x=3$. Nulové body funkce $x=\pm 1$. Lokální minimum $y=-(10-\sqrt{96})\approx -0{,}20$ v bodě $x=\frac{7-\sqrt{24}}{5}\approx 0{,}42$; lokální maximum $y=-(10+\sqrt{96})\approx -19{,}80$ v bodě $x=\frac{7+\sqrt{24}}{5}\approx 2{,}38$. Inflexní bod $x\approx -0{,}58$, $y\approx -0{,}07$. Asymptoty $x=2$, $x=3$ a $y=1$. **1476.** Body nespojitosti $x_1=-1$ a $x_2=1$. Nulový bod

[1] Výsledky úloh na sestrojení grafů funkcí nemusí být vždy úplné.

funkce $x=0$. Nemá lokální extrémy. Inflexní bod $x=-0{,}22$, $y\approx -0{,}19$. Asymptoty $x=-1$, $x=1$ a $y=0$. **1477.** Nulový bod funkce $x=0$. Bod nespojitosti $x=-1$. Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$; lokální maximum $y=-9\frac{13}{27}$ v bodě $x=-4$. Nemá inflexní body. Asymptoty $x=-1$ a $y=x-3$. **1478.** Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=-1$; inflexní bod $x=-4$, $y=\frac{81}{625}$. Asymptoty $x=1$ a $y=1$. **1479.** Lokální maxima $y=-\frac{34\sqrt{17}+142}{32}\approx -8{,}82$ v bodě $x=-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\approx -3{,}56$ a $y=0$ v bodě $x=0$; lokální minimum $y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx -0{,}06$ v bodě $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx 0{,}56$. Inflexní bod $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{45}$. Asymptoty $x=-1$ a $y=x-3$. **1480.** Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nemá lokální extrémy; inflexní bod $x=0$, $y=0$. Asymptoty $x=-1$, $x=1$ a $y=0$. **1481.** Lokální minimum $y=13\frac{1}{2}$ v bodě $x=5$; inflexní bod $x=-1$, $y=0$. Asymptoty $x=1$ a $y=x+5$. **1482.** Lokální minimum $y=2\frac{2}{3}$ v bodě $x=2$; lokální maximum $y=-3{,}2$ v bodě $x=-2{,}4$; inflexní bod $x=0$, $y=8$. Asymptoty $x=-1$ a $y=x$. **1483.** Symetrie vzhledem k ose y. Nulové body funkce $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm 0{,}79$. Nemá lokální extrémy. Inflexní body $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm 0{,}71$, $y=-2\frac{2}{3}$. Asymptoty $x=-1$, $x=0$, $x=1$ a $y=0$. **1484.** Definiční obor $0\le x<+\infty$. Nulové body funkce $x=0$ a $x=3$. Lokální minimum $y\approx -2$ v bodě $x=1$; maximum $y=0$ v hraničním bodě definičního oboru $x=0$. Konvexní funkce. **1485.** Definiční obor $|x|\le 2\sqrt{2}\approx 2{,}83$. Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic a vzhledem k souřadnicovým osám. Nulové body funkce $x=0$ a $x=\pm 2\sqrt{2}$. Lokální maximum $|y|=4$ v bodech $x=\pm 2$, lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$; minimum $y=0$ v hraničních bodech definičního oboru $x=\pm 2\sqrt{2}$. Nemá inflexní body. **1485.1** Nulový bod funkce $x=2$. Lokální minimum $y=-\sqrt{5}\approx -2{,}24$ v bodě $x=-0{,}5$. Inflexní body $x_1=-\frac{3+\sqrt{41}}{8}\approx -1{,}18$; $y_1\approx -2{,}06$ a $x_2=\frac{\sqrt{41}-3}{8}\approx 0{,}42$; $y_2\approx -1{,}46$. Asymptoty $y=-1$ pro $x\to-\infty$ a $y=1$ pro $x\to+\infty$. **1486.** Definiční obor $1\le x\le 2$ a $3\le x<+\infty$. Nulové body funkce $x=1$, $x=2$ a $x=3$. Lokální maximum $|y|=\frac{1}{3}\sqrt[4]{12}\approx 0{,}62$ v bodě $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}42$; minimum $y=0$ v hraničních bodech definičního oboru $x=1$, 2 a 3. **1487.** Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=1$; lokální maximum $y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\approx 1{,}06$ v bodě $x=-\frac{1}{3}$; inflexní bod $x=-1$, $y=0$. Asymptota $y=x-\frac{1}{3}$. **1488.** Symetrie vzhledem k ose y. Lokální minimum $y=-1$ v bodě $x=0$. Konkávní funkce. Asymptota $y=0$. **1489.** Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nulový bod funkce $x=0$. Lokální minimum $y=-\sqrt[3]{16}\approx -2{,}52$ v bodě $x=-2$; lokální maximum $y=\sqrt[3]{16}$ v bodě $x=2$. Inflexní bod $x=0$, $y=0$. Asymptota $y=0$. **1490.** Symetrie vzhledem k ose y. Lokální minimum $y=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59$ v bodech $x=\pm 1$; lokální maximum $y=2$ v bodě $x=0$. Konkávní funkce. **1491.** Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Body nespojitosti $x=\pm 1$. Nulový bod funkce $x=0$. Lokální minimum $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx 1{,}38$ v bodě $x=\sqrt{3}$; lokální maximum $y=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ v bodě $x=-\sqrt{3}$. Inflexní body $x_1=0$, $y_1=0$ a $x_{2,3}=\pm 3$, $y_{2,3}=\pm 1\frac{1}{2}$. **1492.** Definiční obor funkce $|x|\ge 1$. Symetrie vzhledem k ose y. Minimum $y=0$ v hraničních bodech definičního oboru $x=\pm 1$. Konkávní funkce. Asymptoty $y=\frac{x}{2}$ pro $x\to+\infty$ a $y=-\frac{x}{2}$ pro $x\to-\infty$. **1493.** Definiční obor funkce $x>0$. Lokální minimum $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2{,}60$ v bodě $x=\frac{1}{2}$. Konvexní funkce. Asymptoty $y=x+\frac{3}{2}$ a $x=0$. **1494.** Definiční obor $x\ge 0$ a $x<-3$. Nulový bod funkce $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}=4{,}30$. Lokální minimum $y=13$ v bodě $x=-4$; maximum $y=1$ v hraničním bodě definičního oboru $x=0$. Konvexní funkce. Asymptoty $y=\frac{5}{2}-2x$ pro $x\to-\infty$; $y=-\frac{1}{2}$ pro $x\to+\infty$; $x=-3$ pro $x\to -3$. **1495.** Lokální minimum $y=0$

v bodě $x=0$; lokální maximum $y=-\sqrt[3]{4}\approx -1{,}59$ v bodě $x=-2$. Inflexní body $x_1=-(2-\sqrt{3})\approx -0{,}27$, $y_1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}-5}{2}}\approx 0{,}46$; $x_2=-(2+\sqrt{3})\approx -3{,}73$, $y_2=-\sqrt[3]{\frac{5+\sqrt{27}}{2}}\approx -1{,}72$. Asymptota $x=-1$. **1496.** Symetrie vzhledem k ose y. Funkce s kladnými hodnotami. Lokální maximum $y=\sqrt{3}\approx 1{,}73$ v bodě $x=0$, lokální minimum $y=\sqrt{2}\approx 1{,}41$ v bodech $x=\pm 1$. Inflexní body $x_{1,2}=\pm 0{,}47$; $y_{1,2}\approx 1{,}14$ a $x_{3,4}\approx \pm 4{,}58$, $y_{3,4}\approx 4{,}55$. Asymptoty $y=\pm x$. **1497.** Perioda funkce $T=2\pi$; základní interval funkce $0\le x\le 2\pi$. Nulové body funkce $x_1=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1{,}21\pi$ a $x_2=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1{,}79\pi$. Lokální minima $y=1$ v bodě $x=\frac{\pi}{2}$ a $y=-1$ v bodě $x=\frac{3\pi}{2}$; lokální maxima $y=1\frac{1}{4}$ v bodech $x=\frac{\pi}{6}$ a $x=\frac{5\pi}{6}$. Inflexní body $x_1=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0{,}32\pi$, $y_1=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}\approx 1{,}13$; $x_2=\pi-\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0{,}68\pi$, $y_2=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}$; $x_3=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx 1{,}20\pi$, $y_3=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}\approx 0{,}055$ a $x_4=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx 1{,}80\pi$, $y_4=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}$. **1498.** Perioda funkce 2π; základní interval funkce $-\pi\le x\le\pi$. Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nulové body funkce $x_1=0$ a $x_{2,3}=\pm\pi$. Lokální minimum $y=-\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx -7{,}3$ v bodě $x=-\arccos\frac{1}{4}\approx -0{,}42\pi$; lokální maximum $y=\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx 7{,}3$ v bodě $x=\arccos\frac{1}{4}\approx 0{,}42\pi$. Inflexní body $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=\pm\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\approx\pm 0{,}84\pi$, $y_{2,3}=\pm\frac{21}{32}\sqrt{15}=\pm 2{,}54$ a $x_{4,5}=\pm\pi$, $y_{4,5}=0$. **1499.** Perioda funkce $T=2\pi$, základní interval funkce $-\pi\le x\le\pi$. Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nulové body funkce $x_1=0$ a $x_{2,3}=\pm\pi$. Lokální minima $y=-\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx -0{,}94$ v bodech $x=-\frac{3\pi}{4}$ a $x=-\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{2}{3}$ v bodě $x=\frac{\pi}{2}$; lokální maxima $y=-\frac{2}{3}$ v bodě $x=-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ v bodech $x=\frac{\pi}{4}$ a $x=\frac{3\pi}{4}$. Inflexní body $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=\pm\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\approx\pm 0{,}37\pi$, $y_{2,3}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}\approx\pm 0{,}81$; $x_{4,5}=\pm\left(\pi-\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\approx\pm 0{,}63\pi$, $y_{4,5}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}$; $x_{6,7}=\pm\pi$, $y_{6,7}=0$. **1500.** Perioda funkce $T=2\pi$; základní interval funkce $[-\pi,\pi]$. Symetrie vzhledem k ose y. Nulové body funkce $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx\pm 0{,}62\pi$. Lokální minimum $y=\frac{1}{2}$ v bodě $x=0$, $y=-1\frac{1}{2}$ v bodech $x=\pm\pi$; lokální maximum $y=\frac{3}{4}$ v bodech $x=\pm\frac{\pi}{3}$. Inflexní body $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0{,}18\pi$, $y_{1,2}\approx 0{,}63$; $x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}=\pm 0{,}70\pi$, $y_{3,4}\approx -0{,}44$. **1501.** Perioda funkce $T=\frac{\pi}{2}$; základní interval funkce $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Symetrie vzhledem k ose y. Funkce s kladnými hodnotami. Lokální maximum $y=1$ v bodě $x=0$; lokální minimum $y=\frac{1}{2}$ v bodech $x=\pm\frac{\pi}{4}$. Inflexní body $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{8}$, $y_{1,2}=\frac{3}{4}$. **1502.** Perioda funkce $T=\pi$; základní interval funkce $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Symetrie vzhledem k ose y. Nulové body funkce $x_1=0$ a $x_{2,3}=\pm\frac{\pi}{3}$. Lokální minima $y=0$ v bodě $x=0$ a $y=-1$ v bodech $x=\pm\frac{\pi}{2}$; lokální maximum $y=\frac{9}{16}$ v bodech $x=\pm\arccos\frac{1}{4}\approx\pm 0{,}21\pi$. Inflexní body $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}\approx\pm 0{,}11\pi$, $y_{1,2}=0{,}29$;

$x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}\approx\pm0{,}36\pi$; $y_{3,4}\approx-0{,}24$. **1503.** Perioda funkce $T=\pi$, základní interval funkce $0\le x\le\pi$. Bod nespojitosti $x=\frac{3\pi}{4}$. Nulové body funkce $x_1=0$ a $x_2=\pi$. Nemá lokální extrémy, funkce je rostoucí. Inflexní bod $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Asymptota $x=\frac{3\pi}{4}$. **1504.** Perioda funkce $T=2\pi$, základní interval funkce $[-\pi,\pi]$. Symetrie vzhledem k ose y. Nulové body funkce $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}$. Lokální minimum $y=1$ v bodě $x=0$; lokální maximum $y=-1$ v bodech $x=\pm\pi$. Inflexní body $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}$; $y_{1,2}=0$. Asymptoty $x=\pm\frac{\pi}{4}$ a $x=\pm\frac{3\pi}{4}$. **1504.1** Perioda funkce $T=2\pi$, základní interval funkce $-\pi\le x\le\pi$. Lichá funkce. Lokální minimum $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\approx-0{,}58$ v bodě $x=-\frac{2\pi}{3}$; lokální maximum $y=\frac{\sqrt{3}}{3}=0{,}58$ v bodě $x=\frac{2\pi}{3}$. Inflexní body $x_1=0$, $y_1=0$ a $x_{2,3}=\pm\pi$, $y_{2,3}=0$. **1505.** Středy symetrie $(k\pi,\ 2k\pi)$. Nulové body funkce $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm0{,}37\pi,\ldots$ Lokální maxima $y=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$ v bodech $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; lokální minima $y=-\left(\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)$ v bodech $x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$. Inflexní body $x=k\pi$, $y=2k\pi$. Asymptoty $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ (k je celé číslo).

1506. Symetrie vzhledem k přímce $x=1$. Funkce s kladnými hodnotami. Lokální maximum $y=e$ v bodě $x=1$. Inflexní body $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{1,2}=\sqrt{e}\approx1{,}65$. Asymptota $y=0$. **1507.** Symetrie vzhledem k ose y. Funkce s kladnými hodnotami. Lokální maximum $y=1$ v bodě $x=0$. Inflexní body $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm1{,}22$, $y_{1,2}=\frac{5}{2}e^{-3/2}\approx0{,}56$. Asymptota $y=0$. **1508.** Funkce s kladnými hodnotami. Lokální minimum $y=1$ v bodě $x=0$. Konvexní funkce. Asymptota $y=x$ pro $x\to+\infty$. **1509.** Funkce s nezápornými hodnotami; nulový bod funkce $x=0$. Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$; lokální maximum $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-2/3}=0{,}39$ v bodě $x=\frac{2}{3}$. Inflexní body $x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{3}\approx-0{,}15$, $y_1\approx0{,}34$ a $x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{3}\approx1{,}48$, $y_2\approx0{,}30$. Asymptota $y=0$ pro $x\to+\infty$.

1509.1 Funkce s nezápornými hodnotami. Lokální minimum $y=0$ v bodech $x=k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$); lokální maxima $y=\frac{1}{2}e^{-(2k+1/2)\pi}$ v bodech $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. Inflexní body $x_k=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $y^k=\frac{1}{4}e^{-[2k+1/3(-1)^k]\pi}$. **1510.** Funkce s kladnými hodnotami pro $x>-1$ a se zápornými hodnotami pro $x<-1$. Lokální minimum $y=1$ v bodě $x=0$. Konvexní funkce pro $x>-1$ a konkávní funkce pro $x<-1$. **1511.** Symetrie vzhledem k ose y. Funkce s nezápornými hodnotami, nulový bod $x=0$. Minimum $y=0$ (hrot) v bodě $x=0$. Konkávní funkce. **1512.** Definiční obor funkce $x>0$. Nulový bod funkce $x=1$. Lokální maximum $y=\frac{2}{e}=0{,}74$ v bodě $x=e^2\approx7{,}39$. Inflexní bod $x=e^{8/3}\approx14{,}33$, $y=\frac{8}{3}e^{-4/3}\approx0{,}70$. Asymptoty $x=0$ pro $x\searrow0$ a $y=0$ pro $x\to+\infty$. **1513.** Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nulový bod funkce $x=0$. Nemá lokální extrémy; funkce je rostoucí. Inflexní bod $x=0$, $y=0$. **1514.** Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nulový bod funkce $x=0$. Funkce je rostoucí. Funkce je konvexní pro $x>0$ a konkávní pro $x<0$; $(0,0)$ je inflexním bodem. **1515.** Definiční obor funkce $|x|<1$. Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Funkce je ostře rostoucí. Funkce je konvexní pro $x>0$ a konkávní pro $x<0$; $x=0$, $y=0$ je inflexním bodem. Asymptoty $x=\pm1$. **1516.** Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nulový bod funkce $x=0$. Funkce nemá lokální extrémy; je rostoucí. Inflexní bod $x=0$, $y=0$. Asymptoty $y=x-\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-\infty$ a $y=x+\frac{\pi}{2}$ pro $x\to+\infty$. **1517.** Nulový bod funkce $x\approx-5{,}95$. Lokální minimum $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=1{,}285$ v bodě $x=1$; lokální maximum $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx1{,}856$ v bodě $x=-1$. Funkce je konvexní pro $x>0$ a konkávní pro $x<0$; $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$ je inflexním bodem. Asymptoty $y=\frac{x}{2}+\pi$ pro $x\to-\infty$ a $y=\frac{x}{2}$ pro $x\to+\infty$. **1518.** Symetrie vzhledem k ose y. Funkce s nezápornými hodnotami; nulový bod funkce $x=0$. Lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$. Funkce je

konvexní. Asymptoty $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ pro $x\to-\infty$ a $y=\frac{\pi}{2}x-1$ pro $x\to+\infty$. **1519.** Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Nulový bod funkce $x=0$. Minimum $y=-\frac{\pi}{2}$ v bodě $x=1$ (hrot), maximum $y=\frac{\pi}{2}$ v bodě $x=1$ (hrot). Inflexní bod $x=0$, $y=0$. Asymptota $y=0$. **1520.** Symetrie vzhledem k ose y. Funkce s nezápornými hodnotami; nulový bod funkce $x=0$. Minimum $y=0$ v bodě $x=0$ (hrot). Funkce je konkávní. Asymptota $y=\pi$. **1521.** Bod nespojitosti funkce $x=0$. Nulový bod funkce $x=-2$. Lokální minimum $y=4\sqrt{e}\approx 6{,}59$ v bodě $x=2$; lokální maximum $y=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$ v bodě $x=-1$. Inflexní bod $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{8}{5}e^{-5/2}\approx 0{,}13$. Asymptoty $x=0$ a $y=x+3$. **1522.** Definiční obor funkce $|x|\geq 1$. Symetrie vzhledem k ose y. Maximum $y=2^{\sqrt{2}}\approx 2{,}67$ v hraničních bodech definičního oboru $x=\pm 1$. Funkce je konvexní. Asymptota $y=1$. **1523.** Definiční obor funkce $x<1$ a $x>2$. Funkce protíná osy souřadnic v bodech $(0,\ln 2)$ a $(1/3,0)$. Lokální maximum $y\approx 1{,}12$ v bodě $x=\frac{1-\sqrt{10}}{3}\approx -0{,}72$. Asymptoty $x=1$, $x=2$ a $y=0$. **1524.** Definiční obor funkce $|x|\leq a$. Funkce protíná osy souřadnic přibližně v bodech $(0,-a)$ a $(0{,}67a,0)$. Funkce je ostře rostoucí. Minimum $y=-\frac{\pi}{2}a$ v hraničním bodě definičního oboru $x=-a$ a maximum $y=\frac{\pi}{2}a$ v hraničním bodě definičního oboru $x=a$. Funkce je konvexní. **1525.** Definiční obor funkce $x\leq 0$ a $x\geq\frac{2}{3}$. Minimum $y=0$ v hraničním bodě definičního oboru $x=0$ a maximum $y=\pi$ v hraničním bodě definičního oboru $x=\frac{2}{3}$. Funkce je konkávní pro $x\leq 0$ a konvexní pro $x\geq\frac{2}{3}$. Asymptota $y=\frac{\pi}{3}$. **1526.** Definiční obor funkce $x\geq 0$. Funkce s kladnými hodnotami. Lokální minimum $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}\approx 0{,}692$ v bodě $x=\frac{1}{e}\approx 0{,}368$; maximum $y=1$ v hraničním bodě definičního oboru $x=0$. Funkce je konvexní. **1527.** Definiční obor funkce $x>0$. Infimum 0 pro $x\searrow 0$, lokální maximum $y=e^{1/e}\approx 1{,}44$ v bodě $x=e$. Asymptota $y=1$. **1528.** Definiční obor funkce $x>-1$, $x\neq 0$. Funkce s kladnými hodnotami. Bod odstranitelné nespojitosti $x=0$. Nemá lokální extrémy, je klesající. Funkce je konvexní. Asyptoty $x=-1$ a $y=1$. **1529.** Funkce je monotónní pro $x>0$. Infimum $y\to 0$ pro $x\searrow 0$. Asymptota $y=e\left(x-\frac{1}{2}\right)$. **1530.** Funkce s kladnými hodnotami. Symetrie vzhledem k ose y. Body nespojitosti $x=\pm 1$. Lokální minimum $y=e$ v bodě $x=0$; lokální maximum $y=\frac{1}{4\sqrt{e}}=0{,}15$ v bodech $x=\pm\sqrt{3}$. Čtyři inflexní body. Asymptoty $x=-1$ pro $x\searrow -1$; $x=1$ pro $x\nearrow 1$ a $y=0$ pro $x\to\infty$. **1531.** Funkce x a y mají nezáporné hodnoty; $x_{min}=0$ pro $t=-1$; $y_{min}=0$ pro $t=1$. Křivka je konvexní pro $t>-1$ a konkávní pro $t<-1$. **1532.** Křivka protíná osy souřadnic v bodech $(0,0)$ pro $t=0$; $(\pm 2\sqrt{3}-3,0)$ pro $t=\pm\sqrt{3}$ a $(0,-2)$ pro $t=2$; $x_{max}=1$ a $y_{max}=2$ pro $t=1$ (bod obratu); $y_{min}=-2$ pro $t=-1$. Křivka je konvexní pro $t<1$ a konkávní pro $t>1$. **1533.** Křivka protíná osy souřadnic v bodě $(0,0)$ pro $t=0$; $x_{max}=0$ pro $t=0$, $x_{min}=4$ pro $t=2$; y klesá pro rostoucí t. Inflexní bod přibližně $(-0{,}08;0{,}3)$ pro $t\approx -0{,}32$. Asymptoty $y=0$, $x=-\frac{1}{2}$ a $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$. **1534.** Křivka protíná osu y v bodě $(0,1)$ pro $t=0$; blíží se k bodu $(-1,0)$ osy x pro $t=\infty$. Extremální body $x_{min}=0$ a $y_{max}=1$ pro $t=0$; $x_{max}=-1$ a $y_{min}=0$ pro $t=\infty$. Nemá inflexní body. Asymptota $y=\frac{1}{2}$. Křivka je konvexní pro $|t|>1$ a konkávní pro $|t|<1$. **1535.** Funkce x a y mají nezáporné hodnoty; $x_{min}=1$ a $y_{min}=1$ pro $t=0$ (bod obratu). Křivka je konvexní pro $t<0$ a konkávní pro $t>0$. Asymptota $y=2x$ pro $t\to+\infty$. **1536.** Základní interval $[0,\pi]$. Křivka protíná osy souřadnic v bodech $\left(\frac{a}{2},0\right)$ pro $t=\frac{\pi}{6}$; $\left(0,-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ pro $t=\frac{\pi}{4}$; $(-a,0)$ pro $t=\frac{\pi}{2}$; $\left(0,\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ pro $t=\frac{3\pi}{4}$ a $\left(\frac{a}{2},0\right)$ pro $t=\frac{5\pi}{6}$. Extremální body: $x_{max}=a$ a $y_{max}=a$ pro $t=0$;

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULTY
Matematické oddělení
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

$y_{min}=-a$ pro $t=\frac{\pi}{3}$; $x_{min}=-a$ pro $t=\frac{\pi}{2}$; $y_{max}=a$ pro $t=\frac{2\pi}{3}$; $x_{max}=a$ a $y_{min}=-a$ pro $t=\pi$. Křivka je konvexní pro $0<t<\frac{\pi}{2}$; a konkávní pro $\frac{\pi}{2}<t<\pi$. **1537.** Funkce x a y mají nezáporné hodnoty a jsou periodické; základní interval $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Extremální body: $x_{min}=0$ a $y_{max}=1$ pro $t=\frac{\pi}{2}$ a $x_{max}=1$ a $y_{min}=0$ pro $t=0$. Křivka je konvexní. **1538.** Definiční obor $t>0$. Symetrie vzhledem k přímce $x+y=0$. Extremální body: $x_{min}=-\frac{1}{e}=-0{,}37$, $y=-e=-2{,}72$ pro $t=\frac{1}{e}$ a $x_{max}=e$, $y=\frac{1}{e}$ pro $t=e$. Inflexní body: $x_1=-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}=-0{,}34$, $y_1=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}=-5{,}82$ pro $t=e^{-\sqrt{2}}=0{,}24$ a $x_2=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$, $y_2=\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$ pro $t=e^{\sqrt{2}}=4{,}10$. Změna znaménka křivosti v bodě $t=\frac{1}{e}$. Asymptoty $x=0$ a $y=0$. **1539.** Funkce x a y jsou periodické s periodou $T=2\pi$, základní interval $-\pi\le t\le\pi$. Symetrie křivky vzhledem k osám souřadnic. Křivka má dvě větve. Extremální body: $x_{min}=a$, $y=0$ pro $t=0$; $x_{max}=-a$, $y=0$ pro $t=\pm\pi$. Křivka je konvexní pro $-\pi<t<-\pi/2$ a $0<t<\pi/2$; je konkávní pro $-\pi/2<t<0$ a $\pi/2<t<\pi$. **1540.** Symetrie vzhledem k ose y; $y_{min}=0$, $x=0$ pro $t=0$. Křivka je konkávní. **1541.** Parametrické rovnice $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ $(-\infty<t<+\infty)$. Symetrie vzhledem k přímce $y=x$. Křivka protíná osy souřadnic v bodě $(0,0)$ (dvojný bod); $x_{max}=a\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59a$ pro $y=a\sqrt[3]{2}\approx 1{,}2a$; $y_{max}=a\sqrt[3]{4}$ pro $x=a\sqrt[3]{2}$. Asymptota $x+y+a=0$. **1542.** Symetrie vzhledem k počátku soustavy souřadnic, vzhledem k osám souřadnic a osám kvadrantů; $(0,0)$ je izolovaný bod. Křivka protíná osy souřadnic v bodech $(\pm1,0)$ a $(0,\pm1)$; $|x|_{min}=1$ pro $y=0$; $|x|_{max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\approx 1{,}10$ pro $|y|=\sqrt{1/2}\approx 0{,}71$; $|y|_{min}=1$ pro $x=0$; $|y|_{max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ pro $|x|=\sqrt{1/2}$. **1543.** Parametrické rovnice $x=\frac{1-t^3}{t^2}$, $y=\frac{1-t^3}{t}$, kde $t=\frac{y}{x}$ $(-\infty<t<+\infty)$. Křivka má dvě větve. Symetrie vzhledem k přímce $x+y=0$. Extremální body $x_{min}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\approx 1{,}89$, $y=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\approx -2{,}38$ pro $t=-\sqrt[3]{2}=-1{,}26$; $y_{max}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, $x=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ pro $t=-\sqrt[3]{1/2}\approx -0{,}79$. Inflexní body $x_1\approx 2{,}18$, $y_1=-4{,}14$ pro $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}\approx -1{,}90$; $x_2=4{,}14$, $y_2\approx -2{,}18$ pro $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}\approx -0{,}53$; změna znaménka křivosti pro $t=-\sqrt[3]{2}$. **1544.** Křivka je složena z přímky $y=x$ a větve hyperboly $x=(1+t)^{1/t}$, $y=(1+t)^{1+1/t}$ $(-1<t<+\infty)$; bod (e,e) je dvojný. Křivka je konvexní pro $x\ne y$. Asymptoty $x=1$ a $y=1$. **1545.** Definiční obor $|x|\ge\ln(1+\sqrt{2})\approx 0{,}88$. Symetrie vzhledem k osám souřadnic. Minimum $y=0$ v hraničních bodech definičního oboru $x=\pm\ln(1+\sqrt{2})$. Křivka je konkávní pro $y>0$ a konvexní pro $y<0$. Asymptoty $y=x$ a $y=-x$. **1546.** Definiční obor $r\ge 0$, $|\varphi|\le\alpha$, kde $\alpha=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. Křivka je uzavřená. Symetrie vzhledem k polární ose. Maximum $r=a+b$ pro $\varphi=0$; minimum $r=0$ v hraničních bodech definičního oboru $\varphi=\pm\alpha$. **1547.** Definiční obor $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}\le\varphi\le\pi$, $\frac{4\pi}{3}\le\varphi\le\frac{5\pi}{3}$. Funkce r je periodická s periodou $\frac{2\pi}{3}$. Křivka je uzavřená a má tři shodné části. Osy symetrie $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ a $\varphi=\frac{3\pi}{2}$. Počátkem soustavy souřadnic prochází křivka třikrát. Pro $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$ existuje maximum $r=a$ pro $\varphi=\frac{\pi}{6}$ a minimum $r=0$ pro $\varphi=0$ a $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **1548.** Definiční obor funkce $|\varphi|<\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{2}<|\varphi|<\frac{5}{6}\pi$, perioda $\frac{2\pi}{3}$. Minimum $r=a$ pro $\varphi=0$ a $\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$. Asymptoty $\varphi=\pm\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ a $\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}$. **1549.** Spirála, pro kterou je počátek soustavy souřadnic asymptotickým bodem; r ostře klesá při rostoucím φ. Asymptota $\varphi=1$. **1550.** Definiční obor $r\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}62$. Maximum $\varphi=\pi$ pro $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ v hraničním bodě definičního oboru; minimum $\varphi=\arccos\frac{1}{4}=75\,°30'$ pro

$r=2$. Asymptota $r\cos\varphi=1$ pro $r\to+\infty$. **1551.** Systém parabol s vrcholy $(1,a-1)$ (ve vrcholech minima). Paraboly protínají osy souřadnic v bodech $(0,a)$ a $(1\pm\sqrt{1-a},0)$ (pro $a\le 1$). Funkce jsou konvexní. **1552.** Systém hyperbol pro $a\neq 0$ a přímka $y=x$ pro $a=0$. Minima $y=2|a|$ v bodech $x=|a|$ a maxima $y=-2|a|$ v bodech $x=-|a|$ $(a\neq 0)$. Asymptoty $y=x$ a $x=0$. **1553.** Systém elips pro $0<a<+\infty$; systém hyperbol pro $-\infty<a<0$; přímka $y=x$ pro $a=0$. Všechny křivky systému procházejí body $(-1,-1)$ a $(1,1)$. Pro $y\ge x$ platí: 1) maximum $y=\sqrt{1+a}$ v bodě $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$, je-li $a>0$; maximum $y=-\sqrt{1+a}$ v bodě $x=-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$, je-li $-1<a<0$; minima $y=\pm 1$ v krajních bodech definičního oboru $x=\pm 1$ $(a\neq 0)$; 2) křivky jsou konkávní. Pro $y\le x$ platí: 1) minimum $y=-\sqrt{1+a}$ v bodě $x=-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$, je-li $a>0$; minimum $y=\sqrt{1+a}$ v bodě $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$, je-li $-1<a<0$; maxima $y=\pm 1$ v krajních bodech definičního oboru $x=\pm 1$; 2) křivky jsou konvexní. Asymptoty $y=(1+\sqrt{-a})x$ a $y=(1-\sqrt{-a})x$ pro $a<0$. **1554.** Systém exponenciálních křivek pro $a\neq 0$; přímka $y=1+\dfrac{x}{2}$ pro $a=0$. Všechny křivky systému procházejí společným bodem $(0,1)$. Minima $y=\dfrac{1}{2a}(1+\ln 2a)$ v bodech $x=\dfrac{1}{a}\ln 2a$, je-li $a>0$; y je ostře rostoucí pro $a\le 0$. Asymptota $y=\dfrac{x}{2}$. **1555.** Systém křivek, které procházejí společným bodem $(0,0)$ se společnou tečnou $y=x$ v tomto bodě. Maximum $y=ae^{-1}\approx 0{,}37a$ v bodě $x=a$, je-li $a>0$; minimum $y=ae^{-1}$ v bodě $x=a$, je-li $a<0$. Inflexní bod $x=2a$, $y=2ae^{-2}\approx 0{,}27a$. Asymptota $y=0$. **1558.** $\dfrac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$. **1559.** $(m+n)\left(\dfrac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$. **1560.** Základ logaritmů nesmí být větší než $e^{1/e}\approx 1{,}445$. **1561.** Čtverec o délce strany $\sqrt{S}$. **1562.** Ostré úhly trojúhelníka jsou $30°$ a $60°$. **1563.** Výška nádoby $H=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ musí být rovna průměru podstavy; povrch jejího celého pláště je $P=\sqrt[3]{54\pi V^2}$. **1564.** $\cos\varphi=\dfrac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}$, kde 2α je úhel odpovídající dané úseči a 2φ je úhel odpovídající úseči vymezené stranou obdelníka. **1565.** Délky stran obdelníka jsou $a\sqrt{2}$ a $b\sqrt{2}$. **1566.** Pro $h>b$ je obvod P vepsaného obdelníka o základně x a výšce y maximální v hraničním bodě $y=h$; pro $h<b$ je P minimální v hraničním případě $y=0$; pro $h=b$ je obvod P konstantní. **1567.** $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$, $h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **1568.** Rozměry kvádru jsou $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ a $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. **1569.** $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$. **1570.** $\pi R^2(1+\sqrt{5})\approx 81\%$ povrchu koule. **1571.** Objem kužele je dvojnásobkem objemu koule. **1572.** $\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. **1573.** Je-li $\operatorname{tg}\alpha<\dfrac{1}{2}$, povrch celého pláště válce je maximální pro $r=\dfrac{R}{2(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, kde r je poloměr základny válce. Je-li $\operatorname{tg}\alpha\ge\dfrac{1}{2}$, pak je povrch celého pláště maximální v hraničním případě $r=R$. **1574.** $p\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\sqrt{\dfrac{2+\sqrt[3]{2}}{2}}$. **1575.** 1; 3. **1576.** Je-li $b\le\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, je maximální délka sečny $\dfrac{a^2}{c}$, kde $c=\sqrt{a^2-b^2}$, maximum se nabývá v bodech $x=\pm\dfrac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}$; $y=\dfrac{b^3}{c^2}$; je-li $b>\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, pak je maximální délka sečny rovna $2b$ v hraničním případě $x=0$, $y=b$. **1577.** $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$; ab. **1578.** Povrch je minimální pro $r=h=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$, kde r je poloměr válce a h je jeho výška. **1579.** $\varphi=60°$. **1580.** Lichoběžník opsaný kružnici. Délka bočních stran je $a\sec^2\dfrac{\alpha}{2}$. **1581.** $\alpha=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}\approx 294°$, kde α je středový úhel zbývající části. **1582.** $\varphi=\arccos\dfrac{q}{p}$, je-li $\arccos\dfrac{q}{p}\ge\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$; $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$, je-li $\arccos\dfrac{q}{p}<\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$.

1583. $\frac{|av \mp bu| \sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$. **1584.** $AM = a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}$. **1585.** Vzdálenost bodového zdroje světla od středu větší koule je rovna $x = \frac{a}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}}$ pro $a \geq r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$ a je rovna $x = a - r$ pro $r + R < a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$, kde a je vzdálenost středů koulí. **1586.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **1587.** $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$. **1588.** $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$, kde k je koeficient úměrnosti. **1589.** $\operatorname{arctg} k$. **1590.** Pro $l \leq 4a$ je úhel sklonu kolíku dán vztahem $\cos\alpha = \frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$; pro $l > 4a$ rovnovážný stav nenastane. **1591.** $k = -3$; $b = 3$; $y = 3(1-x)$. **1592.** $a = \frac{1}{2}e^{x_0}$; $b = e^{x_0}(1-x_0)$; $c = e^{x_0}\left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right)$. **1593.** a) První; b) druhý; c) druhý. **1595.** a) $\sqrt{2}$, (2, 2); b) 500 000, (150, 500 000) (přibližně!). **1596.** $p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{3/2}$. **1597.** $\frac{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{3/2}}{ab}$, kde $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ je excentricita elipsy. **1598.** $\frac{(\varepsilon^2x^2-a^2)^{3/2}}{ab}$, kde $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ je excentricita hyperboly. **1599.** $3|axy|^{1/3}$. **1600.** $\frac{a^2}{b}(1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{3/2}$, kde ε je excentricita elipsy. **1601.** $2\sqrt{2ay}$. **1602.** at. **1604.** $\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$. **1605.** $\frac{(a^2+r^2)^{3/2}}{2a^2+r^2}$. **1606.** $r\sqrt{1+m^2}$. **1607.** $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$. **1608.** $\frac{a^2}{3r}$. **1609.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$. **1610.** $x_0 \approx 680\,\mathrm{m}$. **1611.** Polokubická parabola $27p\eta^2 = 8(\xi-p)^3$. **1612.** Astroida $(a\xi)^{2/3}+(b\eta)^{2/3} = c^{4/3}$, kde $c^2 = a^2 - b^2$. **1613.** Astroida $(\xi+\eta)^{2/3}+(\xi-\eta)^{2/3} = 2a^{2/3}$. **1614.** Řetězovka $\eta = a\cosh\frac{\xi}{a}$. **1615.** Logaritmická spirála $\varrho = ma^{\varphi-\pi/2}$. **1616.** $\xi = \pi a + a(\tau - \sin\tau)$; $\eta = -2a + a(1-\cos\tau)$, kde $\tau = t - \pi$. **1617.** $x_1 = -2{,}602$; $x_2 = 0{,}340$; $x_3 = 2{,}262$. **1618.** $x_1 = -0{,}724$; $x_2 = 1{,}221$. **1619.** $x = 2{,}087 \approx 119°35'$. **1620.** $\pm 0{,}824$. **1621.** $x_1 = 0{,}472$; $x_2 = 9{,}999$. **1622.** $x_1 = 2{,}5062$. **1623.** $x_1 = 4{,}730$; $x_2 = 7{,}853$. **1624.** $x = -0$, 56 **1625** $x = \pm 1{,}199678$. **1626.** $x_1 = 4{,}493$; $x_2 = 7{,}725$; $x_3 = 10{,}904$. **1627.** $x_1 = 2{,}081$; $x_2 = 5{,}940$.

KAPITOLA III

Ve výsledcích této kapitoly z úsporných důvodů neuvádíme integrační konstantu C.

1628. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$. **1629.** $\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7$. **1630.** $x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4$. **1631.** $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x|$. **1632.** $a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2}$. **1633.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$. **1634.** $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$. **1635.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)$. **1636.** $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}$. **1637.** $2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}$. **1638.** $\ln|x| - \frac{1}{4x^4}$. **1639.** $x - \operatorname{arctg} x$. **1640.** $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **1641.** $x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **1642.** $\arcsin x + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **1643.** $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$. **1644.** $\frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9}$. **1645.** $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **1646.** $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$. **1647.** $x - \cos x + \sin x$. **1648.** $(\cos x + \sin x)\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)$. **1649.** $-x - \operatorname{cotg} x$. **1650.** $-x + \operatorname{tg} x$. **1651.** $a\cosh x + b\sinh x$. **1652.** $x - \operatorname{tgh} x$. **1653.** $x - \operatorname{cotgh} x$. **1655.** $\ln|x+a|$. **1656.** $\frac{1}{22}(2x-3)^{11}$.

1657. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{4/3}$. **1658.** $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$. **1659.** $-\frac{2}{15(5x-2)^{3/2}}$. **1660.** $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$.

1661. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **1662.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|$. **1663.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **1664.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}\right|$.

1665. $-\left(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$. **1666.** $-x\sin 5\alpha-\frac{1}{5}\cos 5x$. **1667.** $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **1668.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **1669.** $-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$.

1670. $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$. **1671.** $\frac{1}{2}[\cosh(2x+1)+\sinh(2x-1)]$. **1672.** $2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}$. **1673.** $-2\operatorname{cotgh}\frac{x}{2}$.

1674. $-\sqrt{1-x^2}$. **1675.** $\frac{1}{4}(1+x^3)^{4/3}$. **1676.** $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$. **1677.** $-\frac{1}{2(1+x^2)}$. **1678.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$.

1679. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$. **1680.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **1681.** $\cos\frac{1}{x}$. **1682.** $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **1683.** $-\arcsin\frac{1}{|x|}$.

1684. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **1685.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **1686.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$. **1687.** $2\operatorname{sgn}x\ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|}\right)$. $(x(1+x)>0)$.

1688. $2\arcsin\sqrt{x}$. **1689.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. **1690.** $\ln(2+e^x)$. **1691.** $\operatorname{arctg}e^x$. **1692.** $-\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$.

1693. $\frac{1}{3}\ln^3 x$. **1694.** $\ln|\ln(\ln x)|$. **1695.** $\frac{1}{6}\sin^6 x$. **1696.** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$. **1697.** $-\ln|\cos x|$. **1698.** $\ln|\sin x|$.

1699. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$. **1700.** $\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}$ $(a^2\neq b^2)$. **1700.1** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|$.

1700.2 $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin x\right)$. **1700.3** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\cosh x+\sqrt{\cosh 2x}\right)$. **1701.** $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3 x}$. **1702.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$.

1703. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **1704.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1705.** $\ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right|$. **1706.** $2\operatorname{arctg}e^x$.

1707. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\cosh 2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\sinh^4 x+\cosh^4 x}\right)$. **1708.** $3\sqrt[3]{\operatorname{tgh}x}$. **1709.** $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$. **1710.** $-\frac{1}{\arcsin x}$.

1711. $\frac{2}{3}\ln^{3/2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **1712.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. **1713.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. **1714.** $-\frac{1}{15(x^5+1)^3}$.

1715. $\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)$ pro $n\neq -2$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|$ pro $n=-2$. **1716.** $\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}$.

1717. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$. **1718.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$. **1719.** $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$. **1720.** $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$.

1721. $\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7$. **1721.1** $-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}$. **1722.** $-x-2\ln|1-x|$. **1723.** $\frac{1}{2}(1-x)^2+\ln|1+x|$.

1724. $9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-27\ln|3+x|$. **1725.** $x+\ln(1+x^2)$. **1726.** $\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+2\ln|2-x^2|-x$.

1727. $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$. **1728.** $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|$.

1729. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2}\right]$. **1730.** $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{3/2}$. **1731.** $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{2/3}$.

1732. $\frac{3}{14}(1+x^2)^{7/3}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{4/3}$. **1733.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$. **1734.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **1735.** $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

1736. $\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. **1737.** $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$. **1738.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}$.

1739. $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$. **1740.** $\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$ $(|a|\neq|b|)$.

1741. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. **1742.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. **1743.** $\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin(2x+\alpha)$. **1744.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$.

1745. $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$. **1746.** $-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$. **1747.** $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$.

1748. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$. **1749.** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. **1750.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. **1751.** $-x-\operatorname{cotg}x$.

1752. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|$. **1753.** $-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x$.

1754. $\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x$. **1755.** $-\frac{1}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1756.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|$. **1757.** $\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x$.

1758. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. **1759.** $x-\ln(1+e^x)$. **1760.** $x+2\operatorname{arctg}e^x$. **1761.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sinh 2x$. **1762.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sinh 2x$.

1763. $\frac{2}{3}\sinh^3 x$. **1764.** $\frac{1}{4}\sinh 2x+\frac{1}{8}\sinh 4x$. **1765.** $-(\operatorname{tgh}x+\operatorname{cotgh}x)$. **1766.** $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{4/3}$.

1767. $-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}$. **1768.** $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}$. **1769.** $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}$.

1770. $-\frac{6+25x^2}{1000}(2-5x^3)^{5/3}$. **1771.** $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}$. **1772.** $-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$.

1773. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. **1774.** $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}$. **1775.** $-x-2e^{-x/2}+2\ln(1+e^{x/2})$.

1776. $x-2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)$. **1777.** $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2$. **1778.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1779.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|$.

1780. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. **1781.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **1782.** $-\sqrt{a^2+x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$.

1783. $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$. **1784.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$.

1785. $\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. **1786.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$.

1787. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$. **1788.** $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}\right)$ pro $x>a$;

$-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln\left(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}\right)$ pro $x<-a$. **1789.** $2\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)$ pro $x+a>0$ a $x+b>0$;

$-2\ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}\right)$ pro $x+a<0$ a $x+b<0$. **1790.** $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)$ pro

$x+a>0$ a $x+b>0$. **1791.** $x(\ln x-1)$. **1792.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$ $(n\neq -1)$. **1793.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)$.

1794. $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$. **1795.** $-(x+1)e^{-x}$. **1796.** $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$. **1797.** $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$.

1798. $x\sin x+\cos x$. **1799.** $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$. **1800.** $x\cosh x-\sinh x$.

1801. $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\sinh 3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\cosh 3x$. **1802.** $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1803.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

1804. $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}x$. **1805.** $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\arccos x$. **1806.** $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$.

1807. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$. **1808.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **1809.** $-\sqrt{x}+(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

1810. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\cos x\ln\operatorname{tg}x$. **1811.** $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$. **1812.** $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

1813. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1814.** $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

1815. $\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x$. **1816.** $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. **1817.** $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

1818. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$ $(a\neq 0)$. **1819.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$.

1820. $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$. **1821.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}$. **1822.** $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}$.

1823. $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}$. **1824.** $-\frac{(1-x)e^{\operatorname{arctg}x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. **1825.** $\frac{(1+x)e^{\operatorname{arctg}x}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

1826. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$. **1827.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$. **1828.** $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

1829. $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. **1830.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$. **1831.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}$.

1832. $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\operatorname{arccotg}(e^x)$. **1833.** $-[x+\operatorname{cotg}x\cdot\ln(e\sin x)]$. **1834.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$.

1835. $\frac{e^x}{x+1}$. **1836.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, je-li $ab>0$; $\frac{\operatorname{sgn}a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|$, je-li $ab<0$.

1837. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$. **1838.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$. **1839.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)}{x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)}\right|$.

1840. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1841.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha\neq k\pi$, k je celé číslo). **1842.** $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$. **1843.** $\frac{1}{9}\ln\left\{|x^3+1|(x^3-2)^2\right\}$. **1844.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|$.

1845. $\operatorname{arctg}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)}{2}$. **1846.** $\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right)$ pro $b>0$; $\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$ pro $a>0$ a $b<0$.

1847. $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. **1848.** $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|$. **1849.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right)$.

1851. $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}$. **1852.** $\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\sqrt{x^2+x+1}$. **1853.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$.

1853.1 $\arcsin\frac{2\sin x-1}{3}$. **1854.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|+\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}$.

1855. $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$. **1856.** $-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|$. **1857.** $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}$ $\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. **1858.** $\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right|$. **1859.** $\arcsin\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}$ $(|x|>\sqrt{2})$.

1860. $\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}$ $(|x+1|>\sqrt{6})$. **1861.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

1862. $\frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right)+\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}$. **1863.** $\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}\right|$.

1864. $-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$ $\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. **1865.** $\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x^2}\right|$.

1866. $\ln|x-2|+\ln|x+5|$. **1867.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$.

1868. $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|$.

1869. $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|$. **1870.** $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **1871.** $-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$.

1872. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$. **1873.** $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$. **1874.** $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|$.

1875. $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **1876.** $\operatorname{arctg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$. **1877.** $\frac{1}{2}\operatorname{arccotg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

1878. $-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x-2)$. **1879.** $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)$.

1880. $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. **1881.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1882. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1883.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

1884. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. **1885.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$.

1886. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3$.

1887. $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1888.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1889. $\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1/2}+\frac{8}{5}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(2x+1)$. **1890.** $a+2b+3c=0$.

1891. $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **1892.** $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1893. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x$. **1894.** $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)$.

1895. $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

1896. $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1897.** $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arctg}x$.

1898. $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$. **1899.** $-\frac{8x^4+8x^2+4x-1}{28(x^3+x+1)^2}$. **1900.** $-\frac{x}{x^5+x+1}$ (celý integrál!).

1901. $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1902.** $a\gamma+c\alpha=2b\beta$.

1903. $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}$. **1904.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2$.

1905. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}}$. **1906.** $\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$. **1907.** $\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}$.

1908. $-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)$. **1909.** $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$.

1910. $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1)$. **1911.** $\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)$ $(n\neq 0)$. **1912.** $\frac{1}{2n}\left(\operatorname{arctg}x^n-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right)$ $(n\neq 0)$. **1913.** $\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}$. **1914.** $\frac{1}{10(x^{10}+1)}+\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}$. **1915.** $\frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}$.

1916. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|$. **1917.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **1918.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}$.

1919. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}$. **1920.** $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}-\operatorname{arctg}^3$. **1921.** $I_n=\frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}$, kde $\Delta=4ac-b^2$; $I_3=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1922.** $\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt$; $\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}+3t-\frac{t^2}{2}-3\ln|t|\right)$, kde $t=\frac{x-2}{x+3}$. **1923.** $-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|$.

1924. $R(x)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ij}}{(a_i-x)^{\alpha_j}}+\frac{A_{ij}}{(a_i+x)^{\alpha_j}}\right]$, kde P je polynom, $\pm a_i$ $(i=1,\ldots,k)$ jsou kořeny jmenovatele a A_{ij} jsou konstatní koeficienty.

1925. $-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}\ln\left(1-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+x^2\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right\}$.

1926. $2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$. **1927.** $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2\left(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}\right)^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$.

1928. $\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\frac{27}{8\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, kde $t=\sqrt[3]{2+x}$.

1929. $6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arctg}t$, kde $t=\sqrt[6]{x+1}$. **1930.** $\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$.

1931. $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$. **1932.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

1933. $-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t}$, kde $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$. **1934.** $-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$.

1935. $\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$. **1937.** $-\frac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$.

1938. $-\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. **1939.** $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$. **1940.** $R+\ln(x+1+R)-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}R}{x}\right|$, kde $R=\sqrt{x^2+2x+2}$. **1941.** $\arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}}+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|$. **1942.** $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}$.

1943. $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}$

1944. $\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7+\frac{x^9}{10}\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1945. $\left(-\frac{a^4x}{16}-\frac{a^2x^3}{24}+\frac{x^5}{6}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}$.

1946. $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|$. **1947.** $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$.

1948. $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$. **1949.** $\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|$.

1950. $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}$, kde $x<-2$ nebo $x>0$. **1951.** $4a(ca_1+bb_1)=8a^2c_1+3b^2a_1$ $(a\neq 0)$.

1952. $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$. **1953.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$.

1954. $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$.

1955. $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{|1+x|}$. **1956.** $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{|x-2|}$ $(x<1$ nebo $x>3)$. **1957.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **1958.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|$. **1959.** $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$.

1960. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$. **1961.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|$.

1962. $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$. **1963.** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|$.

1965. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x+1)}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$.

1966. $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$, kde $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$. **1967.** $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arctg}z$, kde $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1968. $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}\left[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\right]+\left[(z-1)^2-(z-1)^{-2}\right]+\left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\right\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|$, kde $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$.

1969. $-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|$, kde $z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

1970. $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|$, kde $z=-x+\sqrt{x(1+x)}$. **1971.** $\frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|$.

1972. $\frac{1}{3}\sqrt{z}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left(\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1}\right)$, kde $z=\frac{1+x}{1-x}$. **1973.** $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x$.

1974. $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{\left(2+x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}$. **1975.** $\frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}+x^{3/2}\right]-\frac{2}{5}\left[(x+1)^{5/2}-x^{5/2}\right]$.

1976. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$. **1977.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|$. **1978.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\ \left(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.

1979. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2\left(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1}\right)}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}$. **1981.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$ pro $x>0$.

1982. $\frac{6}{5}x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+\frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}}-21\operatorname{arctg}x^{1/6}$. **1983.** $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z$, kde $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

1984. $-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}$, kde $z=\sqrt{1-x^2}$. **1985.** $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, kde $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

1986. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z$, kde $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$. **1987.** $\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}$,

kde $z=\sqrt[6]{1+x^6}$. **1988.** $\frac{5}{4}z^4-\frac{5}{9}z^9$, kde $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$. **1989.** $\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$,

kde $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$. **1990.** $m=\frac{2}{k}$, kde $k=\pm1,\pm2,\ldots$ **1991.** $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x$.

1992. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{3}{64}\sin4x+\frac{1}{48}\sin^32x$. **1993.** $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin2x+\frac{3}{64}\sin4x-\frac{1}{48}\sin^32x$.

1994. $\frac{x}{16}-\frac{\sin4x}{64}+\frac{\sin^32x}{48}$. **1995.** $\frac{\sin^5x}{5}-\frac{2\sin^7x}{7}+\frac{\sin^9x}{9}$. **1996.** $-\frac{\cos2x}{64}+\frac{\cos^32x}{96}-\frac{\cos^52x}{320}$.

1997. $\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}$. **1998.** $-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3x}{2\sin^2x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **1999.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2000. $\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **2001.** $-8\operatorname{cotg}2x-\frac{8}{3}\operatorname{cotg}^32x$. **2002.** $\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}+\frac{3\operatorname{tg}^2x}{2}-\frac{\operatorname{cotg}^2x}{2}+3\ln|\operatorname{tg}x|$.

2003. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2004.** $\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2x}{2}-\ln|\cos x|$. **2005.** $-x-\frac{\operatorname{cotg}^5x}{5}+\frac{\operatorname{cotg}^3x}{3}-\operatorname{cotg}x$.

2006. $\frac{\operatorname{tg}^5x}{5}$. **2007.** $-2\sqrt{\operatorname{cotg}x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^5x}$. **2008.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1+t)^3(1+t^3)}{(1-t)^3(1-t^3)}\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{3}}$, kde $t=\sqrt[3]{\sin x}$.

2009. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, kde $z=\sqrt{\operatorname{tg}x}$. **2010.** $\frac{1}{4}\ln\frac{(z^2+1)^2}{z^4-z^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}$,

kde $z=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$. **2011.** $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}$;

$I_6=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5x-\frac{5}{24}\cos x\sin^3x-\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x$;

$K_8=\frac{1}{8}\sin x\cos^7x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x$.

2012. $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$; $I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$;

$K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2x}+\frac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **2013.** $-\frac{1}{8}\cos4x-\frac{1}{12}\cos6x$.

2014. $\frac{x}{4}+\frac{\sin2x}{8}+\frac{\sin4x}{16}+\frac{\sin6x}{24}$. **2015.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}$.

2016. $-\frac{1}{2}\cos(a-b)\cos x-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$.

2017. $\frac{x}{4}+\frac{\sin2ax}{8a}+\frac{\sin2bx}{8b}+\frac{\sin2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin2(a+b)x}{16(a+b)}$.

2018. $-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x$. **2019.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$, je-li $\sin(a-b)\neq 0$. **2020.** $\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|$, je-li $\cos(a-b)\neq 0$. **2021.** $\frac{2}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|$, je-li $\sin(a-b)\neq 0$. **2022.** $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\cos a\neq 0)$. **2023.** $\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\sin a\neq 0)$.

2024. $-x+\operatorname{cotg} a\cdot\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|$ $(\sin a\neq 0)$. **2025.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$. **2026.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$.

2027. $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right|$. **2028.** a) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, je-li $0<\varepsilon<1$;

b) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|$, je-li $\varepsilon>1$. **2029.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)$. **2030.** $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a\operatorname{tg} x}{b}\right)$.

2031. $\frac{(2b^2)^{-1}z}{a^2z^2+b^2}+\frac{1}{2ab^3}\operatorname{arctg}\frac{az}{b}$ $(ab\neq 0)$, kde $z=\operatorname{tg} x$. **2032.** $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$.

2033. $-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$. **2034.** $-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)$. **2035.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)$.

2036. $\frac{1}{4}\left\{\sqrt{2+\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right\}$, kde $u=\operatorname{tg} 2x$. **2037.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}$.

2038. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x)$. **2039.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x\right)$. **2040.** $-\frac{z}{4(z^2+2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}$, kde $z=\operatorname{tg} x$.

2041. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, kde $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **2043.** $-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|$.

2043.1 $0{,}1x+0{,}3\ln|\sin x-3\cos x|$. **2044.** $\frac{3x}{34}+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|$.

2045. $-\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a\sin x+b\cos x}+\frac{aa_1+bb_1}{(a^2+b^2)^{3/2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, kde $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2047. $-\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}$. **2048.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+\sin x+\cos x\right)$.

2049. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}\right|$. **2051.** $-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$.

2052. $\frac{1}{5}(\sin x+3\cos x)+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}+1-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$. **2054.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$.

2055. $\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}$.

2056. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|$.

2058. $\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|$. **2059.** $A=-\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B=\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$,

$C=-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$. **2060.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}$. **2061.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{\operatorname{tg}x-1}$

$(\operatorname{tg}x>0)$. **2062.** $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right)$.

2063. $-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **2064.** $-\frac{2}{n\cos a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^n\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^{-n}$ $(\cos a\neq 0)$.

2065. $I_n=2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}$, kde $n>2$ a $t=\sin\frac{x-a}{2}\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^{-1}$. **2068.** $e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)$.

2069. $-e^{-x}(x^2+2)$. **2070.** $-\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{25}+\frac{24x}{625}\right)\cos 5x+\left(\frac{x^4}{5}-\frac{12x^2}{125}+\frac{24}{3125}\right)\sin 5x$.

2071. $(21-10x^2+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x$. **2072.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^4+6x^2+6)$.

2073. $2e^t(t^5-5t^4+20t^3-60t^2+120t-120)$, kde $t=\sqrt{x}$. **2074.** $e^{ax}\left[\frac{1}{2a}+\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right]$.

2075. $\frac{e^{ax}}{4}\left[\frac{3(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}\right]$. **2076.** $\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]$.

2077. $\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x+\sin x-\cos x]$.

2078. $e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]$.

2079. $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

2080. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})$. **2082.** $x+\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$. **2083.** $e^x-\ln(1+e^x)$.

2084. $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$. **2085.** $x-3\ln\left[\left(1+e^{x/6}\right)\sqrt{1+e^{x/3}}\right]-3\operatorname{arctg}e^{x/6}$. **2086.** $x+\frac{8}{1+e^{x/4}}$.

2087. $-2\arcsin(e^{-x/2})$. **2088.** $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin(e^{-x})$.

2089. $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln\left(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right)-\arcsin\frac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}}$.

2090. $-\frac{1}{2}e^{-x}\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(1-\sqrt{1-e^x}\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)\left(1+\sqrt{1-e^x}\right)}$. **2092.** $a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\ldots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$.

2093. $e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)$. **2094.** $-e^{-x}-\operatorname{li}(e^{-x})$. **2095.** $e^4\operatorname{li}(e^{2x-4})-e^2\operatorname{li}(e^{2x-2})$. **2096.** $\frac{e^x}{x+1}$.

2097. $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^4\operatorname{li}(e^{2x-4})$.

2098. $x[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x+\ldots+(-1)^{n-1}n(n-1)\ldots 2\ln x+(-1)^n n!]$.

2099. $\frac{x^4}{4}\left(\ln^3 x-\frac{3}{4}\ln^2 x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)$. **2100.** $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)$. **2101.** $\ln(x+a)\ln(x+b)$.

2102. $x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x$. **2103.** $-\frac{x}{2}+x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)+\frac{1}{2}\arcsin x$.

2104. $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **2105.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)$.

2106. $-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+\frac{2x\sqrt{x}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **2107.** $-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2}+\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)$.

2108. $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$. **2109.** $-\frac{\operatorname{sgn}x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}$. **2110.** $2\left|1-\sqrt{x}\right|+(1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

2111. $\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}$. **2112.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **2113.** $x-\operatorname{arctg}x+\left(\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}\right)[\ln(1+x^2)-1]$.

2114. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **2115.** $-\ln\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **2116.** $\frac{x}{8}+\frac{\sinh 4x}{32}$.

2117. $\frac{3x}{8}+\frac{\sinh 2x}{4}+\frac{\sinh 4x}{32}$. **2118.** $\frac{\cosh^3 x}{3}-\cosh x$. **2119.** $\frac{\cosh 6x}{24}-\frac{\cosh 4x}{16}-\frac{\cosh 2x}{8}$. **2120.** $\ln\cosh x$.

2121. $x-\operatorname{cotgh}x$. **2122.** $0{,}5\left[\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-2x}\right)\right]$. **2123.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}3^{-1/2}\left(2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}+1\right)$.

2123.1 $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tgh}x-2}{\sqrt{5}}$. **2123.2** $\frac{20}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{\sqrt{11}}\right)$. **2123.3** $-\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}\ln|3\sinh x-4\cosh x|$.

2124. $\frac{a\cosh ax\sin bx-b\sinh ax\cos bx}{a^2+b^2}$. **2125.** $\frac{a\cosh ax\cos bx+b\sinh ax\sin bx}{a^2+b^2}$

2126. $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x$. **2127.** $\frac{1}{8}\frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **2128.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}$.

2129. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)$ $(x\geq 0)$. **2130.** $-\frac{1}{24}(15+10x+8x^2)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}$ $(0<x<1)$.

2131. $-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$ $(|x|<1)$. **2132.** $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$ $(x>0)$. **2133.** $\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}$.

2134. $\frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, kde $z=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$. **2135.** $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right|$.

2136. $\frac{1}{2}\arccos\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$. **2137.** $-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x$ $(|x|<1)$.

2138. $-\frac{1}{2}(1+x)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|$ $(x>0;\ x<-1)$.

2139. $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$.

2140. $-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)$ $(1<x<2)$. **2141.** $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$.

2142. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+\ln|x|$ $(0<|x|<1)$. **2143.** $\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

2144. $\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}+\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ $(|x|>1)$.

2145. $\left(\frac{3-x}{1-x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(0<x<1)$.

2146. $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$. **2147.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x}$.

2148. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$. **2149.** $a\left[x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]-\frac{a-b}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$.

2150. $a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln|x^2-1|\right)+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **2151.** $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}$ $(x>0)$.

2152. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **2153.** $-\ln\left(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x}\right)$. **2154.** $-\frac{6x+x^3}{9}-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}\arccos x$ $(|x|<1)$. **2155.** $-\frac{x^2}{6}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)$. **2156.** $-\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\operatorname{arctg}x$.

2157. $\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}$ $(|x|<1)$. **2158.** $-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$.

2159. $\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arctg}x$. **2160.** x^x $(x>0)$. **2161.** $x-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$ $(x<0)$.

2162. $x-\ln\left(1+e^x\right)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg}e^{x/2}-\left(\operatorname{arctg}e^{x/2}\right)^2$. **2163.** $-\frac{\operatorname{cotgh}1}{4}\left[x-\ln(1+e^x\cosh 1)\right]-\frac{e^{-x}}{4\sinh 1}$.

2164. $-2\ln\left(\operatorname{tgh}x+\sqrt{1+\operatorname{tgh}^2x}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{tgh}^2x}+\sqrt{2}\operatorname{tgh}x}{\sqrt{1+\operatorname{tgh}^2x}-\sqrt{2}\operatorname{tgh}x}$. **2165.** $e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **2166.** $\frac{x|x|}{2}$. **2167.** $\frac{x^2|x|}{3}$.

2168. $\frac{2x^2}{3}$ $(x+|x|)$. **2169.** $\frac{(1+x)|1+x|}{2}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}$. **2170.** e^x-1 pro $x<0$; $1-e^{-x}$ pro $x\geq 0$.

2171. x pro $|x|\leq 1$; $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x$ pro $|x|>1$. **2172.** $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$, kde $(x)=x-[x]$.

2173. $\frac{[x]}{\pi}\left\{[x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\right\}$. **2174.** $x-\frac{x^3}{3}$ pro $|x|\leq 1$; $x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sgn}x$ pro $|x|>1$. **2175.** x pro $-\infty<x\leq 0$; $\frac{x^2}{2}+x$ pro $0\leq x\leq 1$; $x^2+\frac{1}{2}$ pro $x>1$. **2176.** $xf'(x)-f(x)$. **2177.** $\frac{1}{2}f(2x)$. **2178.** $f(x)=2\sqrt{x}$.

2179. $x-\frac{x^2}{2}$. **2180.** $f(x)=x$ pro $-\infty<x\leq 0$; $f(x)=e^x-1$ pro $0<x<+\infty$.

KAPITOLA IV

2181. $12\frac{1}{2}$. **2182.** a) $\underline{S}_n=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$, $\overline{S}_n=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; b) $\underline{S}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$, $\overline{S}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$;

c) $\underline{S}_n=\frac{10230}{n\left(2^{10/n}-1\right)}$, $\overline{S}_n=\frac{10230\,2^{10/n}}{n\left(2^{10/n}-1\right)}$. **2183.** $\underline{S}_n=31\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$; $\frac{31}{5}$. **2184.** $v_0T+\frac{1}{2}gT^2$. **2185.** 3.

2186. $\frac{a-1}{\ln a}$. **2187.** 1. **2188.** $\sin x$. **2189.** $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. **2190.** $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. **2191.** $\ln\frac{b}{a}$. **2192.** a) 0, je-li $|\alpha|<1$; b) $\pi\ln\alpha^2$, je-li $|\alpha|>1$. **2193.4** $\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$. **2201.** Obecně nemusí být integrovatelná.

2203. Nemusí být integrovatelná. **2206.** $11\frac{1}{4}$. **2207.** 2. **2208.** $\frac{\pi}{6}$. **2209.** $\frac{\pi}{3}$. **2210.** 1. **2211.** 1.

2212. $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$. **2213.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. **2214.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$. **2215.** $\frac{\pi}{2|ab|}$. **2216.** a) Integrovaná funkce $\frac{1}{x}$ a její primitivní funkce $\ln|x|$ jsou nespojité na intervalu integrace $[-1,1]$; b) funkce $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$, která je primitivní funkcí, je nespojitá na intervalu $0\leq x\leq 2\pi$; c) funkce $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ je nespojitá v bodě $x=0$. **2217.** $\frac{2}{3}$.

2218. $200\sqrt{2}$. **2219.** $\frac{1}{2}$. **2220.** $\ln 2$. **2221.** $\frac{\pi}{4}$. **2222.** $\frac{2}{\pi}$. **2223.** $\frac{1}{p+1}$. **2224.** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. **2225.** $\frac{1}{e}$.

2226. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. **2227.** $\frac{5}{6}\pi$. **2228.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **2229.** $x+\frac{1}{2}$. **2230.** $\frac{1}{\ln 2}$. **2231.** 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$.

2232. a) $2x\sqrt{1+x^4}$; b) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; c) $(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x)$. **2233.** a) 1; b) $\frac{\pi^2}{4}$; c) 0. **2233.1** A.

2235. 1. **2237.** a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{t}{2}$. **2238.** a) $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}$, je-li $\alpha<0$; $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{3}$, je-li $0\le\alpha\le 1$; $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}$, je-li $\alpha>1$; b) $\frac{\pi}{2}$, je-li $|\alpha|\le 1$; $\frac{\pi}{2\alpha^2}$, je- li $|\alpha|>1$; c) 2, je-li $|\alpha|\le 1$; $\frac{2}{|\alpha|}$, je-li $|\alpha|>1$. **2239.** $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$. **2240.** π. **2241.** 4π.

2242. $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$. **2243.** 1. **2244.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2245.** $\frac{1}{6}$. **2246.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **2247.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **2248.** $2-\frac{\pi}{2}$.

2249. $\frac{\pi^2}{4}$. **2250.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2251.** a) Inverzní funkce $x=\pm t^{3/2}$ je dvojznačná; b) funkce $x=1/t$ je nespojitá v bodě $t=0$; c) neexistuje jednoznačná spojitá větev funkce $x=\operatorname{arctg} t$ definovaná na omezeném intervalu a oborem hodnot od 0 do π. **2252.** Nelze. **2253.** Lze. **2256.** $f(x+b)-f(x+a)$. **2260.** $\frac{3}{2}e^{5/2}$.

2261. $\int_0^1[f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]dt+\int_{-1}^0[f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]dt$. **2262.** $4n$. **2263.** $\frac{\pi^2}{4}$.

2264. $\operatorname{arctg}\frac{32}{27}-2\pi$. **2268.** $315\frac{1}{26}$. **2269.** $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **2270.** $\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$. **2271.** $-66\frac{6}{7}$. **2272.** $-\frac{\pi}{3}$.

2273. $\frac{29}{270}$. **2274.** $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$. **2275.** $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. **2276.** $2\pi\sqrt{2}$. **2277.** $\frac{1}{6}$. **2278.** $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$.

2279. $\frac{3}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$. **2280.** $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$. **2281.** $I_n=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$, je- li $n=2k$; $I_n=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, je- li $n=2k+1$.

2282. Viz úloha **2281**. **2283.** $(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$. **2284.** $2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. **2285.** Viz úloha **2281**. **2286.** $I_n=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$. **2287.** $I_n=(-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}$.

2290. $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}$. **2291.** 0, je-li n sudé; π, je-li n liché. **2292.** $(-1)^n\pi$. **2293.** $\frac{\pi}{2^n}$.

2294. $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$. **2295.** 0. **2296.** 0. **2297.** $\frac{1}{2^{2n}a}\left(1-e^{-2a\pi}\right)\left[\binom{2n}{n}+2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right]$.

2298. $\frac{\pi}{4\pi}(-1)^{n-1}$. **2299.** $\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$. **2302.** V bodech nespojitosti funkce $f(x)$ může a nemusí derivace $F'(x)$ existovat. **2303.** $|x|+C$. **2304.** $\arccos(\cos x)+C$. **2305.** $x[x]-\frac{[x]([x]+1)}{2}+C$.

2306. $\frac{x^2[x]}{2}-\frac{[x]([x]+1)+(2[x]+1)}{12}+C$. **2307.** $C+\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)$. **2308.** $\frac{1}{2}(|l+x|-|l-x|)+C$.

2309. -1. **2310.** $14-\ln(7!)$. **2311.** $\frac{30}{\pi}$. **2312.** $-\frac{\pi^2}{4}$. **2313.** $\ln n!$ **2314.** $-\operatorname{tgh}\frac{\pi}{2}$. **2315.** $\frac{8}{3}$. **2316.** a) $-$; b) $+$; c) $+$; d) $-$. **2317.** a) Druhý; b) druhý; c) první. **2318.** a) $\frac{1}{3}$; b) $6\frac{2}{3}$; c) 10; d) $\frac{1}{2}\cos\varphi$.

2319. $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b$ je kratší poloosa elipsy. **2320.** $\bar{v}=\frac{1}{2}(v_0+v_1)$, kde v_1 je koncová rychlost tělesa. **2321.** $\frac{1}{2}i_0^2$.

2321.1 A. **2322.** a) $\theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$; b) $\theta=\frac{1}{e}$; c) $\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$, $\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\theta=1$. **2323.** $\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta$ ($|\theta|<1$).

2324. Je v intervalu mezi $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ a $\frac{1}{10}$. **2325.** $0{,}01-0{,}005\theta$ ($0<\theta<1$). **2326.1** a) 1; b) $f(0)\ln\frac{b}{a}$.

2328. $\frac{\theta}{50\pi}$ $(0<\theta<1)$. **2329.** $\frac{2}{a}\theta$ $(|\theta|<1)$. **2330.** $\frac{\theta}{a}$ $(|\theta|<1)$. **2334.** $\frac{1}{a}$. **2335.** -1. **2336.** π.

2337. π. **2338.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **2339.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. **2340.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2341.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2342.** $\frac{\pi}{2}$. **2343.** $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **2344.** 0.

2345. $\frac{\pi}{2}-1$. **2346.** $\frac{a}{a^2+b^2}$. **2347.** $\frac{b}{a^2+b^2}$. **2348.** $I_n=n!$ **2349.** $I_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n+1/2}}$.

2350. $I_n=n!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\ln(k+1)$. **2351.** $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, je-li n sudé, a $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, je-li n liché.

2352. $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\pi$, je-li n sudé; $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, je-li n liché. **2353.** a) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; b) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

2354. $\frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\pi/8}}{1-e^{-\pi}}$. **2356.** a) 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0. **2357.** a) 1; b) $\frac{1}{3}$; c) 1; d) $\frac{1}{\alpha}f(0)$. **2358.** Konverguje.

2359. Konverguje. **2360.** Diverguje. **2361.** Konverguje pro $p>0$. **2362.** Konverguje pro $p>-1$ a $q>-1$.
2363. Konverguje pro $m>-1$, $n-m>1$. **2364.** Konverguje pro $1<n<2$. **2365.** Konverguje pro $1<n<2$.
2366. Konverguje pro $m>-2$, $n-m>1$. **2367.** Konverguje pro $n>0$ $(a\neq 0)$. **2368.** Diverguje.
2369. Konverguje pro $p<1$, $q<1$. **2370.** Konverguje pro $n>-1$. **2370.1** Konverguje. **2371.** Konverguje pro $\min(p,q)<1$, $\max(p,q)>1$. **2372.** Konverguje. **2373.** Konverguje. **2374.** Konverguje pro $p>1$, $q<1$.
2375. Konverguje pro $p>1$, libovolné q, $r<1$ a pro $p=1$, $q>1$, $r<1$. **2376.** Konverguje pro $p_i<1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}p_i>1$. **2376.1** Konverguje pro $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $\alpha+\beta<-1$. **2377.** Konverguje, jestliže $n>m+1$ a polynom $P_n(x)$ nemá kořeny v intervalu $[0,+\infty)$. **2378.** Konverguje neabsolutně.

2379. Konverguje neabsolutně. **2380.** Konverguje absolutně pro $-1<\frac{p+1}{q}<0$; konverguje neabsolutně pro $0\leq\frac{p+1}{q}<1$. **2380.1** Konverguje. **2380.2** Konverguje. **2381.** Konverguje absolutně pro $p>-2$, $q>p+1$; konverguje neabsolutně pro $p>-2$, $p<q\leq p+1$. **2382.** Konverguje neabsolutně pro $0<n<2$.
2383. Konverguje absolutně pro $n>m+1$; konverguje neabsolutně pro $m<n\leq m+1$. **2385.** Nemůžeme.

2392. $\ln\frac{1}{2}$. **2393.** 0. **2394.** π. **2395.** 0. **2397.** $\frac{a^2}{3}$. **2398.** $4\frac{1}{2}$. **2399.** $4\frac{1}{2}$. **2400.** $9{,}9-8{,}1\log e\approx 6{,}38$.

2400.1 $2-\frac{1}{\ln 2}\approx 0{,}56$. **2400.2** $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\approx 0{,}97$. **2401.** $\frac{\pi}{2}$. **2402.** πa^2. **2403.** πab. **2404.** $\frac{4}{3}a^3$.

2405. $\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2$. **2406.** $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. **2407.** $3\pi a^2$. **2408.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **2409.** $\frac{2\pi}{n+2}$. **2410.** $\frac{1}{2}\operatorname{cotgh}\frac{\pi}{2}\approx 0{,}546$.

2411. $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **2412.** $x=\cosh S$, $y=\sinh S$. **2413.** $3\pi a^2$. **2414.** $\frac{8}{15}$. **2415.** $\frac{a^2}{3}(4\pi^2+3\pi)$. **2416.** $6\pi a^2$.

2417. $\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{c^4}{ab}$. **2417.1** $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. **2418.** a^2. **2419.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **2420.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **2421.** $\frac{p^2}{6}\left(3+4\sqrt{2}\right)$.

2422. $\frac{\pi p^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}}$. **2422.1** 11π. **2422.2** $\frac{1}{\pi}$. **2423.** $(\pi-1)\frac{a^2}{4}$. **2424.** $\frac{1}{2}\left(1-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$. **2424.1** $\frac{2}{3}$.

2424.2 $\frac{1}{\pi}$. **2424.3** $4\frac{4}{15}$. **2424.4** $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$. **2425.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$. **2426.** $\frac{3}{2}a^2$. **2427.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **2428.** a^2.

2429. $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2430.** $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. **2431.** $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$. **2432.** $2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$. **2433.** $\sqrt{h^2-a^2}$.

2434. $x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$. **2435.** $\frac{e^2+1}{4}$. **2436.** $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$. **2437.** $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$.

2438. $a\ln\frac{a}{b}$. **2439.** $4a\left(1+\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. **2440.** $6a$. **2441.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **2442.** $1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. **2443.** $8a$.

2444. $2\pi^2 a$. **2445.** $2\left(\cosh\frac{T}{2}\sqrt{\cosh T}-1\right)-\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\cosh\frac{T}{2}+\sqrt{\cosh T}}{1+\sqrt{2}}$. **2445.1** $\frac{1}{2}(\cosh^{3/2}2T-1)$.

2446. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. **2447.** $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. **2448.** $8a$. **2449.** $p\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$. **2450.** $\frac{3\pi a}{2}$.

2451. $a(2\pi-\operatorname{tgh}\pi)$. **2452.** $2+\frac{1}{2}\ln 3$. **2452.1** $6\frac{1}{3}$. **2452.2** $\sinh R$. **2452.3** T. **2455.** $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\approx 0{,}73$.

2456. $\frac{bh}{6}(2a+c)$. **2457.** $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. **2458.** $\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. **2459.** $\frac{1}{2}SH$.

2462. $\frac{2}{3}abc$. **2463.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **2464.** $\frac{8\pi abc}{3}$. **2465.** $\frac{16}{3}a^3$. **2466.** $\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **2467.** $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$.

2468. $\frac{\pi a^3}{2}$. **2469.** $\frac{4}{15}$. **2470.** $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^3$. **2472.** $\frac{3}{7}\pi ab^2$. **2473.** a) $\frac{16\pi}{15}$; b) $\frac{8\pi}{3}$. **2474.** a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) $2\pi^2$.

2475. a) $\frac{4}{15}\pi ab^2$; b) $\frac{\pi a^2 b}{6}$. **2476.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) 2π. **2477.** $2\pi^2 a^2 b$. **2478.** $\frac{8\pi a^3}{3}$. **2479.** $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$.

2480. a) $5\pi^2 a^3$; b) $6\pi^3 a^3$; c) $7\pi^2 a^3$. **2481.** a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; b) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$. **2481.1** $V_x=\frac{64}{35}\pi$, $V_y=\frac{64}{105}\pi$.

2483. a) $\frac{8}{3}\pi a^3$; b) $\frac{13}{4}\pi^2 a^3$. **2484.** a) $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$; b) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; c) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$. **2484.1** $\frac{2}{3}(\pi^4-6\pi^2)a^3$.

2484.2 $\frac{2}{3}\pi$. **2485.** $\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}$. **2486.** $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

2487. $2a\sqrt{\pi^2 a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi a}{2b}+\frac{\sqrt{\pi^2 a^2+4b^2}}{2b}\right)$. **2488.** $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$.

2489. a) $\frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2\right]$; b) $\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right]$.

2490. a) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; b) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$, kde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ je excentricita elipsy.

2491. $4\pi^2 ab$. **2492.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **2493.** a) $\pi a\left(2b+a\sinh\frac{2b}{a}\right)$; b) $2\pi a\left(a+b\sinh\frac{b}{a}-a\cosh\frac{b}{a}\right)$. **2494.** $4\pi a^2$.

2495. a) $\frac{64}{3}\pi a^2$; b) $16\pi^2 a^2$; c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **2496.** $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$. **2497.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **2498.** a) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$;

b) $2\pi a^2\sqrt{2}$; c) $4\pi a^2$. **2499.** $\frac{5}{128\sqrt[3]{10}}\left[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})\right]\approx 1{,}013$. **2500.** $V=\frac{4\pi}{3}p^2$;

$P=2\pi p^2\left[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})\right]$. **2501.** $M_1=2a^2$; $M_2=\frac{\pi a^3}{2}$. **2501.1** $\frac{p^2}{8}\left[\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})\right]$. **2502.** $M_1=\frac{bh^2}{6}$;

$M_2=\frac{bh^3}{12}$. **2502.1** $I_x=\frac{8}{35}a^4$, $I_y=\frac{8}{5}a^4$, $r_x=a\sqrt{6/35}$, $r_y=a\sqrt{6/5}$. **2503.** $M_2^{(x)}=\frac{\pi ab^3}{4}$; $M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3 b}{4}$.

2504. $M_1=\frac{\pi r^2 h^2}{12}$, $M_2=\frac{\pi}{30}r^2h^3$. **2504.1** $I=\frac{2}{5}MR^2$. **2507.** $x_0=a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $y_0=0$. **2508.** $\left(\frac{9}{20}a,\frac{9}{20}a\right)$.

2509. $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$. **2510.** $\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$. **2511.** $\varphi_0=\varphi-\alpha$, kde $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2m}$; $r_0=\frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$. Logaritmickou

spirálu $r_0=\frac{am}{\sqrt{1+4m^2}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}$. **2512.** $\varphi_0=0$, $r_0=\frac{5}{6}a$. **2513.** $x_0=\pi a$, $y_0=\frac{5}{6}a$. **2514.** $x_0=\frac{2}{3}a$, $y_0=0$.

2515. $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$. **2516.** 75 kg. **2517.** $A_h = mg\frac{Rh}{R+h}$, kde R je poloměr Země; $A_\infty = mgR$. **2518.** 0,5W. **2519.** 1740W. **2520.** $\frac{2}{3}a^3$. **2521.** $708\frac{1}{3}T$. **2522.** $v_0 T + \frac{a}{2}T^2$. **2523.** $\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2 R^3$. **2524.** Projekce gravitační síly na osy souřadnic jsou $X=0$, $Y=-2km\mu_0/a$, kde k je gravitační konstanta.

2525. $2\pi km\delta_0\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, kde k je gravitační konstanta. **2526.** Přibližně za 3 hodiny. **2527.** Nádoba musí mít povrch, který je vytvořen rotací křivky $y=Cx^4$ kolem vertikální osy y. **2528.** $Q=Q_0 2^{-t/1600}$. **2529.** 99,92 %. **2530.** $\frac{\gamma H^2}{6E}$. Ve výsledcích pro přibližný výpočet určitých integrálů byly použity tabulkové hodnoty. **2531.** −6,2832. **2532.** 0,69315. **2533.** 0,83566. **2534.** 1,4675. **2535.** 17,333. **2536.** 5,4024. **2537.** 1,37039. **2538.** 0,2288. **2539.** 0,915966. **2540.** 3,14159. **2541.** 1,463. **2542.** 0,3179. **2543.** 0,8862. **2544.** 51,04.

2545.

x	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$5\pi/3$	2π
y	0	0,99	1,65	1,85	1,72	1,52	1,42

KAPITOLA V

2546. $\frac{2}{3}$. **2547.** $\frac{3}{2}$. **2548.** 3. **2549.** 1. **2550.** $\frac{1}{3}$. **2551.** a) $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$; b) $\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$.

2552. $1-\sqrt{2}$. **2553.** Konverguje pouze pro $x=k\pi$ (k je celé číslo). **2556.** Diverguje. **2557.** Diverguje. **2558.** Konverguje. **2559.** Diverguje. **2560.** Diverguje. **2561.** Diverguje. **2562.** Konverguje. **2563.** Konverguje. **2564.** Diverguje. **2566.** Může jak konvergovat, tak divergovat. **2567.** a) Může jak konvergovat, tak divergovat; b) diverguje. **2578.** Konverguje. **2579.** Konverguje. **2580.** Konverguje. **2581.** a) Konverguje; b) diverguje. **2582.** Konverguje. **2583.** Konverguje. **2584.** Konverguje. **2585.** Konverguje. **2585.1** Konverguje. **2585.2** Konverguje pro libovolná čísla α a x. **2586.** Konverguje. **2587.** Diverguje. **2588.** Diverguje. **2589.** Konverguje. **2589.1** Konverguje. **2589.2** Konverguje. **2590.** Konverguje. **2591.2** $n \geq 13$. **2595.** Konverguje. **2596.** Konverguje. **2597.** Konverguje. **2597.1** Konverguje. **2598.** Konverguje pro $p>2$. **2599.** Konverguje pro $\frac{b-a}{d}>1$. **2600.** Konverguje pro $p>\frac{3}{2}$. **2601.** Konverguje. **2602.** Konverguje pro $p+q>1$. **2603.** Konverguje pro $q>p$. **2604.** Konverguje pro $\frac{p}{2}+q>1$. **2605.** Konverguje pro $\alpha(q-p)>1$. **2607.** Konverguje pro $q>p+1$. **2608.** Konverguje pro $p>0$. **2609.** Konverguje pro $p>0$. **2610.** Konverguje pro $p>\frac{1}{2}$. **2611.** Konverguje pro $b\neq 1$. **2612.** Konverguje pro $p>1$. **2613.** Diverguje. **2614.** Diverguje. **2614.2** Konverguje pro $p+x>1$. **2616.** Konverguje pro $x<\frac{1}{e}$. **2617.** Konverguje. **2618.** Diverguje. **2619.** Konverguje pro $p>1$. **2620.** Konverguje pro $p>1$, libovolné q a pro $p=1$, $q>1$. **2620.1** Diverguje. **2620.2** Konverguje. **2620.3** Konverguje. **2621.** Diverguje. **2623.** 1,20. **2626.** Konverguje pro $\alpha>\frac{1}{2}$. **2627.** Konverguje pro $a=\frac{1}{2}$. **2628.** Diverguje. **2629.** Konverguje. **2630.** Konverguje pro $a>2$. **2631.** Konverguje. **2632.** Konverguje. **2633.** Konverguje. **2634.** Konverguje pro $c=0$, $\frac{a}{d}<-1$. **2635.** Diverguje. **2636.** Konverguje pro $\alpha\neq 0$. **2637.** Konverguje. **2638.** Diverguje. **2639.** Konverguje. **2640.** Konverguje pro $a=\sqrt{bc}$. **2641.** Konverguje pro $\alpha<-1$. **2642.** Konverguje pro $\alpha>\frac{1}{2}$. **2643.** Konverguje pro $a^b>e$,

$c=0$ a pro $a^c>1$. **2644.** Konverguje pro $a+b>1$. **2645.** Konverguje. **2646.** Konverguje. **2647.** Konverguje. **2648.** Diverguje. **2649.** Konverguje. **2650.** Konverguje. **2651.** Konverguje. **2652.** Konverguje pro $\alpha>2$. **2653.** Konverguje. **2654.** Konverguje. **2655.** a) $N>100000$; b) $N\geq 12$; c) $N>4$. **2659.** $\frac{2}{9}$. **2660.** $1\frac{3}{7}$. **2661.** $\ln 2$. **2662.** a) $\frac{3}{2}\ln 2$; b) $\frac{1}{2}\ln 2$. **2664.** Konverguje. **2665.** Konverguje. **2666.** Konverguje. **2666.1** Nevyplývá. **2667.** Konverguje. **2668.** Konverguje. **2669.** Konverguje. **2670.** Diverguje. **2671.** Konverguje. **2672.** Konverguje. **2673.** Diverguje. **2673.1** Konverguje. **2675.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $0<p\leq 1$. **2676.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $0<p\leq 1$. **2677.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $\frac{1}{2}<p\leq 1$. **2678.** Konverguje absolutně pro $|x-\pi k|<\frac{\pi}{4}$ (k je celé číslo); konverguje neabsolutně pro $x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}$. **2679.** Konverguje neabsolutně pro libovolné x, které není celým záporným číslem. **2680.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $0<p\leq 1$. **2681.** Konverguje absolutně pro $p>2$; konverguje neabsolutně pro $1<p\leq 2$. **2682.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $1/2<p\leq 1$. **2683.** Konverguje neabsolutně. **2684.** Konverguje absolutně. **2685.** Diverguje. **2686.** Konverguje neabsolutně. **2687.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $1/2<p\leq 1$. **2688.** Diverguje. **2689.** Konverguje absolutně pro $p>2$; konverguje neabsolutně pro $0<p\leq 2$. **2690.** Konverguje. **2691.** Diverguje. **2692.** Konverguje absolutně pro $q>p+1$; konverguje neabsolutně pro $p<q\leq p+1$. **2693.** Konverguje absolutně pro $p>1$, $q>1$; konverguje neabsolutně pro $0<p=q\leq 1$. **2694.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $p=1$. **2695.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $p=1$. **2696.** Konverguje absolutně pro $p>1$, $q>1$; konverguje neabsolutně pro $0<p=q\leq 1$. **2698.** a) $p>1$; b) $0<p\leq 1$. **2698.1** a) Konverguje; b) konverguje; c) konverguje. **2699.** a) $q>p+1$; b) $p<q\leq p+1$. **2700.** Konverguje absolutně pro $m\geq 0$; konverguje neabsolutně pro $-1<m<0$. **2703.1** a) $n\geq 1\,000\,000$; b) $n\geq 1{,}32\,10^{16}$. **2706.** a) Diverguje; b) může konvergovat i divergovat. **2707.** $\frac{2}{3}$. **2708.** $\frac{3}{4}$. **2709.** $-\frac{2}{7}$. **2710.** $\frac{1+y}{1-xy}$. **2716.** Konverguje absolutně pro $|x|>1$. **2717.** Konverguje absolutně pro $x>0$; konverguje neabsolutně pro $x=0$. **2718.** Konverguje absolutně pro $x>-\frac{1}{3}$ a pro $x<-1$. **2719.** Konverguje absolutně pro $|x|\neq 1$ a konverguje neabsolutně pro $x=-1$. **2720.** Konverguje absolutně pro $-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{1}{3}$ a pro $\frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{17}+3}{6}$. **2721.** Konverguje absolutně pro $|x-\pi k|\leq\frac{\pi}{6}$ ($k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$). **2722.** Konverguje absolutně pro $p>1$ a $x\neq k$ ($k=-1,-2,\ldots$) a konverguje neabsolutně pro $0<p\leq 1$, $x\neq k$. **2723.** Konverguje absolutně pro $q>p+1$, konverguje neabsolutně pro $p<q\leq p+1$. **2724.** Konverguje absolutně pro $|x|<1$. **2725.** Konverguje absolutně pro $|x|<1$. **2726.** Konverguje absolutně pro $|x|\neq 1$. **2727.** Konverguje absolutně pro $x\neq -1$. **2728.** Konverguje absolutně pro $x>0$. **2729.** Konverguje absolutně pro $0<|x|<+\infty$, je-li $|a|>1$; diverguje, je-li $|a|\leq 1$ nebo $x=0$. **2730.** Konverguje absolutně pro $x=2$ a pro $x>e$. **2731.** Konverguje absolutně pro $x>1$. **2732.** Konverguje pro $0<\min(x,y)<1$. **2733.** Konverguje absolutně pro $|x|<1$, $0\leq y<+\infty$ a pro $|x|>1$, $y>|x|$; konverguje neabsolutně pro $x=-1$, $0\leq y\leq 1$. **2734.** Konverguje absolutně pro $\max(|x|,|y|)<1$. **2735.** Konverguje absolutně pro: 1) $0\leq x<1$, $-\infty<y<+\infty$; 2) $x=1$, $y>1$; 3) $x>1$, $y>2$. **2736.** Konverguje absolutně pro $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$, kde k je celé číslo. **2738.** $\frac{1}{2}<|x|<2$; $\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$. **2739.** a) Konverguje absolutně pro $x\geq 0$, konverguje neabsolutně pro $-1<x<0$; b) konverguje absolutně pro $p+x>1$ a pro $x=0,1,2,\ldots$, konverguje neabsolutně pro $0<p+x\leq 1$; c) konverguje absolutně pro: 1) $|x|<1$, y libovolné; 2) $x=\pm 1$, $y>\frac{1}{2}$; 3) x libovolné, $y=0,1,2,\ldots$; konverguje neabsolutně pro $x=1$, $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$. **2743.** Pro $\varepsilon=0{,}001$ a $x=\sqrt[m]{0{,}1}$ musí být $N\geq 3m$. Není.

2744. $n > \frac{1}{\varepsilon}$. **2745.** $n \geq 26$. **2746.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **2747.** Konverguje stejnoměrně. **2748.** Konverguje nestejnoměrně. **2749.** Konverguje stejnoměrně. **2750.** Konverguje stejnoměrně. **2751.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně; c) konverguje stejnoměrně. **2752.** a) Konverguje nestejnoměrně; b) konverguje stejnoměrně. **2753.** Konverguje stejnoměrně. **2754.** Konverguje nestejnoměrně. **2755.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **2756.** a) Konverguje nestejnoměrně; b) konverguje stejnoměrně. **2757.** Konverguje nestejnoměrně. **2758.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **2759.** Konverguje stejnoměrně. **2760.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **2761.** Konverguje stejnoměrně. **2762.** Konverguje stejnoměrně. **2763.** Konverguje nestejnoměrně. **2767.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **2768.** Konverguje stejnoměrně. **2768.1** Konverguje nestejnoměrně. **2769.** Konverguje nestejnoměrně. **2770.** Konverguje stejnoměrně. **2771.** Konverguje nestejnoměrně. **2772.** Konverguje stejnoměrně. **2773.** a) Konverguje nestejnoměrně; b) konverguje stejnoměrně. **2775.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **2776.** Konverguje nestejnoměrně. **2777.** Konverguje stejnoměrně. **2778.** Konverguje stejnoměrně. **2779.** Konverguje stejnoměrně. **2780.** Konverguje stejnoměrně. **2781.** Konverguje stejnoměrně. **2782.** Konverguje stejnoměrně. **2783.** Může. **2785.** Neplatí. **2795.** a) Je definovaná a spojitá pro $|x| < 1$; b) je definovaná a spojitá pro $|x| < +\infty$; c) je definovaná pro $|x| < +\infty$, není spojitá v bodě $x = 0$. **2799.** a) Je definovaná a diferencovatelná pro $x \neq -k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; b) je definovaná pro $|x| < +\infty$, je diferencovatelná všude s výjimkou bodu $x = 0$. **2802.** a) libovolné α; b) $\alpha < 1$; c) $\alpha < 2$. **2805.** Nemůžeme. **2806.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **2807.** 1. **2808.** 1. **2808.1** $\frac{\pi^2}{6}$. **2809.** Můžeme. **2810.** Můžeme. **2812.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = -1$ konverguje absolutně, je-li $p > 1$, a konverguje neabsolutně, je-li $0 < p \leq 1$; pro $x = 1$ konverguje absolutně, je-li $p > 1$, a diverguje, je-li $p \leq 1$. **2813.** $R = \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Pro $x = -\frac{4}{3}$ konverguje neabsolutně; pro $x = -\frac{2}{3}$ diverguje. **2814.** $R = 4$; $(-4, 4)$. Pro $x = \pm 4$ diverguje. **2815.** $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$. **2816.** $R = \frac{1}{e}$; $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. Pro $x = \pm\frac{1}{e}$ diverguje. **2817.** $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$. **2818.** $R = 2$; $(-1, 3)$. Pro $x = -1$ konverguje absolutně, je-li $p > 2$, a konverguje neabsolutně, je-li $0 < p \leq 2$; pro $x = 3$ konverguje absolutně, je-li $p > 2$, a diverguje, je-li $p \leq 2$. **2819.** $R = 2^p$; $(-2^p, 2^p)$. Pro $x = -2^p$ konverguje absolutně, je-li $p > 2$ a diverguje, je-li $p \leq 2$; pro $x = 2^p$ konverguje absolutně, je-li $p > 2$, a konverguje neabsolutně, je-li $0 < p \leq 2$. **2820.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = -1$ konverguje absolutně, je-li $m \geq 0$, a diverguje, je-li $m < 0$; pro $x = 1$ konverguje absolutně, je-li $m \geq 0$, a konverguje neabsolutně, je-li $-1 < m < 0$. **2821.** $R = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$; $(-R, R)$. Pro $x = -R$ konverguje neabsolutně, je-li $a \geq b$, a konverguje absolutně, je-li $a < b$; pro $x = R$ diverguje, je-li $a \geq b$, a konverguje absolutně, je-li $a < b$. **2822.** $R = \max(a, b)$; $(-R, R)$. Pro $x = \pm R$ diverguje. **2823.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = \pm 1$ konverguje absolutně, je-li $a > 1$, a diverguje, je-li $a \leq 1$. **2824.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = \pm 1$ konverguje absolutně. **2825.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = -1$ konverguje neabsolutně; pro $x = 1$ diverguje. **2826.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = -1$ diverguje; pro $x = 1$ a konverguje neabsolutně. **2827.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = \pm 1$ diverguje. **2828.** $R = \frac{1}{4}$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Pro $x = \pm\frac{1}{4}$ diverguje. **2829.** $R = \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Pro $x = \pm\frac{1}{3}$ diverguje. **2830.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = \pm 1$ konverguje absolutně. **2831.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = \pm 1$ konverguje neabsolutně. **2831.1** Pro $0 < x < 2$ konverguje absolutně; pro $x = 2$ konverguje neabsolutně. **2831.2** Konverguje jedině pro $x = 0$. **2832.** $R = 1$; $(-1, 1)$. Pro $x = -1$ konverguje absolutně, je-li $\gamma - \alpha - \beta > 0$, a konverguje neabsolutně, je-li $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$; pro $x = 1$ konverguje absolutně, je-li $\gamma - \alpha - \beta > 0$, a diverguje, je-li $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$. **2833.** $x > 0$. **2834.** $|x| > \frac{1}{2}$. **2835.** $0 < |x| < +\infty$. **2836.** $x > -1$. **2837.** $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$, kde k je celé číslo. **2838.** $-1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$. **2839.** a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ $(|x| < |a|)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$ $(|x-b| < |a-b|)$;

c) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{x^{n+1}}$ $(|x|>|a|)$. **2840.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ $(0<x\le 2)$; $\ln 2$. **2841.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty)$.

2842. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x|<+\infty)$. **2843.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x|<+\infty)$. **2844.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$.

2845. $\mu x+\frac{\mu(1^2-\mu^2)}{3!}x^3+\frac{\mu(1^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!}x^5+\ldots$ $(|x|<1)$. **2846.** $1-\frac{\mu^2}{2!}x^2-\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!}x^4-\ldots$ $(|x|<1)$.

2847. $1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{2}+\ldots$ $(0<x<2)$. **2848.** $e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\ldots\right)$ $(|x|<1)$.

2849. $\sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\ldots$ $(|h|<+\infty)$;

$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x+\frac{h^3}{3!}\sin x+\ldots$ $(|h|<+\infty)$. **2850.** a) $(-2,2)$; $(3,7)$. **2850.1** Není.

2851. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $(|x|<+\infty)$. **2852.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x|<+\infty)$. **2853.** $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$(|x|<+\infty)$. **2854.** $\sum_{n=10}^{\infty}x^n$ $(|x|<1)$. **2855.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x|<1)$.

2856. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$ $\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)$. **2857.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$. **2858.** $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-2)^n\right]x^n$ $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$.

2859. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n$ $(|x|<1)$. **2860.** $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n$ $(|x|<1)$. **2861.** $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, kde

$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]$ (Fibonacciho čísla). **2862.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}$ $(|x|<1)$.

2862.1 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$, kde $c_n=1$, je-li $n=4k$; $c_n=-1$, je-li $n=2k+1$; $c_n=0$, je-li $n=2k+2$ nebo $n=2k+3$

$(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $f^{(1000)}(0)=1000!$. **2863.** $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\cos n\alpha$ $(|x|<1)$. **2864.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha$ $(|x|<1)$.

2865. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sinh n\alpha$ $\left(|x|<e^{-|\alpha|}\right)$. **2866.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$ $(|x|<1)$. **2867.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+\left[1+(-1)^n\right](-1)^{n/2+1}}{n}x^n$

$(-1<x\le 1)$. **2868.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$. **2869.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|\le 1)$; $\frac{\pi}{4}$.

2870. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|\le 1)$. **2871.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}$ $(|x|\le 1)$.

2872. $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n$ $(|x|\le 1)$. **2873.** a) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $(-1\le x\le 1)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(-1<x<1)$;

c) $\operatorname{arctg}2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ $\left(-\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}\right)$; d) $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{[n/2]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\right\}$ $\left(|x|<\sqrt{2}\right)$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$

$(|x|\le 1)$; f) $2|x|\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n}}{2n+1}\right\}$ $(|x|\le 1)$; g) $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right\}$ $(|x|\le 1)$;

h) $-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$ $(|x|\le 1)$

2874. a) $e^{x^2}\left[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\ldots\right]$;

b) $\frac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{ax}\left[a^n+\frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}a^{n-2}x^2+\ldots\right]$;

c) $\frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x^2)^n}\left[x^{n-1}-\frac{(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}x^{n-5}-\ldots\right]$. **2875.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}\ (-2\le x\le 0)$.

2876. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\ (|x|>1)$. **2877.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}\ (x>0)$. **2878.** $\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}$

$\left(x>-\frac{1}{2}\right)$. **2881.** $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3-\ldots\ (|x|<1)$. **2882.** $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n\ (|x|<+\infty)$.

2883. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n\ (|x|<+\infty)$, kde $0!=1$, $(-1)!=\infty$, $(-2)!=\infty$ atd.

2884. $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\ (-1\le x<1)$. **2885.** $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}\ (|x|\le 1)$.

2886. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\ (|x|<+\infty)$. **2887.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\ (|x|<+\infty)$.

2888. $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n\right\}\ (-1<x<1)$. **2889.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}\ (|x|\le 1)$.

2890. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}\ (|x|\le 1)$. **2891.** $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots\ \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **2892.** $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots$

$\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **2893.** $-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\ldots\ (|x|<\pi)$. **2894.** $E_0=1$, $\sum_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}\right\}=0$.

2895. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n\ (|x|<1)$, kde $P_0(t)=1$;

$P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left[t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-\ldots\right]\ (n\ge 1)$ (Legendreovy polynomy).

2896. $\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n$, kde $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$. **2897.** a) $R\ge\min(R_1,R_2)$; b) $R\ge R_1R_2$. **2901.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

$(|x|<+\infty)$. **2902.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\ (|x|\le 1)$. **2903.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\ (|x|<+\infty)$.

2904. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\ (|x|\le 1)$. **2905.** $x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}-\ldots\ (|x|<1)$. **2906.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (|x|<1)$.

2907. $\operatorname{arctg}x\ (|x|\le 1)$. **2908.** $\cosh x\ (|x|<+\infty)$. **2909.** $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\ (|x|\le 1)$. **2910.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

$(-1\le x<1)$. **2911.** $\frac{x}{(1-x)^2}\ (|x|<1)$. **2912.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}\ (|x|<1)$. **2913.** $\frac{2x}{(1-x)^3}\ (|x|<1)$. **2916.** $R=2$;

$(x-1)^2+(y-1)^2<4$. **2917.** $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2+y^2<\frac{1}{2}$. **2918.** $R=1$; $x^2+y^2<1$. **2919.** $R=1$; $x^2+y^2<1$.

2920. $R=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|$; $(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **2921.** 2,080. **2922.** a) 0,87606 = 50°11'40"; b) 1,99527; c) 0,60653; d) 0,22314. **2923.** 0,30902. **2924.** 0,999848. **2925.** 0,158. **2926.** 2,718282. **2927.** 0,1823. **2928.** 3,1416. **2929.** 3,142. **2930.** 3,141592654. **2931.** $\ln 2 = 0{,}69315$; $\ln 3 = 1{,}09861$. **2932.** a) 0,747; b) 2,835; c) 1,605; d) 0,905; e) 1,057; f) 0,119; g) 0,337; h) 0,927; i) 8,041; j) 0,488; k) 0,507; l) 0,783. **2933.** 3,82. **2934.** 4,84. **2935.** 20,02 m. **2936.** $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$. **2937.** Fourierova řada je identicky rovna polynomu $P_n(x)$. **2938.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$; $\frac{\pi}{4}$. **2939.** $\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}$.

2940. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **2941.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. **2942.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

2943. $\frac{(a-b)\pi}{4}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **2944.** $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$.

2945. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]$. **2946.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}$.

2947. $\frac{2\sinh\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2+a^2}$. **2948.** $2\sinh ah\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{n\pi x}{h}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2+(\pi n)^2}\right]$.

2949. $a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ $(a<x<a+2l)$.

2950. $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$. **2951.** $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$. **2952.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right\}$.

2953. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$. **2954.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2955.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$ (x není celé číslo).

2956. $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **2957.** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$. **2958.** $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$.

2959. $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\cos nx$. **2960.** $\frac{4}{\pi}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[2+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi}{2}\right]\cos(8k+4)x\right\}+$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[\frac{8}{\pi}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m-1}\sin(2m-1)\frac{\pi}{4}\right]\cos 8kx\right\}$. **2961.** a) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ $(-\pi\le x\le\pi)$;

b) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$ $(0\le x<\pi)$; c) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $(0<x<2\pi)$; $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^2}{8}$. **2962.** $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$;

$x^4=\frac{1}{5}\pi^4+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx$. **2963.** $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$; $\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}$.

2964. $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2}$ $(0\le x\le 3)$. **2965.** $\frac{1}{2^m}\binom{2m}{m}+\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{m-k}\cos 2kx$.

2966. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ $(|q|<1)$. **2967.** $1+2\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$ $(|q|<1)$. **2968.** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$.

2969. $-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\cos nx$. **2970.** $-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$. **2971.** $-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}$. **2972.** $-2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$.

2973. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2974.** $x(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$;

$y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$. **2975.** $f(-x)=f(x)$; $f(\pi-x)=-f(x)$.

2976. $f(-x)=-f(x)$; $f(\pi-x)=f(x)$. **2977.** a) $-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\cos(2k+1)x\right\}\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^3}\right]\sin(2k+1)x\right\}\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$. **2978.** $a_{2n}=b_{2n}=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

2979. $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$. **2980.** a) $a_n=0$, $b_{2k-1}=0$; b) $a_n=0$, $b_{2k}=0$. **2981.** $\alpha_n=a_n$, $\beta_n=-b_n$.

2982. $\alpha_n=-a_n$, $\beta_n=b_n$. **2983.** $\bar{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh$, $\bar{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$. **2984.** $A_0=a_0$, $A_n=a_n\frac{\sin nh}{nh}$, $B_n=b_n\frac{\sin nh}{nh}$ $(n=1,2,\ldots)$. **2985.** $A_0=a_0^2$, $A_n=a_n^2+b_n^2$, $B_n=0$ $(n=1,2,\ldots)$. **2986.** $\frac{1}{2}$. **2987.** $\frac{1}{4}$.

2988. $2\ln 2-1$. **2989.** $\frac{1}{4}$. **2990.** $\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)$. **2991.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **2992.** $\frac{3}{4}$. **2993.** 1.

2994. $2(1-\ln 2)$. **2995.** $2e$. **2996.** $3e^2$. **2997.** $\frac{\pi^2}{3}-3$. **2998.** $\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}$. **2999.** $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$.

3000. $\frac{1}{6}(4\ln 2-1)$. **3001.** $e^x(\alpha_m x^m+\alpha_{m-1}x^{m-1}+\ldots+\alpha_0)$, kde koeficienty α_k $(k=0,1,\ldots,m)$ splňují rovnici $P(n)=\alpha_m n(n-1)\ldots(n-m+1)+\alpha_{m-1}n(n-1)\ldots(n-m+2)+\ldots+\alpha_1 n+\alpha_0$. **3002.** $e^{x/2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)$.

3003. $\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}-\frac{1}{x}$. **3004.** $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x$. **3005.** $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\sinh\sqrt{x}-\cosh\sqrt{x}\right)$ pro $x\ge 0$;

$\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)$ pro $x<0$. **3006.** $\ln\frac{1}{1-x}$. **3007.** $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$ $(|x|\le 1)$.

3008. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$. **3009.** $(1-x)^{-a/d}-1$ $(|x|<1)$. **3010.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1/3}-1$. **3011.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$

$(|x|<1)$. **3012.** $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$. **3013.** $(1+2x^2)e^{x^2}$. **3014.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln 2$. **3015.** $\frac{\pi}{4}$. **3016.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3017. $\frac{\pi}{2}$. **3018.** $\frac{\pi-x}{2}$ $(0<x<2\pi)$. **3019.** $-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ $(0<x<2\pi)$. **3020.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\right|$. **3021.** $\frac{\pi}{4}$ pro

$0<x<2\alpha$; 0 pro $\alpha<x<2\pi-2\alpha$; $-\frac{\pi}{4}$ pro $2\pi-2\alpha<x<2\pi$. **3022.** $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x$ $(|x|<\pi)$.

3023. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x$ $(|x|<\pi)$. **3024.** $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x|$ $(|x|\le\pi)$. **3025.** $\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$

$(|x|<\pi)$. **3026.** $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ $(|x|<+\infty)$. **3027.** $x=i\pi$, $y=j\pi$ $(i,j=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **3028.** $2(\arcsin x)^2$

$(|x|\le 1)$. **3029.** $\frac{4}{4-x}+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$ pro $x\ge 0$; $\frac{4}{4-x}-\frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}$ pro $x<0$.

3030. $\frac{1}{x-1}$. **3031.** $\frac{a_1}{x}$. **3032.** a) $\frac{x}{1-x}$; b) $\frac{1}{1-x}$. **3033.** a) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$; b) $\frac{x}{(x-1)^2}$. **3034.** 1.

3035. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}$. **3036.** $\frac{\pi^2}{12}$. **3037.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(p+nq)}$. **3038.** $2-\frac{\pi^2}{6}$. **3039.** $\frac{1}{24}$.

3040. $\frac{\pi^2}{12}$. **3041.** $F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\}$. **3042.** $E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$.

3043. $2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\ldots\right]$, kde ε je excentricita elipsy. **3047.** $\frac{2\pi a^n}{n!}$. **3048.** $\ln(1+\alpha)$ pro $|\alpha|<1$ a $\frac{1}{\alpha^2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$ pro $|\alpha|>1$. **3049.** 0 pro $|\alpha|\le1$ a $\pi\ln\alpha^2$ pro $|\alpha|>1$. **3050.** $2\cdot10^{-6}$. **3061.** $\frac{1}{4}$.

3062. 2. **3063.** $\frac{3}{7}$. **3064.** $a^{-\ln 2}$. **3065.** a) Ne; b) ano; c) ano; d) ano. **3066.** Diverguje k nule.

3067. Konverguje. **3068.** Konverguje pro $p>1$. **3069.** Diverguje k nule. **3070.** Konverguje pro libovolné p.

3071. Konverguje pro $a_1=a$. **3072.** Konverguje, je-li $\sum_{i=1}^{p}a_i=\sum_{i=1}^{p}b_i$. **3073.** Diverguje k nule.

3074. Konverguje. **3075.** Konverguje. **3076.** Konverguje. **3077.** Konverguje pro libovolné x.

3078. Konverguje pro libovolné x. **3079.** Konverguje pro $|x|<1$. **3080.** Konverguje pro $|x|<2$.

3081. Konverguje pro $|x|>e$. **3082.** Konverguje pro libovolné x. **3083.** Konverguje pro $|x|<1$ a libovolné p, q a pro $x=\pm1$, $p>1$, $q>\frac{1}{2}$. **3084.** Konverguje pro libovolná x a p. **3085.** Diverguje.

3088. Konverguje neabsolutně. **3089.** Diverguje. **3090.** Konverguje absolutně pro $p>1$; konverguje neabsolutně pro $\frac{1}{2}<p\le1$. **3091.** Diverguje. **3092.** Diverguje. **3093.** Diverguje. **3094.** Konverguje neabsolutně. **3095.** Konverguje neabsolutně. **3096.** Diverguje. **3097.** Konverguje absolutně pro $\alpha>1$; konverguje neabsolutně pro $\frac{1}{2}<\alpha\le1$. **3109.** $F'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty$, $|f'_n(x)|<c_n$ $(n=1,2,\ldots)$, kde $\sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$. **3111.** $157{,}970+\theta\cdot0{,}0004$ $(0<\theta<1)$. **3112.** $10^{2866}\cdot7{,}7\cdot\left(1+\frac{\theta}{12000}\right)$ $(|\theta|<1)$.

3113. $0{,}0798\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta|<1)$. **3114.** $10^{28}\cdot1{,}378\left(1+\frac{\theta}{288}\right)$ $(|\theta|\le1)$. **3115.** $10^{42}\cdot4{,}792\cdot\left(1+\frac{\theta}{120}\right)$ $(|\theta|\le1)$. **3116.** $0{,}124\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta|<1)$. **3117.** $0{,}355\left(1+\frac{\theta}{600}\right)$ $(|\theta|<1)$.

3118. $(2n-1)!!=\sqrt{2}(2n)^n e^{-n+\theta_n/(12n)}$ $(|\theta_n|<1)$. **3119.** $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}e^{\theta_n/(6n)}$ $(|\theta_n|<1)$. **3120.** a) 1; b) e; c) $\frac{e}{2}$; d) 1.

3121. $P_3(x)=1-\frac{55}{21}x-\frac{1}{14}x^2+\frac{5}{42}x^3$; $P_3(-1)\approx3{,}43$; $P_3(1)=-1{,}57$; $P_3(6)\approx8{,}43$.

3122. $y=y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}(x-x_0)^2$. **3123.** $y=0{,}808+0{,}193x-0{,}00101x^2$.

3124. $\sin x^\circ\approx\frac{5x}{288}\left[1-\left(\frac{x}{150}\right)^2\right]$; $\sin20^\circ\approx0{,}341$; $\sin40^\circ\approx0{,}645$; $\sin80^\circ\approx0{,}994$. **3125.** $P(x)=\frac{1}{3}(7x^2-4x^4)$.

3126. $7\frac{1}{3}$. **3127.** $B_n(x)=x$; $B_n(x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$; $B_n(x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3+\frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n^2}x$.

3128. $B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}l\right)\binom{n}{i}\frac{(x-a)^i(b-x)^{n-i}}{l^n}$, kde $l=b-a$. **3129.** $B_n(x)=\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4$.

3130. $B_{2n}(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\sum_{i=1}^{n}i\binom{2n}{n-i}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i\right]$. **3131.** $B_n(x)=e^{ka}\left[1+\left(e^{kl/n}-1\right)\frac{x-a}{l}\right]^n$, kde $l=b-a$.

3132. $B_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right]$, kde $i^2=-1$.

3135. $\sigma_{2n-1}(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

ČÁST DRUHÁ

KAPITOLA VI

3136. Polorovina $y \geq 0$. **3137.** $|x| \leq 1$; $|y| \geq 1$. **3138.** Kruh $x^2+y^2 \leq 1$. **3139.** Vnějšek kruhu $x^2+y^2>1$. **3140.** Mezikruží $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$. **3141.** Obrazec ve tvaru měsíčku $x \leq x^2+y^2<2x$. **3142.** $-1 \leq x^2+y \leq 1$. **3143.** Polorovina $x+y<0$. **3144.** Dvojice úhlů $|y| \leq |x|$ $(x \neq 0)$. **3145.** Dvojice tupých úhlů, které jsou vymezeny přímkami $y=0$ a $y=-2x$, včetně hranice, kromě vrcholu $(0,0)$. **3146.** Křivočarý trojúhelník vymezený parabolami $y^2=x$, $y^2=-x$ a přímkou $y=2$, kromě vrcholu $(0,0)$. **3147.** Množina soustředných mezikruží $2\pi k \leq x^2+y^2 \leq \pi(2k+1)$ $(k=0,1,2,\ldots)$. **3148.** Vnějšek kužele $x^2+y^2-z^2=0$ včetně jeho hranice s vyloučením vrcholu. **3149.** Sjednocení čtyř oktantů prostoru. **3150.** Vnitřek dvoudílného hyperboloidu $x^2+y^2-z^2=-1$. **3151.** Rovnoběžné přímky. **3152.** Soustředné kružnice. **3153.** Množina hyperbol se společnými asymptotami $y=\pm x$. **3154.** Rovnoběžné přímky. **3155.** Svazek přímek s vrcholem v počátku soustavy souřadnic s vyloučením tohoto vrcholu. **3156.** Množina podobných elips. **3157.** Množina rovnoosých hyperbol, jež se asymptoticky přibližují souřadnicovým osám a jsou umístěny v I. a III. kvadrantu. **3158.** Množina dvojdílných lomených čar s vrcholy na ose y. **3159.** I. a III. kvadrant pro $z=0$; množina dvojdílných lomených čar, jejichž úseky jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a jejichž vrcholy jsou umístěny na přímce $x+y=0$ pro $z>0$. **3159.1** Ramena úhlů, která jsou rovnoběžná s kladnými směry os x a y, s vrcholy na přímce $y=x$. **3159.2** Obvody čtverců se společným středem $(0,0)$, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami x a y, pro $z>0$; bod $(0,0)$ pro $z=0$. **3159.3** Přímky rovnoběžné s osou x pro $z<0$; dvojice polopřímek, z nichž jedna je rovnoběžná s osou x a druhá s kladnou poloosou y, s počátky na parabole $y=x^2$ pro $z>0$; kladná poloosa y pro $z=0$. **3160.** Množina kružnic, které procházejí počátkem soustavy souřadnic (kromě tohoto počátku!), se středy na ose x pro $z>0$, $z \neq 1$; osa y bez bodu $(0,0)$ pro $z=1$. **3161.** Křivky $y=\frac{C}{\ln x}$. **3162.** Křivky $y=\frac{C+x}{\ln x}$. **3163.** Množina kružnic se středy na ose x, kolmých na kružnici $x^2+y^2=a^2$ pro $z \neq 0$; osa y pro $z=0$. **3164.** Množina kružnic se středy na ose y procházejících body $(-a,0)$ a $(a,0)$, kromě těchto bodů pro $z \neq 0$; osa x bez bodů $(-a,0)$ a $(a,0)$ pro $z=0$. **3165.** Přímky $x=m\pi$ a $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ pro $z=0$; množina čtverců $m\pi<x<(m+1)\pi$, $n\pi<y<(n+1)\pi$ pro $(-1)^{m+n}=z$. **3166.** Množina rovnoběžných rovin. **3167.** Množina soustředných sfér se středem v počátku. **3168.** Množina dvojdílných hyperboloidů pro $u<0$; množina jednodílných hyperboloidů pro $u>0$; dvojitý kužel pro $u=0$. **3169.** Množina eliptických válců se společnou osou $x+y=0$, $z=0$. **3170.** Množina soustředných sfér $x^2+y^2+z^2=\pi n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ pro $u=0$; množina kulových vrstev $\pi n<x^2+y^2+z^2<\pi(n+1)$, kde $(-1)^n=u$. **3171.** Válcová plocha s řídící křivkou $z=f(y)$, $x=0$, tvořená přímkami rovnoběžnými s přímkou $y=ax$, $z=0$. **3172.** Plocha vytvořená rotací křivky $z=f(x)$, $y=0$ kolem osy z. **3173.** Kuželová plocha s vrcholem v počátku s řídící křivkou $x=1$, $z=f(y)$. **3174.** Konoid s řídící křivkou $x=1$, $z=f(y)$ tvořený přímkami rovnoběžnými s rovinou xy. **3176.** $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$.

3177. $\sqrt{1+x^2}$. **3178.** $f(t)=2t+t^2$; $z=x-1+\sqrt{y}$ $(x>0)$. **3179.** $f(x)=x^2-x$; $z=2y+(x-y)^2$. **3180.** $f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}$. **3183.1** Neexistuje. **3183.2** 0; není. **3184.** a) 0, 1; b) $\frac{1}{2}$, 1; c) 0, 1; d) 0, 1; e) 1, ∞. **3185.** 0. **3186.** 0. **3187.** a. **3188.** 0. **3189.** 0. **3190.** 1. **3191.** e. **3192.** $\ln 2$. **3193.** a) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$ a $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$. **3194.** Bod nespojitosti je $x=0$, $y=0$. **3195.** Všechny body přímky $x+y=0$. **3196.** $(0,0)$ je bod nekonečné nespojitosti a body přímky $x+y=0$ $(x \neq 0)$ jsou body odstranitelné nespojitosti. **3197.** Všechny body na osách souřadnic. **3198.** Množina bodů přímek $x=m\pi$ a $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. **3199.** Body kružnice $x^2+y^2=1$. **3200.** Body souřadnicových rovin $x=0$, $y=0$ a $z=0$. **3201.** (a,b,c). **3203.1** Stejnoměrně spojitá. **3203.2** Stejnoměrně spojitá. **3203.3** Nestejnoměrně spojitá. **3203.4** Funkce je spojitá na E, ale není zde stejnoměrně spojitá. **3212.** $f'_x(x,1)=1$. **3212.1** $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$; funkce

není diferencovatelná v bodě (0,0). **3212.2** Funkce není diferencovatelná v bodě (0,0). **3212.3** Funkce je diferencovatelná v bodě (0,0). **3213.** $\frac{\delta u}{\delta x}=4x^3-8xy^2$, $\frac{\delta u}{\delta y}=4y^3-8x^2y$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=12x^2-8y^2$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=-16xy$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=12y^2-8x^2$. **3214.** $\frac{\delta u}{\delta x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=x-\frac{x}{y^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=0$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=1-\frac{1}{y^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{2x}{y^3}$. **3215.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=0$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=-\frac{2}{y^3}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{6x}{y^4}$. **3216.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **3217.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\delta u}{\delta y}=x\cos(x+y)$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-x\sin(x+y)$. **3218.** $\frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=-\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}$. **3219.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=-\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}-\frac{4x^3}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$. **3220.** $\frac{\delta u}{\delta x}=yx^{y-1}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=x^y\ln x$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=x^{y-1}(1+y\ln x)$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=x^y\ln^2 x$ $(x>0)$. **3221.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{2y}{x+y^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$. **3222.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **3223.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{1}{1+y^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=0$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ $(xy\neq 1)$. **3224.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$ $(y\neq 0)$. **3225.** $\frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **3226.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\delta u}{\delta z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta z}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta z}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$ $\left(\frac{x}{y}>0\right)$. **3227.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{yu}{xz}$, $\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{u\ln x}{z}$, $\frac{\delta u}{\delta z}=-\frac{yu}{z^2}\ln x$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{u\ln^2 x}{z^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}=\frac{yu\ln x}{z^4}(2z+y\ln x)$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\frac{(z+y\ln x)u}{xz^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta z}=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta z}=-\frac{u\ln x(z+y\ln x)}{z^3}$ $(xz\neq 0)$. **3228.** $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{y^z}{x}u$, $\frac{\delta u}{\delta y}=zy^{z-1}u\ln x$, $\frac{\delta u}{\delta z}=y^z u\ln x\ln y$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{y^z(y^z-1)}{x^2}u$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=zy^{z-2}u(z-1+zy^z\ln x)\ln x$, $\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}=y^z u(1+y^z\ln x)\ln x\ln^2 y$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\frac{zy^{z-1}u}{x}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta z}=\frac{y^z u\ln y}{x}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta z}=y^{z-1}u\ln x\left[1+z\ln y(1+y^z\ln x)\right]$ $(x>0, y>0)$. **3230.1** $f''_{xy}(0,0)$ neexistuje. **3235.** $du=x^{m-1}y^{n-1}(mydx+nxdy)$, $d^2u=x^{m-2}y^{n-2}\left[m(m-1)y^2dx^2+2mnxydxdy+n(n-1)x^2dy^2\right]$. **3236.** $du=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, $d^2u=-\frac{2}{y^3}dy(ydx-xdy)$. **3237.** $du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $d^2u=\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **3238.** $du=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, $d^2u=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}$. **3239.** $du=e^{xy}(ydx+xdy)$;

$d^2u = e^{xy}\left[y^2dx^2 + 2(1+xy)\,dxdy + x^2dy^2\right]$. **3240.** $du = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$; $d^2u = 2(dxdy + dydz + dzdx)$.

3241. $du = \dfrac{(x^2+y^2)dz - 2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}$, $d^2u = \dfrac{2z\left[(3x^2-y^2)dx^2 + 8xydxdy + (3y^2-x^2)dy^2\right] - 4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz}{(x^2+y^2)^3}$.

3242. $dx-dy$, $-2(dx-dy)(dy+dz)$. **3244.** a) $1+mx+ny$; b) xy; c) $x+y$. **3245.** a) 108,972; b) 1,055; c) 2,95; d) 0,502; e) 0,97. **3246.** Úhlopříčka se zmenší přibližně o 3 mm; plocha se zmenší přibližně o 140 cm^2. **3247.** O 1,7 mm. **3249.** $\Delta \approx 10{,}2\ m^3$; $\delta \approx 13\ \%$. **3250.** $\Delta \approx 7{,}6$ m. **3251.** $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ jsou neomezené v okolí bodu $(0,0)$. **3256.** $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -16$. **3257.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0$.

3258. $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6(\cos x + \cos y)$. **3259.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$. **3260.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}\left(1 + 3xyz + x^2y^2z^2\right)$.

3261. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} = -\dfrac{6}{r^4} + \dfrac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, kde $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. **3262.** $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial x^q} = p!q!$.

3263. $\dfrac{2(-1)^m (m+n-1)!(nx+my)}{(x+y)^{m+n+1}}$. **3264.** $e^{x+y}\left[x^2 + y^2 + 2(mx+ny) + m(m-1) + n(n-1)\right]$.

3265. $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$. **3266.** $\sin\dfrac{n\pi}{2}$. **3267.** $F(t) = f'(t) + 3tf''(t) + t^2 f'''(t)$.

3268. $d^4u = 24\left(dx^4 - 2dx^3dy - 2dxdy^3 + dy^4\right)$; $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = -12$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} = -12$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24$.

3269. $d^3u = 6\left(dx^3 - 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3\right)$.

3270. $d^3u = -8(xdx+ydy)^3\cos\left(x^2+y^2\right) - 12(xdx+ydy)\left(dx^2+dy^2\right)\sin\left(x^2+y^2\right)$. **3271.** $d^{10}u = -\dfrac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$.

3272. $d^6u = -\left(dx^6 - 15dx^4dy^2 + 15dx^2dy^4 - dy^6\right)\cos x\cosh y - 2dxdy\left(3dx^4 - 10dx^2dy^2 + 3dy^4\right)\sin x\sinh y$.

3273. $d^3u = 6dxdydz$. **3274.** $d^4u = 2\left(\dfrac{dx^4}{x^3} + \dfrac{dy^4}{y^3} + \dfrac{dz^4}{z^3}\right)$. **3275.** $d^nu = e^{ax+by}(adx+bdy)^n$.

3276. $d^nu = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) dx^{n-k} dy^k$. **3277.** $d^nu = f^{(n)}(x+y+z)(dx+dy+dz)^n$.

3278. $d^nu = e^{ax+by+cz}(adx+bdy+cdz)^n$. **3280.** a) $Au = -u$, $A^2u = u$; b) $Au = 1$, $A^2u = 0$. **3281.** a) $\Delta u = 0$; b) $\Delta u = 0$. **3282.** a) $\Delta_1 u = 9\left[(x^2-yz)^2 + (y^2-xz)^2 + (z^2-xy)^2\right]$, $\Delta_2 u = 6(x+y+z)$; b) $\Delta_1 u = \dfrac{1}{r^4}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta_2 u = 0$. **3283.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xf'\left(x^2+y^2+z^2\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'\left(x^2+y^2+z^2\right) + 4x^2 f''\left(x^2+y^2+z^2\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xyf''\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

3284. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'_1\left(x, \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{1}{y} f'_2\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} f'_2\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11}\left(x, \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{2}{y} f''_{12}\left(x, \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{1}{y^2} f''_{22}\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\dfrac{x}{y^2} f''_{12}\left(x, \dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x}{y^3} f''_{22}\left(x, \dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{1}{y^2} f'_2\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{y^4} f''_{22}\left(x, \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{2x}{y^3} f'_2\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$.

3285. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xf'_2 + xzf'_3$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = xyf'_3$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + y^2 f''_{22} + y^2 z^2 f''_{33} + 2yf''_{12} + 2yzf''_{13} + 2y^2 zf''_{23}$;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 f''_{22} + 2x^2 zf''_{23} + x^2 z^2 f''_{33}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f''_{33}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xyf''_{22} + xyz^2 f''_{33} + xf''_{12} + xzf''_{13} + 2xyzf''_{23} + f'_2 + zf'_3$;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xyf''_{13} + xy^2 f''_{23} + xy^2 zf''_{33} + yf'_3$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 yf''_{23} + x^2 yzf''_{33} + xf'_3$.

3286. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$. **3287.** $\Delta u = 3f''_{11} + 4(x+y+z)f''_{12} + 4\left(x^2+y^2+z^2\right)f''_{22} + 6f_2$.

3288. $du = f'(t)(dx+dy)$; $d^2u = f''(t)(dx+dy)^2$. **3289.** $du = f'(t)\dfrac{xdy - ydx}{x^2}$;

$d^2u = f''(t)\frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{x^4} - 2f'(t)\frac{dx(x\,dy - y\,dx)}{x^3}$. **3290.** $du = f'\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d^2u = f''\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{x^2+y^2} + f'\frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

3291. $du = f'(t)\,dt$, $d^2u = f''(t)dt^2 + f'(t)d^2t$, kde $dt = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$ a $d^2t = 2(z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz)$.

3292. $du = 2f'(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$; $d^2u = 4f''(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 + 2f'\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$.

3293. $du = af_1'\,dx + bf_2'\,dy$; $d^2u = a^2f_{11}''dx^2 + 2abf_{12}''dx\,dy + b^2f_{22}''dy^2$. **3294.** $du = f_1'(dx + dy) + f_2''(dx - dy)$;

$d^2u = f_{11}''(dx+dy)^2 + 2f_{12}''\left(dx^2 - dy^2\right) + f_{22}''(dx-dy)^2$. **3295.** $du = f_1'(y\,dx + x\,dy) + f_2'\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$;

$d^2u = f_{11}''(y\,dx + x\,dy)^2 + 2f_{12}''\frac{y^2dx^2 - x^2dy^2}{y^2} + f_{22}''\frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{y^4} + 2f_1'\,dx\,dy - 2f_2'\frac{(y\,dx - x\,dy)dy}{y^3}$.

3296. $du = f_1(dx+dy) + f_2'dz$; $d^2u = f_{11}''(dx+dy)^2 + 2f_{12}''(dx+dy)dz + f_{22}''dz^2$.

3297. $du = f_1'(dx+dy+dz) + 2f_2'(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$; $d^2u = f_{11}''(dx+dy+dz)^2 + 4f_{12}''(dx+dy+dz)(x\,dx+y\,dy+z\,dz) +$

$+ 4f_{22}''(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2 + 2f_2'\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$. **3298.** $du = f_1'\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + f_2'\frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$;

$d^2u = f_{11}''\frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{y^4} + 2f_{12}''\frac{(y\,dx - x\,dy)(z\,dy - y\,dz)}{y^2z^2} + f_{22}''\frac{(z\,dy - y\,dz)^2}{z^4} - 2f_1'\frac{(y\,dx - x\,dy)dy}{y^3} - 2f_2'\frac{(z\,dy - y\,dz)dz}{z^3}$.

3299. $du = \left(f_1' + 2tf_2' + 3t^2f_3'\right)dt$; $d^2u = \left(f_{11}'' + 4tf_{12}'' + 4t^2f_{22}'' + 6t^2f_{13}'' + 12t^3f_{23}'' + 9t^4f_{33}'' + 2f_2' + 6tf_3'\right)dt^2$.

3300. $du = af_1'dx + bf_2'dy + cf_3'dz$; $d^2u = a^2f_{11}''dx^2 + b^2f_{22}''dy^2 + c^2f_{33}''dz^2 + 2abf_{12}''dx\,dy + 2acf_{13}''dx\,dz + 2bcf_{23}''dy\,dz$.

3301. $du = 2f_1'(x\,dx + y\,dy) + 2f_2'(x\,dx - y\,dy) + 2f_3'(y\,dx + x\,dy)$; $d^2u = 4f_{11}''(x\,dx+y\,dy)^2 + 4f_{22}''(x\,dx - y\,dy)^2 +$

$+ 4f_{33}''(y\,dx+x\,dy)^2 + 8f_{12}''\left(x^2dx^2 - y^2dy^2\right) + 8f_{13}''(x\,dx+y\,dy)(y\,dx+x\,dy) + 8f_{23}''(x\,dx - y\,dy)(y\,dx+x\,dy) +$

$+ 2f_1'\left(dx^2+dy^2\right) + 2f_2'\left(dx^2 - dy^2\right) + 4f_3'dx\,dy$. **3302.** $d^nu = f^{(n)}(ax+by+cz)(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^n$.

3303. $d^nu = \left(a\,dx\frac{\partial}{\partial\xi} + b\,dy\frac{\partial}{\partial\eta} + c\,dz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$, kde $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.

3304. $d^nu = \left[dx\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi} + a_2\frac{\partial}{\partial\eta} + a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dy\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial}{\partial\eta} + b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi} + c_2\frac{\partial}{\partial\eta} + c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\eta,\zeta)$.

3305. $F(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$. **3316.** 1. **3319.** xyz. **3331.** $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$. **3332.** $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

3333. $y\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3334.** $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3335.** $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3336.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$.

3337. $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$. **3338.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. **3339.** $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$. **3340.** $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3341. $1 - \sqrt{3}$. **3342.** $\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$, a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ a $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. **3343.** $\frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$.

3344. $\frac{1}{ab}\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$. **3345.** $\frac{\partial u}{\partial l} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$; $|\mathrm{grad}\,u| = \sqrt{3}$. **3346.** $|\mathrm{grad}\,u| = \frac{1}{r_0^2}$; $\cos\sphericalangle(\mathrm{grad}\,u, x) = -\frac{x_0}{r_0}$,

$\cos\sphericalangle(\mathrm{grad}\,u, y) = -\frac{y_0}{r_0}$, $\cos\sphericalangle(\mathrm{grad}\,u, z) = -\frac{z_0}{r_0}$, kde $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. **3347.** $\frac{\pi}{2}$. **3348.** ≈ 3142.

3350. $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma$.

3352. $\frac{\partial u}{\partial y} = -0{,}5$. **3353.** $u_{xx}''(x,2x) = u_{yy}''(x,2x) = -4/3x$, $u_{xy}''(x,2x) = 5/3x$. **3354.** $z = x\varphi(y) + \psi(y)$.

3355. $z = \varphi(x) + \psi(y)$. **3356.** $z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \ldots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$. **3357.** $u = \varphi(x,y) + \psi(x,z) + \chi(y,z)$.

3358. $u = 1 + x^2y + y^2 - 2x^4$. **3359.** $z = 1 + xy + y^2$. **3360.** $z = x + y^2 + 0{,}5xy(x+y)$. **3362.** Nulové body funkce $f(x)$ nemohou zcela vyplnit žádný interval $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$. **3363.** Množina nulových bodů funkce $f(x)$ nesmí

být hustá na žádném intervalu (a,b), přičemž každý nulový bod ξ funkce $f(x)$ je zároveň i nulovým bodem funkce $g(x)$ a kromě toho existuje konečná limita $\lim_{x\to\xi}[g(x)/f(x)]$ **3364.** 1) Nespočetně mnoho; 2) dvě; 3) a) jedna; b) dvě. **3365.** 1) Nespočetně mnoho; 2) čtyři: $y=x$, $y=-x$, $y=|x|$ a $y=-|x|$; 3) dvě; 4) a) dvě; b) čtyři; 5) jedna. **3366.** 1) Na žádných; 2) $0<|x|<1$, $|x|=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; 3) $x=0$, $|x|=1$; 4) $1<|x|<\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; jednoznačné větve jsou $y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}\left(|x|\le\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$; $y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}\left(1\le|x|\le\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$, kde $\varepsilon=-1,1$. **3367.** Body větvení: $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$; $y=\varepsilon(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-(2x^2+1)}{2}}$ $(|x|\le 1)$, kde $\varepsilon(x)=-1$, 1, $\operatorname{sgn}x$ a $-\operatorname{sgn}x$. **3368.** Obor hodnot funkce $\varphi(y)$ musí mít neprázdný průnik s oborem hodnot funkce $f(x)$. **3371.** $y'=-\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2a^2}{(x-y)^3}$. **3372.** $y'=\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **3373.** $y'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$; $y''=\frac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$. **3374.** $y'=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$; $y''=y^2\frac{y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2}{x^4(1-\ln y)^3}$. **3375.** $y'=\frac{y}{x}$; $y''=0$. **3378.** $y_1'(0)=-1$; $y_2'(0)=1$. **3379.** $y_1'(0)=0$; $y_2'(0)=-\sqrt{33}$; $y_3'(0)=\sqrt{3}$. **3380.** $y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$; $y''=-\frac{18}{(x+2y)^3}$; $y'''=-\frac{162x}{(x+2y)^5}$. **3381.** $y'=0$; $y''=-\frac{2}{3}$; $y'''=-\frac{2}{3}$. **3383.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$. **3384.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$. **3385.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. **3386.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$. **3387.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=-1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **3388.** a) -2; b) -1. **3389.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{394}{125}$. **3390.** ~~$dz$~~ $-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)$; $d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dx\,dy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$. **3391.** $dz=-\frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{1-xy}$; $d^2z=-\frac{2\{y(1-yz)dx^2+[x+y-z(1+xy)]dx\,dy+x(1-xz)dy^2\}}{(1-xy)^2}$. **3392.** $dz=\frac{z(y\,dx+z\,dy)}{y(x+z)}$; $d^2z=-\frac{z^2(y\,dx-x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}$. **3393.** $dz=dx-\frac{(x-z)dy}{(x-z)^2+y(y+1)}$; $d^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}dy^2$. **3394.** $du=-\frac{u^2(dx+dy)-z^2dz}{u[2(x+y)-u]}$

3395. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4(x-z)(y-z)}{\left(F_1'+2zF_2'\right)^3}\left[F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}''\right]-\frac{2\left(F_1'+2xF_2'\right)\left(F_1'+2yF_2'\right)F_2'}{\left(F_1'+2zF_2'\right)^3}$. **3396.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$. **3397.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(1+\frac{F_1'+F_2'}{F_3'}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\frac{F_2'}{F_3'}\right)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-F_3'^{-3}\left[F_3'^2\left(F_{11}''+2F_{12}''+F_{22}''\right)-2\left(F_1'+F_2'\right)F_3'\left(F_{13}''+F_{23}''\right)+\left(F_1'+F_2'\right)^2F_{33}''\right]$.

3398. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left(xF_1' + yF_2'\right)^{-3}\left[y^2z^2\left(F_2'^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2F_{22}''\right) - 2z\left(xF_1' + yF_2'\right)F_1'^2\right]$.

3399. a) $d^2z = -\frac{F_2'^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2F_{22}''}{\left(F_1' + F_2'\right)^3}(dx - dy)^2$; b) $d^2z = \frac{F_2'^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2F_{22}''}{\left(xF_1' + yF_2'\right)^3}(ydx - xdy)^2$.

3399.1 $dz = \frac{1}{9}(2dx - dy)$; $d^2z = -\frac{2}{243}(2dx^2 - 5dxdy + 2dy^2)$. **3401.** $\frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}$; $\frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}$. **3402.** $\frac{dx}{dz} = 0$, $\frac{dy}{dz} = -1$, $\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{1}{4}$. **3403.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}$ $\left(x^2 + y^2 > 0\right)$.

3403.1 $du = -\frac{1}{3}dy$; $dv = -dx + \frac{1}{3}dy$. **3404.** $du = \frac{(\sin v + x\cos v)dx - (\sin u - x\cos v)dy}{x\cos v + y\cos u}$;

$dv = \frac{-(\sin v - y\cos u)dx}{x\cos v + y\cos u} + \frac{(\sin u + y\cos u)dy}{x\cos v + y\cos u}$; $d^2u = -d^2v = \frac{(2dx\cos v - xdv\sin v)dv}{x\cos v + y\cos u} - \frac{(2dy\cos u - ydu\sin u)du}{x\cos v + y\cos u}$.

3405. $du = \frac{1}{2}(dx + dy)$; $dv = \frac{\pi}{4}dy - \frac{1}{2}(dx - dy)$; $d^2u = dx^2$; $d^2v = \frac{1}{2}(dx - dy)^2$. **3406.** $\frac{dy}{dx} = 2\left(t + \frac{1}{t}\right)$;

$\frac{dz}{dx} = 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$; $\frac{d^2z}{dx^2} = 6\left(t + \frac{1}{t}\right)$. **3407.** $y \geq \frac{x^2}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u + v)$ $(u \neq v)$.

3407.1 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}$. **3407.2** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{26}{121}$. **3408.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}$. **3409.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin 2v}{u^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}$. **3410.** $dz = 0$; $d^2z = \frac{1}{2}(dx^2 - dy^2)$. **3411.** $\frac{dz}{dx} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y}$;

$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4x - 2y}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^3}$. **3412.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y + z} + \frac{(x + 1)(y - x)}{(z + 1)(y + z)^2}e^{x-z}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x + z}{(y + z)^2} + \frac{(y + 1)(y - x)}{(z + 1)(y + z)^2}e^{y-z}$.

3413. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$, kde $I = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$.

3414. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \right.$

$\left. + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \right.$

$\left. - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\}$,

kde $I = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$. **3415.** a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\frac{v}{u}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\frac{v}{u}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\sin\frac{v}{u} - \frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \cos\frac{v}{u} + \frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$;

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(e^u - \cos v)}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$.

3416. $\frac{du}{dx} = \frac{I}{I_1}$; $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{I_1^3}\left\{\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x} + I_2\frac{\partial}{\partial y} + I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x} + I_2\frac{\partial}{\partial y} + I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g + \right.$

$\left. + \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x} + I_2\frac{\partial}{\partial y} + I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right\}$, kde $I_1 = \frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}$, $I_2 = \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}$, $I_3 = \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}$ a $I = \frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$. **3417.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{I_2}{I_1}\frac{\partial g}{\partial y}$, kde $I_1 = \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ a $I_2 = \frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}$. **3418.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_1}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_2}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_3}{I}$, kde $I_1 = \frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$,

$I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$ a $I=\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$. **3419.** $dz=-\frac{I_1dx+I_2dy}{I_3}$, kde $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$.

3431. $x'''+xx'^5=0$. **3432.** $x^{(4)}=0$. **3433.** $\frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0$. **3434.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$.

3435. $\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0$. **3436.** $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$. **3437.** $\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0$.

3438. $u''+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0$. **3439.** $\frac{d^2u}{dt^2}+(u+3)\frac{du}{dt}+2u=0$. **3440.** $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. **3441.** $\frac{d^2u}{dt^2}=0$.

3442. $\frac{d^2u}{dt^2}+8u\left(\frac{du}{dt}\right)^3=0$. **3443.** $t^5\frac{d^3u}{dt^3}+(3t^4+1)\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=0$. **3444.** $u''-u'=\frac{A}{(a-b)^2}u$.

3446. $\Phi\left(1,u,u'+u^2\right)=0$. **3447.** $F\left(xu'+u^2-u,u,1\right)=0$. **3450.** $\frac{dr}{d\varphi}=r$. **3451.** $r'^2=\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$.

3452. $r\left(r^2+2r'^2-rr''\right)=r'^3$. **3453.** $\frac{r'}{r}$. **3454.** $K=\frac{\left|r^2+2r'^2-\dot{r}r''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}}$. **3455.** $\frac{dr}{dt}=kr^3$; $\frac{d\varphi}{dt}=-1$.

3456. $w=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$. **3457.** $Y'=x$; $Y''=\frac{1}{y''}$; $Y'''=-\frac{y'''}{y'^3}$ **3458.** $z=\varphi(x+y)$, kde φ je libovolná diferencovatelná funkce. **3459.** $z=\varphi\left(x^2+y^2\right)$. **3460.** $z=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz)$. **3461.** $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **3462.** $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\sinh v$.

3463. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$. **3464.** $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}$. **3465.** $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\frac{z^2+u}{z^2-u}$. **3466.** $(2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(u+2v-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z$.

3467. $\frac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial\xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial\eta}}$. **3468.** $\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}$. **3469.** $\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$. **3470.** $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}$. **3471.** $\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}$.

3472. $A=\frac{x^2-2xu+u^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$. **3473.** $\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}+3u+\left(e^\xi+e^\eta+e^\zeta\right)=0$. **3474.** $\frac{\partial w}{\partial v}=0$.

3475. $\frac{\partial w}{\partial u}=0$. **3476.** $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. **3477.** $u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}$. **3478.** $\frac{e^{2u}\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}\cos^2 v\right)}{\frac{\partial w}{\partial u}}$.

3479. $A=\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}$. **3480.** $\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\frac{\xi\eta}{\zeta}$. **3481.** $w=\frac{\partial u}{\partial\varphi}$. **3482.** $w=r\frac{\partial u}{\partial r}$. **3483.** $w=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$.

3484. $w=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$. **3485.** $w=r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}$. **3486.** $w=\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$. **3487.** $I=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$

3488. $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$, kde φ a ψ jsou libovolné funkce. **3489.** $3\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$.

3490. $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=0$. **3491.** $a\left(\frac{\partial^2z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+c\left(\frac{\partial^2z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **3492.** $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=0$.

3493. $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}+m^2e^{2u}z=0$. **3494.** $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=0$. **3495.** $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$. **3496.** $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}$.

3497. $\left(u^2-v^2\right)\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}$. **3498.** $\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}$. **3499.** $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$.

3500. $\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=1$. **3501.** $u=\varphi(x+\lambda_1y)+\psi(x+\lambda_2y)$, kde λ_1 a λ_2 jsou kořeny rovnice

$A+2B\lambda+C\lambda^2=0$. **3503.** a) $\Delta u=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$; b) $\Delta(\Delta u)=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}$.

3504. $u\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0$. **3505.** $A=X\frac{\partial^2u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}$.

3508. $\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\xi\zeta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\zeta}+\eta\zeta\frac{\partial^2u}{\partial\eta\partial\zeta}\right)$.

3509. $\frac{\partial^2z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y_3^2}=0$. **3510.** $\frac{\partial^2u}{\partial\zeta^2}=0$. **3511.** $\Delta_1u=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$;

$\Delta_2u=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right]$. **3512.** $w\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$.

3513. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=0$. **3514.** $\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$. **3515.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. **3516.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}=2w$. **3517.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$.

3518. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$. **3519.** $\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}$. **3520.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$. **3523.** $\frac{\partial^2w}{\partial u\partial v}=0$.

3524. $\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2w}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2w}{\partial\zeta^2}=\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{\partial w}{\partial\eta}+\frac{\partial w}{\partial\zeta}+(e^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2\right]$. **3526.** $x=y\varphi(z)+\psi(z)$.

3527. $A(X,Y)\frac{\partial^2Z}{\partial Y^2}-2B(X,Y)\frac{\partial^2Z}{\partial X\partial Y}+C(X,Y)\frac{\partial^2Z}{\partial X^2}=0$. **3528.** $\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0}$;

$z-z_0=(x-x_0)\cos\alpha\ \mathrm{tg}t_0+(y-y_0)\sin\alpha\ \mathrm{tg}t_0$, kde $x_0=a\cos\alpha\cos t_0$, $y_0=a\sin\alpha\cos t_0$, $z_0=a\sin t_0$. **3529.** $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $y=\frac{b}{2}$; $ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$. **3530.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; $x+y+2z=4$. **3531.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$; $3x+3y-z=3$.

3532. $x+z=2$; $y+2=0$; $x-z=0$. **3533.** $(-1,1,-1)$; $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{2}\right)$. **3537.** $\mathrm{tg}\varphi=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha$.

3538. $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{16}{243}$. **3539.** $2x+4y-z-5=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$. **3540.** $3x+4y+12z=169$; $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$.

3541. $z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$. **3542.** $ax_0x+by_0y+cz_0z=1$; $\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}$.

3543. $x+y-2z=0$; $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$. **3544.** $x+y-4z=0$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$.

3545. $\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1$; $\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\,\mathrm{cosec}\,\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\,\mathrm{cosec}\,\psi_0-c}{ab}$.

3546. $x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0-z\,\mathrm{tg}\alpha=0$; $\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0\,\mathrm{cotg}\alpha}{-\mathrm{tg}\alpha}$.

3547. $ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$; $\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}$. **3548.** $\frac{3x}{u_0}-\frac{3y}{u_0^2}+\frac{z}{u_0^3}=2$.

3549. $(0,\pm2\sqrt{2},\mp2\sqrt{2})$; $(\pm2,\mp4,\pm2)$; $(\pm4,\mp2,0)$. **3550.** $x=\pm\frac{a^2}{d}$, $y=\pm\frac{b^2}{d}$, $z=\pm\frac{c^2}{d}$, kde $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3551. $x+4y+6z=\pm21$. **3556.** $x^2+y^2-xy=1$, $z=0$; $3y^2+4z^2=4$, $x=0$; $3x^2+4z^2=4$, $y=0$.

3557. $\delta<0{,}003$. **3559.** $\cos\varphi=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$. **3563.** $\frac{\partial u}{\partial n}=x_0+y_0+z_0$; a) $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $x_0=y_0=z_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

c) na kružnici $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$. **3564.** $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$. **3566.** $x^2+y^2=p^2$. **3567.** $y=\pm x$.

3568. $y^2=4ax$. **3569.** Obalová křivka neexistuje. **3570.** $x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}$. **3571.** $|xy|=\frac{S}{2\pi}$.

3572. $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$. **3574.** a) $y=0$ je obalová křivka (geometrické místo inflexních bodů); b) $y=0$ je obalová křivka; c) $y=0$ je geometrické místo singulárních bodů (bodů návratu); d) $x=0$ je geometrické místo dvojných bodů, $x=a$ je obalová křivka. **3575.** Torus $\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2$.

3576. $x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta+z^2\sin^2\gamma-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma=1$. **3577.** $|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}$.

3578. $\left|z\pm\sqrt{x^2+y^2}\right|=\varrho\sqrt{2}$. **3579.** $\begin{vmatrix}x & y\\ x_0 & y_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y & z\\ y_0 & z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z & x\\ z_0 & x_0\end{vmatrix}^2\le R^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$. **3580.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(z-z_0)^2$.

3581. $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

3582. $f(x,y,z)=3\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)\right]+(x-1)^3+(y-1)^3+$
$+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1)$. **3583.** $\Delta f(1,-1)=h-3k+(-h^2-2hk+k^2)+(h^2k+hk^2)$.

3584. $f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+2\left[h(Ax+Dy+E)+k(Dx+By+F)+l(Ex+Fy+Cz)\right]+f(h,k,l)$.

3585. $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2(1+\theta(x-1),1+\theta(y-1))$ $(0<\theta<1)$, kde

$$R_2(x,y)=\frac{1}{6}x^y\left[\left(\frac{y}{x}dx+\ln x\,dy\right)^3+3\left(\frac{y}{x}dx+\ln x\,dy\right)\left(-\frac{y}{x^2}dx^2+\frac{2}{x}dxdy\right)+\left(\frac{2y}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dy\right)\right]\text{ a } dx=x-1,$$

$dy=y-1$. **3586.** $1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\right)^2$. **3587.** a) $1-\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$; b) $\frac{\pi}{4}+x-xy$. **3588.** $-(xy+xz+yz)$.

3589. $F(x,y)=\frac{h^2}{4}\left(f''_{xx}+f''_{yy}\right)+\frac{h^4}{48}\left(f^{(4)}_{xxxx}+f^{(4)}_{yyyy}\right)+\ldots$ **3590.** $F(\varrho)=f(x,y)+\frac{\varrho^2}{4}\left[\left(f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)\right)\right]$.

3591. $\Delta_{xy}f(x,y)=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]$. **3592.** $F(\varrho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}\Delta^n f(x,y)$,

kde $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. **3593.** $1+mx+ny+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+mnxy+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\ldots$ $(|x|<1,|y|<1)$.

3594. $\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^m y^n$ $(|x|+|y|<1)$. **3595.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty,|y|<+\infty)$.

3596. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$ $(|x|<+\infty,|y|<+\infty)$. **3597.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty,|y|<+\infty)$.

3598. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!(2n)!}$ $(|x|<+\infty,|y|<+\infty)$. **3599.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(x^2+y^2<+\infty\right)$.

3600. $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^m y^n}{mn}$ $(|x|<1,|y|<1)$. **3601.** $f(x,y)=1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)y$.

3602. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!n!}$ $(|x|<+\infty,|y|<+\infty)$. **3603.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1+(x-1)\right](y-1)^n$ $(-\infty<x<+\infty,\ 0<y<2)$.

3604. $z=1+\left[2(x-1)-(y-1)\right]-\left[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2\right]+\ldots$ **3605.** $(0,0)$ je izolovaný bod pro $a<0$, bod vratu pro $a=0$, uzel pro $a>0$. **3606.** $(0,0)$ je uzel. **3607.** $(0,0)$ je izolovaný bod. **3608.** $(0,0)$ je izolovaný bod. **3609.** $(0,0)$ je uzel. **3610.** $(0,0)$ je bod vratu (druhého druhu). **3611.** $(0,0)$ je uzel. **3612.** Je-li $a<b<c$, pak je křivka tvořena oválem a nekonečnou větví; je-li $a=b<c$, je $(a,0)$ izolovaný bod; je-li $a<b=c$, pak $(b,0)$ je uzel; je-li $a=b=c$ pak $(a,0)$ je bod vratu. **3613.** $(0,0)$ je uzel. **3614.** $(0,0)$ je bod vratu. **3615.** $(0,0)$ je koncový bod. **3616.** $(0,0)$ je hrot. **3617.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ jsou body nespojitosti prvního druhu. **3618.** $x=0$ je bodem nespojitosti druhého druhu. **3619.** $x=0$ je uzel. **3620.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ je bod vratu. **3621.** $z_{\min}=0$ pro $x=0$ a $y=1$. **3622.** Neexistují extremální body. **3623.** Neostré minimum $z=0$ v bodech přímky $x-y+1=0$. **3624.** $z_{\min}=-1$ pro $x=1$ a $y=0$.

3625. $z_{max}=108$ pro $x=2$, $y=3$; neostré minimum $z=0$ pro $x=0$, $0<y<6$; neostré maximum $z=0$ pro $x=0$, $-\infty<y<0$ a $6<y<+\infty$. **3626.** $z_{min}=-1$ pro $x=1$ a $y=1$. **3627.** $z_{min}=-2$ pro $x_1=-1$, $y_1=-1$ a $x_2=1$, $y_2=1$; extrém neexistuje pro $x=0$, $y=0$. **3627.1** Maximum $z=0$ pro $x=0$, $y=0$; minimum $z=-1\frac{1}{8}$ pro $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm1$; sedlový bod $z=-1$ pro $x=0$, $y=\pm1$, sedlový bod $z=-\frac{1}{8}$ pro $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=0$.

3628. Minimum $z=30$ pro $x=5$ a $y=2$. **3629.** $z_{min}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ pro $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $z_{max}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ pro $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3630.** $z_{max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ pro $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$, je-li $c>0$; $z_{min}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ pro $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$, je-li $c<0$; extrém neexistuje pro $c=0$, $a^2+b^2\neq0$. **3631.** $z_{max}=1$ pro $x=0$ a $y=0$. **3632.** Minimum $z=0$ pro $x=0$, $y=0$; sedlový bod $z=\frac{1}{2}e^{-2}$ pro $x=-\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$. **3633.** Sedlový bod $z=e^3$ pro $x=1$, $y=-2$.

3634. Maximum $z=e^{-13}\doteq2,2610^{-6}$ pro $x=1$, $y=3$; minimum $z=-26\ e^{4/52}\doteq-25,51$ pro $x=-\frac{1}{26}$, $y=-\frac{3}{26}$.

3635. Minimum $z=7-10\ln2\doteq0,0685$ pro $x=1$, $y=2$. **3636.** $z_{max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ pro $x=\frac{\pi}{3}$ a $y=\frac{\pi}{6}$.

3637. $z_{min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ pro $x=y=\frac{2\pi}{3}$; $z_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ pro $x=y=\frac{\pi}{3}$. **3638.** Sedlový bod $z=-1+\frac{1}{2}\ln2+\frac{3}{4}\pi\doteq1,70$ pro $x=1$, $y=1$. **3639.** Minimum $z=-\frac{1}{2e}\doteq-0,184$ pro $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\doteq\pm0,43$; maximum $z=\frac{1}{2e}$ pro $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$; extrém není ve stacionárních bodech $x=0$, $y=\pm1$ a $x=\pm1$, $y=0$. **3640.** Stacionární body

$x=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m+n)\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m-n)\frac{\pi}{2}$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Extrém $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2(-1)^n$ nejsou-li m a n současně sudá nebo lichá (maximum pro m liché a n sudé a minimum pro m sudé a n liché); extrém neexistuje, jsou-li m a n současně sudá nebo lichá.

3641. $z_{min}=0$ pro $x=0$ a $y=0$; neostré maximum $z=e^{-1}$ pro $x^2+y^2=1$. **3642.** $u_{min}=-14$ pro $x=-1$, $y=-2$, $z=3$. **3643.** Minimum $u=-6913$ pro $x=24$, $y=-144$, $z=-1$. **3644.** Minimum $u=4$ pro $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=1$.

3645. $u_{max}=\frac{a^7}{7^7}$ pro $x=y=z=\frac{a}{7}$; neostrý extrém $u=0$ pro $y=0$, $x\neq0$, $z\neq0$, $x+2y+3z\neq a$. **3646.** Minimum $u=\frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$ pro $x=\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b}$, $y=\frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^8b^7}{4}}$. **3647.** Maximum $u=4$ pro $x=y=z=\frac{\pi}{2}$; minimum $u=0$ v hraničním bodě definičního oboru pro $x=y=z=0$ a $x=y=z=\pi$.

3648. $u_{max}=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{(n^2+n+2)/2}$ pro $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}$. **3649.** Minimum $u=(n+1)2^{1/(n+1)}$ pro $x_1=2^{1/(n+1)}$, $x_2=x_1^2$, ..., $x_n=x_1^n$. **3650.** Čísla a, x_1, x_2, ..., x_n, b tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$. **3651.** Minimum $z_1=-2$ a maximum $z_2=6$ pro $x=1$, $y=-1$. **3652.** $z_{min}=-\left(4+2\sqrt{6}\right)$ pro $x=y=-\left(3+\sqrt{6}\right)$; $z_{max}=2\sqrt{6}-4$ pro $x=y=-\left(3-\sqrt{6}\right)$. **3653.** Neostré minimum $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$ pro $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z<0$; neostré maximum $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ pro $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z>0$. **3654.** $z_{max}=\frac{1}{4}$ pro $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

3655. $z_{min}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ pro $x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $z_{max}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ pro $x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, kde $\varepsilon=\operatorname{sgn}ab\neq0$. **3656.** $z_{max}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ pro $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$. **3657.** $z_{min}=\lambda_1$, $z_{max}=\lambda_2$, kde λ_1 a λ_2 jsou

kořeny rovnice $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0$ a $\lambda_1<\lambda_2$. **3657.1** Maximum $z=106\frac{1}{4}$ pro $x=\pm1\frac{1}{2}$, $y=\pm4$; minimum $z=-50$ pro $x=\pm2$, $y=\pm3$. **3658.** Extrém $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ pro $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ (maximum, je-li k sudé, a minimum, je-li k liché). **3659.** $u_{min}=-3$ pro $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$; $u_{max}=3$ pro $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$. **3660.** $u_{max}=\frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ pro $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$. **3661.** $u_{min}=c^2$ pro $x=0$, $y=0$, $z=\pm c$; $u_{max}=a^2$ pro $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$. **3662.** $u_{max}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$ pro $x=y=z=\frac{a}{6}$. **3663.** $u_{min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ pro $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ a $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ a $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ a $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$; $u_{max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$ pro $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ a $z=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ a $y=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ a $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$. **3663.1** Podmíněný extrém $u=2$ pro $x=1$, $y=1$, $z=1$. **3664.** $u_{max}=\frac{1}{8}$ pro $x=y=z=\frac{\pi}{6}$. **3665.** $u_{min}=\lambda_1$ a $u_{max}=\lambda_2$, kde λ_1 a λ_2 jsou kořeny rov nice $\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+$ $+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)=0$ $(\lambda_1<\lambda_2)$. **3666.** $u_{min}=\frac{R^2(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}$; $u_{max}=R^2$.

3667. $u_{min}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ pro $x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$. **3668.** $u_{min}=\frac{a^p}{n^{p-1}}$ pro $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

3669. $u_{min}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^2$ pro $x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

3670. $u_{max}=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}$ pro $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\ldots=\frac{x_n}{\alpha_n}=\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$.

3671. Extrémy $u=\lambda$ se určí z rov nice $\left|\alpha_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=0$, kde $\delta_{ij}=0$ pro $i\neq j$ a $\delta_{ii}=1$. **3675.** $\inf z=-5$, $\sup z=-2$. **3676.** $\inf z=-75$; $\sup z=125$. **3677.** $\inf z=0$; $\sup z=1$. **3678.** $\inf u=0$; $\sup u=300$. **3679.** $\inf u=-\frac{1}{2}$; $\sup u=1+\sqrt{2}$. **3680.** $\inf u=0$; $\sup u=e^{-1}=0{,}37$. **3682.** Není. **3683.** Minimum se rovná $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$.

3684. Sčítance se musí rovnat. **3685.** Činitelé jsou $x_i=\frac{\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\cdot\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\ldots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1/\alpha_i}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, kde α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ jsou odpovídající exponenty; nejmenší hodnota součtu je

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(a\alpha_1^{1/\alpha_1}\alpha_2^{1/\alpha_2}\ldots\alpha_n^{1/\alpha_n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}}.$$

3686. $x=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_ix_i$, $y=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_iy_i$, kde $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$.

3687. Rozměry nádoby jsou $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **3688.** $H=2R=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, kde R je poloměr válcové plochy a H je její tvořící přímka. **3689.** $x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $z=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$, kde $N=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}$.

Minimální součet čtverců vzdáleností je $n-2N+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right)$. **3690.** Úhel sklonu tvořících přímek kužele

vzhledem k jeho základně je $\arcsin\frac{2}{3}$. **3691.** Úhel sklonu bočních hran pyramid k jejich podstavám se rovná $\arcsin\frac{2}{3}$. **3692.** Strany obdélníka mají délky $\frac{2p}{3}$ a $\frac{p}{3}$. **3693.** Strany trojúhelníka mají délky $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ a $\frac{3p}{4}$. **3694.** Rozměry kvádru jsou $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ a $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **3695.** Výška kvádru je rovna $\frac{1}{3}$ výšky kužele.

3696. Rozměry kvádru jsou $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ a $\frac{2c}{\sqrt{3}}$. **3697.** Výška kvádru je $h=l\sin\alpha\,\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}$, je-li $\alpha\geq\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, a $h=0$, je-li $0<\alpha<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **3698.** Rozměry kvádru jsou a, b a $\frac{c}{2}$. **3699.** $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

3700. $d=\frac{1}{\pm\Delta}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$, kde $\Delta=\sqrt{\begin{vmatrix} m_1n_1 \\ m_2n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1p_1 \\ n_2p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1m_1 \\ p_2m_2 \end{vmatrix}^2}$. **3701.** $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **3702.** Čtverce velikostí poloos $a^2=\lambda_1$ a $b^2=\lambda_2$ jsou kořeny rovnice $(1-\lambda A)(1-\lambda C)-\lambda^2B^2=0$.

3703. Čtverce velikostí poloos $a^2=\lambda_1$, $b^2=\lambda_2$ a $c^2=\lambda_3$ jsou kořeny rovnice $\begin{vmatrix} A\lambda-1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda-1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda-1 \end{vmatrix}=0$.

3704. $\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. **3705.** $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}$. **3707.** Úhel dopadu je $\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; úhel odklonu vycházejícího paprsku se rovná $2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$. **3708.** Hledané koeficienty a a b se určí ze soustavy rovnic $a[xx]+b[x1]=[xy]$, $a[x1]+bn=[y1]$, kde $[xy]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ atd. Řešení je definováno pro $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2\neq0$. **3709.** $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2(\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y})}{\left[\overline{x^2}-(\overline{x})^2\right]-\left[\overline{y^2}-(\overline{y})^2\right]}$, $p=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha$, kde $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ atd. jsou střední hodnoty. **3710.** $4x-7/2$; $\Delta_{\min}=1/2$.

KAPITOLA VII

3711. $F(y)=1$ pro $-\infty<y<0$; $F(y)=1-2y$ pro $0\leq y\leq1$; $F(y)=-1$ pro $1<y<+\infty$. **3712.** $F(y)$ je nespojitá v bodě $y=0$. **3713.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) 1; c) $\frac{8}{3}$; d) $\ln\frac{2e}{1+e}$. **3713.1** 0. **3715.** Nelze. **3716.** Nelze.

3717. $F'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy$. **3718.** a) $-\left(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha\right)+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$;

b) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+a}\right)\sin\alpha(b+\alpha)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha)$; c) $\frac{2}{\alpha}\ln\left(1+\alpha^2\right)$; d) $f(\alpha,-\alpha)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)dx$, kde $u=x+\alpha$ a $v=x-\alpha$; e) $2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin\left(y^2+\alpha^4-\alpha^2\right)dy+2\int_0^{\alpha^2}\sin2x^2\cos2\alpha x\,dx-2\alpha\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos\left(x^2+y^2-\alpha^2\right)dy$.

3719. $F''(x)=3f(x)+2xf'(x)$. **3720.** $F''(x)=2f(x)$ pro $x\in(a,b)$, a $F''(x)=0$ pro $x\notin(a,b)$.

3721. $F''(x)=\frac{\Delta^2f(x)}{h^2}$, kde $\Delta^2f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$. **3722.** $F^{(n)}(x)=(n-1)!f(x)$. **3723.** $4x-\frac{11}{3}$.

3724. $0{,}934+0{,}428x$ (přibližně!). **3725.** $\frac{dE}{dk}=\frac{E-F}{k}$; $\frac{dF}{dk}=\frac{E}{k\left(1-k^2\right)}-\frac{F}{k}$.

3729. $F''_{xy}(x,y)=x(2-3y^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f''(xy)$. **3732.** $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$. **3733.** 0, je-li $|a|\le 1$; $\pi\ln a^2$, je-li $|a|>1$. **3734.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\,\ln(1+|a|)$. **3735.** $\pi\arcsin a$. **3736.** $\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **3737.** $\ln\frac{b+1}{a+1}$. **3738.** a) $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; b) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. **3741.** $a\ge 0$. **3742.** $\max(p,q)>1$. **3743.** $\left|\frac{p-1}{q}\right|<1$. **3744.** $p<1$. **3745.** $n<0$ a $n>\frac{1}{2}$. **3746.** $p>\frac{1}{2}$. **3747.** Konverguje pro $a>0$ a pro $a=-\frac{2n-1}{2}\pi$ $(n=1,2,\ldots)$. **3748.** Konverguje pro $n>4$. **3749.** Konverguje pro $p>1$. **3750.** Konverguje pro $-1<n<2$. **3755.1** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **3755.2** Konverguje nestejnoměrně. **3756.** Konverguje stejnoměrně. **3757.** Konverguje stejnoměrně. **3758.** Konverguje stejnoměrně. **3759.** Konverguje nestejnoměrně. **3760.** Konverguje stejnoměrně. **3760.1** Konverguje stejnoměrně. **3761.** Konverguje stejnoměrně. **3762.** Konverguje nestejnoměrně. **3763.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **3764.** Konverguje nestejnoměrně. **3765.** Konverguje stejnoměrně. **3765.1** $b\ge 10^{70}$. **3766.** a) Konverguje stejnoměrně; b) konverguje nestejnoměrně. **3767.** Konverguje stejnoměrně. **3768.** Konverguje nestejnoměrně. **3769.** Konverguje stejnoměrně. **3770.** Konverguje stejnoměrně. **3772.** Nelze. **3776.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3776.2** 1. **3778.** $a=\pm 1$. **3779.** Je spojitá. **3780.** Je spojitá. **3781.** Je spojitá. **3782.** Je spojitá. **3783.** Je nespojitá v bodě $\alpha=0$. **3784.** $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$. **3785.** $\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. **3788.** $\ln\frac{b}{a}$. **3790.** $\ln\frac{b}{a}$. **3791.** 0. **3792.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. **3793.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **3794.** $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$. **3795.** $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$ $(m\ne 0)$. **3796.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$. **3797.** $-\pi\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)$. **3798.** $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. **3799.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\left(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$. **3800.** $\frac{\pi}{|\beta|}\ln\left(|\alpha|+|\beta|\right)$ $(\beta\ne 0)$. **3801.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. **3802.** $\frac{2\pi}{3}\left[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)\right]$ $(\alpha>0,\beta>0)$. **3803.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3804.** $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. **3805.** $\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. **3806.** $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{b^2/4a}$. **3807.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. **3808.** $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$. **3809.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a}$. **3810.** $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}\,e^{-b^2/4a}$. **3811.** $(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\frac{d^{2n}}{db^{2n}}\left(e^{-b^2}\right)$. **3812.** $(\pi/2)\operatorname{sgn}\beta$. **3812.1** Funkce je lichá. Pro $x>0$ jsou minima v bodech $2k\pi$ a maxima v bodech $(2k-1)\pi$, kde $k=1,2,3,\ldots$ Asymptoty jsou $y=\frac{\pi}{2}$ pro $x\to+\infty$ a $y=-\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-\infty$. **3813.** $\pi\frac{|\beta|}{2}-\sqrt{\pi\alpha}$. **3814.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$. **3815.** 0 pro $|\alpha|<|\beta|$; $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$ pro $|\alpha|=|\beta|$; $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$ pro $|\alpha|>|\beta|$. **3816.** $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$. **3817.** $\frac{\pi}{2}|\alpha|$. **3818.** $\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$. **3819.** $\frac{\pi}{4}$. **3820.** $\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$. **3821.** $\frac{\pi}{4}$. **3822.** $\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$. **3823.** $D(x)=1$ pro $|x|<1$; $D(x)=\frac{1}{2}$ pro $x=\pm 1$; $D(x)=0$ pro $|x|>1$. **3824.** a) $\pi\operatorname{sgn}a\,\cos ab$; b) $\pi\operatorname{sgn}a\,\sin ab$. **3825.** $\frac{\pi}{2}e^{-|a|}$. **3826.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha e^{-|\alpha|}$. **3827.** $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2}\right)$. **3828.** $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$. **3829.** $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{b\alpha}{a}e^{-|\alpha|\sqrt{ac-b^2}/a}$. **3830.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **3831.** $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\right)$. **3832.** $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. **3833.** $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. **3835.** a) $\frac{n!}{p^{n+1}}$;

b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; c) $\frac{1}{p-\alpha}$ pro $p>\alpha$; d) $\frac{1}{(p+a)^2}$; e) $\frac{p}{p^2+1}$; f) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$; g) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\alpha^2/4p}$. **3837.** a) 1; b) $x^2+\frac{1}{2}$;

c) e^{2ax+a^2}; d) $\frac{1}{2}e^{-a^2/4}\cos ax$. **3839.** $\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$, kde $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. **3843.** $\frac{\pi}{8}$. **3844.** $\frac{\pi a^4}{16}$.

3845. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **3846.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **3847.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **3848.** $\frac{3\pi}{512}$. **3849.** $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$. **3850.** $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$.

3851. $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$ $(0<m<n)$. **3852.** $B(n-m,m)$ $(0<m<n)$. **3853.** $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{(m+1)/n}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right)$

$\left(0<\frac{m+1}{n}<p\right)$. **3854.** $\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}B(m+1,n+1)$ $(m>-1,n>-1)$. **3855.** $\frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\right)$ $(n<0$ nebo

$n>1)$. **3856.** $\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$ $(m>-1,n>-1)$. **3857.** $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$ $(|n|<1)$. **3858.** $\frac{2^{n-1}}{(1-k)^{2^{n/2}}}B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$

$(n>0)$. **3859.** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n>0)$. **3860.** $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$ $\left(\frac{m+1}{n}>0\right)$. **3861.** $\Gamma(p+1)$ $(p>-1)$.

3862. $\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$ $(p>-1)$. **3863.** $-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $(0<p<1)$. **3864.** $\pi^3\frac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi}$ $(0<p<1)$.

3864.1 $\frac{2}{27}\pi^2$. **3864.2** $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$. **3865.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{2}}\right|$ $(0<p<1,0<q<1)$; 0 $(p=q)$. **3866.** $\pi\operatorname{cotg}\pi p$.

3867. $\frac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2\beta}$. **3868.** $\ln\sqrt{2\pi}$. **3869.** $\ln\sqrt{2\pi}+a(\ln a-1)$. **3870.** $\frac{1}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$. **3871.** $\frac{1}{4n}$.

3876. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$. **3877.** $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$. **3879.** $aB\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)$. **3880.** $\frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$.

3881. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. **3882.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3883. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-a)-\sin\lambda(x-b)}{\lambda}d\lambda$. **3884.** $f(x)=\frac{2h}{\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$.

3885. $\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. **3886.** $\frac{x}{a^2+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$. **3887.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3888. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda\pi/2}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$. **3889.** $f(t)=\frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\pi n\lambda/\omega}{\lambda^2-\omega^2}\sin\lambda t\,d\lambda$.

3890. $f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda$. **3891.** $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}\right]\cos\lambda x\,d\lambda$.

3892. $f(x)=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{\left[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2\right]\left[(\lambda+\beta)^2+\alpha^2\right]}d\lambda$. **3893.** $e^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda^2/4}\cos\lambda x\,d\lambda$.

3894. $xe^{-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda^2/4}\sin\lambda x\,d\lambda$. **3895.** a) $e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$ $(0\le x<+\infty)$; b) $e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$ $(0<x<+\infty)$. **3896.** $F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$. **3897.** $F(x)=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha x}{(x^2+\alpha^2)^2}$. **3898.** $F(x)=e^{-x^2/2}$.

3899. $F(x)=e^{-(x^2+\alpha^2)/2}\cosh\alpha x$. **3900.** a) $\varphi(y)=e^{-y}$ $(y\ge 0)$; b) $\psi(y)=\frac{2}{\pi}\frac{y}{1+y^2}$ $(y\ge 0)$.

KAPITOLA VIII

3901. $\frac{1}{4}$. **3902.** $\underline{S}_n=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $\overline{S}_n=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$. **3903.** 9,88. Přesná hodnota je $2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13{,}20$. **3904.** 0,402. Přesná hodnota je 0,4. **3905.** $\delta<0{,}00022$. **3906.** 1. **3907.** $\frac{1}{40}$.

3908. $\frac{\pi a^3}{3}$. **3910.** $I=F(A,B)-F(A,b)-F(a,B)+F(a,b)$. **3912.** a) Záporné; b) záporné; c) kladné. **3913.** $\frac{1}{4}$.

3914. $1{,}96<I<2$. **3915.** $a^2+b^2+\frac{R^2}{2}$. **3916.** $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$.

3917. $\int_{-2}^{2}dx\int_{|x|/2}^{1}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y}f(x,y)dx$. **3918.** $\int_0^1 dx\int_0^{x+1}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$.

3919. $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$. **3920.** $\int_{-1/2}^{1/2}dx\int_{1/2-\sqrt{1/4-x^2}}^{1/2+\sqrt{1/4-x^2}}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$.

3921. $\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$.

3922. $\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-1}^{1}dx\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy\right\}+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$.

3924. $\int_0^2 dy\int_{y/2}^{y}f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{y/2}^{2}f(x,y)dx$. **3925.** $\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)dx+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)dx$. **3926.** $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx$.

3927. $\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$. **3928.** $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

3929. $\int_0^a dy\left\{\int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx\right\}+\int_a^{2a}dy\int_{y^2/2a}^{2a}f(x,y)dx$. **3930.** $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)dx$.

3931. $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx-\int_{-1}^{0}dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$. **3932.** $\frac{p^5}{21}$. **3933.** $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}$. **3934.** $\frac{a^4}{2}$.

3935. $14a^4$. **3936.** $\frac{35\pi a^4}{12}$. **3937.** $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)dr$. **3938.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)dr$.

3939. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$. **3940.** $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}\operatorname{cosec}(\varphi+\pi/4)} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$.

3941. $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi/\cos^2\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{a/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi/\cos^2\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$.

3942. Pouze v případě, že je oblast integrace vymezena dvěma soustřednými kružnicemi se středem v počátku soustavy souřadnic a dvěma polopřímkami, které vycházejí z počátku.

3943. $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr = \int_0^1 r\,dr \int_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi +$

$+ \int_1^{\sqrt{2}} r\,dr \int_{\arccos 1/r}^{\arcsin 1/r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$.

3944. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{1/\sqrt{2}\operatorname{cosec}(\varphi+\pi/4)}^{1} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr = \int_{1/\sqrt{2}}^1 r\,dr \int_{\pi/4-\arccos 1/r\sqrt{2}}^{\pi/4+\arccos 1/r\sqrt{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$.

3945. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{2/\cos\varphi} rf(r)\,dr = \frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r)\,dr + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\,dr$.

3946. $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{\sin\varphi/\cos^2\varphi}^{1/\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr =$

$= \int_0^1 r\,dr \int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r\,dr \int_{\arccos 1/r}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$

3947. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr = \int_0^a r\,dr \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$. **3948.** $\int_0^a dr \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\,d\varphi$.

3949. $\int_0^a dr \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r)\,d\varphi$. **3950.** $\int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r)\,d\varphi$. **3951.** $2\pi\int_0^1 rf(r)\,dr$.

3952. $\pi\int_0^1 rf(r)\,dr + \int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{r}\right) rf(r)\,dr$. **3953.** $\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi$. **3954.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **3955.** $-6\pi^2$.

3956. $\frac{6}{5}\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{b+h}\right)}$; $\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{3/2}$. **3957.** $\int_a^b u\,du \int_\alpha^\beta f(u, uv)\,du$.

3958. $\frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$. **3959.** $4\int_0^{\pi/2} \sin^3 v\,\cos^3 v\,dv \int_0^a uf(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\,du$. **3961.** $u = xy$, $v = x - y$.

3962. $\int_{-1}^1 f(u)\,du$. **3963.** $2\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right) du$. **3964.** $\ln 2\int_1^2 f(u)\,du$. **3965.** $\frac{\pi}{2}$. **3966.** $\frac{4}{3}$.

3967. $\frac{2}{3}\pi ab$. **3968.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **3969.** $543\frac{11}{15}$. **3970.** $1\frac{37}{128} - \ln 2$. **3971.** 2π. **3972.** $\frac{9}{16}\pi$. **3973.** $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{4}$.

3974. $\frac{4}{3}\pi + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **3975.** 6. **3976.** $\frac{4}{3}\left(4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\right)$. **3978.** $f(0,0)$. **3979.** $\frac{2}{t}F(t)$, je-li $t > 0$.

3980. $2\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$. **3981.** $F'(t)=\int\limits_0^{2\pi}tf(t\cos\varphi,t\sin\varphi)d\varphi$. **3984.** $\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)a^2$.

3985. $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$. **3986.** πa^2. **3987.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$. **3988.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **3989.** $\frac{\pi a^2}{4}$.

3990. $a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$. **3991.** $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **3992.** $\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right]$.

3993. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **3994.** $\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}$. **3994.1** $\frac{1}{1260}\frac{(ab)^5}{c^8}$. **3995.** $\frac{ab}{70}$. **3996.** $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$.

3997. $\frac{a^2}{2}\ln 2$. **3998.** $\frac{4}{3}(q-p)(s-\tau)$. **3998.1** $\frac{1}{15}\left(b^5-a^5\right)\left(c^{-3}-d^{-3}\right)$.

3998.2 $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\left(b^{\frac{q+1}{q-p}}-a^{\frac{q+1}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{p+1}{q-1}}-d^{-\frac{p+1}{q-1}}\right)$. **3999.** $\frac{65}{108}ab$. **3999.1** $\frac{189}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{12}{25}\right)ab$.

4000. $\frac{c^2}{6}\left(\sqrt{10}-2\right)\arcsin\frac{1}{3}$. **4001.** $\frac{\pi}{|\delta|}$. **4002.** $\frac{c^2}{4}\left[(v_2-v_1)(\sinh 2u_2-\sinh 2u_1)-(u_2-u_1)(\sin 2v_2-\sin 2v_1)\right]$.

4003. $\frac{2}{3}\pi a^2$. **4004.** $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$. **4007.** $\frac{5}{6}$. **4008.** $\frac{\pi R^2a}{4}-\frac{2}{3}R^3$. **4009.** $\frac{88}{105}$. **4010.** π. **4011.** π.

4012. $\frac{17}{12}-2\ln 2$. **4013.** $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$. **4014.** $\frac{\pi}{8}$. **4015.** $\frac{45}{32}\pi$. **4016.** $\frac{16}{9}a^3$. **4017.** $\frac{\pi a^3}{8}$.

4018. $\pi\left(1-e^{-R^2}\right)$. **4019.** $2a^2c\frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}$. **4020.** $\frac{\pi}{8}$. **4021.** $\frac{1}{3}\pi abc\left(2-\sqrt{2}\right)$. **4022.** $\frac{4}{3}\pi abc\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

4023. $\frac{3\pi abc}{8}$. **4024.** $\frac{2}{3}\pi abc$. **4025.** $\frac{abc}{3}$. **4026.** $\frac{2}{9}abc\left(3\pi+20-16\sqrt{2}\right)$. **4027.** $\frac{\pi\left(b^3-a^3\right)}{12}$. **4028.** $\frac{9}{2}a^4$.

4029. $\frac{3}{4}$. **4030.** $\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **4031.** $\frac{8}{35}$. **4032.** $\frac{75}{256}\pi abc$. **4033.** $\frac{\pi^4a^2c}{128}$. **4033.1** $(n-m)\left(e^{-1}-e^{-2}\right)a^2$.

4034. $\frac{abc}{3n^2}\Gamma^3(1/n)/\Gamma(3/n)$ **4035.** $\frac{abc}{2m+n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}$. **4036.** $\frac{2}{3}\pi a^2\left(2\sqrt{2}-1\right)$. **4037.** $16a^2$.

4038. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. **4039.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **4040.** $8a^2$. **4041.** $\pi\sqrt{2}$. **4042.** $\frac{\pi a^2}{2}$.

4043. $-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4044.** $\frac{a^2}{9}(20-$ **3445.** $2a^2$. **4045.1** $\frac{\pi}{6}\left[\sqrt{10}+3\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right]$.

4045.2 $\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{3/2}-\frac{1}{c^3}\right]$. **4045.3** $\frac{4}{3}ab\left(2\sqrt{2}-1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$. **4045.4** $\frac{\pi}{2}\ln\left(e+e^{-1}\right)$.

4046. $S=4\pi\left(+2\sqrt{3}\right)a^2$; $V=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}a^3$. **4047.** $(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2$, kde φ_1,φ_2 jsou úhlové délky poledníků, ψ_1, ψ_2 jsou úhlové šířky rovnoběžek a R je poloměr sféry. **4048.** $\pi\left\{a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{|h|}\right\}$.

4049. $S=a(\varphi_2-\varphi_1)\left[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)\right]$; $4\pi^2ab$. **4050.** $\omega=\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$; $\omega=\frac{bc}{a^2}$.

4051. $\frac{\varrho_0a^2}{3}\left[2+\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. **4052.** $x_0=-\frac{a}{2}$; $y_0=\frac{8}{5}a$. **4053.** $x_0=y_0=\frac{a}{5}$. **4054.** $x_0=y_0=\frac{256}{315\pi}a$.

4055. $x_0=\frac{a^2b}{14c^2}$; $y_0=\frac{ab^2}{14c^2}$. **4056.** $x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}$. **4057.** $x_0=\frac{5}{6}a$; $y_0=\frac{16}{9\pi}a$. **4058.** $x_0=\pi a$; $y_0=\frac{5}{6}a$.

4059. $x_0=-\frac{a}{5}$; $y_0=0$. **4060.** Parabola $y_0=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0}$. **4061.** $I_x=\frac{bh^3}{12}$; $I_y=\frac{h\left|b_1^3-b_2^3\right|}{12}$ $\left(b=\left|b_1-b_2\right|\right)$.

4062. $I_x=I_y=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$. **4063.** $I_x=\frac{21\pi a^4}{32}$; $I_y=\frac{49\pi a^4}{32}$. **4064.** $I_x=I_y=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. **4065.** $I_x=I_y=\frac{9}{8}a^4$.

4066. $I_0=\frac{\pi a^4}{8}$. **4066.1** $\frac{a^4}{12}$. **4069.** $I_a=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$. **4070.** $X=ah^2$; $Y=0$, kde X, Y jsou průměty tlakové síly na osy x a y. **4071.** $P_1=\pi a^2\delta\left(h-\frac{2}{3}a\right)$; $P_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2}{3}a\right)$. **4072.** Průměty tlakové síly na vodorovnou osu x a svislou osu z svislé roviny určené osou válce jsou po řadě rovny $X_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$; $X_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$. **4073.** Průměty gravitační síly na osy x, y, z jsou rovny $X=0$, $Y=0$, $Z=-\frac{2kmM}{a^2h}\left\{|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b-h)^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right\}$, kde k je gravitační konstanta. **4074.** $\overline{p}=\frac{1}{2}p_0$. **4075.** $A=\frac{kp}{12}\left\{2ab\sqrt{a^2+b^2}+a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right\}$.

4076. $\frac{1}{364}$. **4077.** $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. **4078.** $\frac{1}{48}$. **4079.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **4080.** $\frac{\pi}{6}$.

4081. $\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy\right\}=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx+\int_x^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx\right\}$.

4082. $\int_{-1}^1 dx\int_{|x|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy=\int_0^1 dz\int_{-z}^{z} dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx$.

4083. $\int_0^1 dx\left\{\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_{x^2}^{x^2+1} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy\right\}=$

$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx+\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)dx\right\}+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$.

4084. $\frac{1}{2}\int_0^x (x-\zeta^2)f(\zeta)d\zeta$. **4085.** $\frac{1}{2}\int_0^1 (2-z^2)f(z)dz+\frac{1}{2}\int_1^2 (2-z^2)f(z)dz$.

4086. $F(A,B,C)-F(A,B,c)-F(A,b,C)-F(a,B,C)+F(A,b,c)+F(a,B,c)+F(a,b,C)-F(a,b,c)$. **4087.** $\frac{\pi}{10}$.

4088. $\frac{\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. **4089.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}}\cos\psi\,d\psi\int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2f(r)dr$. **4090.** $\frac{\pi^2abc}{4}$. **4091.** $\frac{16\pi}{3}$.

4092. $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$. **4093.** $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$.

4094. $\frac{6}{5}$. **4095.** $3(e-2)$. **4096.** $u=\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}$, kde $|\theta|<1$.

4098. a) $F'(t)=4\pi t^2f(t^2)$; b) $F'(t)=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint_V xyzf'(xyz)dxdydz\right]$, kde $t>0$ a $V=\{0\le x\le t,0\le y\le t,0\le z\le t\}$.

4099. 0, je-li jedno z čísel m, n, p liché; $\frac{4\pi}{m+n+p+3}\frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, jsou-li čísla m, n, p sudá.

4100. $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$. **4101.** $\frac{3}{35}$. **4102.** $\frac{7}{24}$. **4103.** $\frac{2}{3}a^3(3\pi-4)$. **4104.** $\frac{\pi a^3}{6}$.

4105. $\frac{a^3}{24}(3\pi-4)$. **4106.** $\frac{32}{3}\pi$. **4107.** πa^3. **4108.** $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. **4109.** $\frac{1}{2}$. **4110.** $\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(b^3-a^3\right)$.

4111. $\frac{\pi}{3}\frac{a^2bc}{h}$. **4112.** $\frac{\pi^2}{4}abc$. **4112.1** $\frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$. **4113.** $\frac{5\pi abc}{12}\left(3-\sqrt{5}\right)$. **4114.** $\frac{8\pi}{5}abc$.

4115. $\frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$. **4116.** $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **4116.1** $\frac{abc}{60}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$. **4117.** $\frac{abc}{554400}$.

4118. $\frac{abc}{3}$. **4118.1** $\frac{abc}{90}$. **4118.2** $\frac{abc}{1680}$. **4118.3** $\frac{4\pi}{35}abc$. **4119.** $\frac{9}{4}a^2$. **4120.** $\frac{1}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$.

4121. $\frac{4\pi}{3}a^3$. **4122.** $\frac{\pi abc^2}{3h}\left(1-e^{-1}\right)$. **4123.** $\frac{3}{2}abc$. **4124.** $5abc\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right)$. **4125.** $37/27$.

4126. $V=\frac{5\pi a^3}{6}$; $S=\frac{\pi a^2}{6}\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1\right)$. **4127.** $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$. **4128.** $\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$. **4129.** $\frac{\pi^2}{3n\sin(\pi/n)}\frac{abc^2}{h}$.

4130. $\frac{abc}{mn+mp+np}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$. **4131.** $\frac{3}{2}$. **4132.** $4\pi\varrho_0\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)e^{-k}$. **4133.** $\left(0,0,\frac{3}{4}c\right)$.

4134. $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$; $z_0=\frac{7}{30}a^2$. **4135.** $x_0=\frac{7}{18}p$; $y_0=0$; $z_0=\frac{7}{176}p$. **4136.** $x_0=\frac{3}{8}a$; $y_0=\frac{3}{8}b$; $z_0=\frac{3}{8}c$.

4137. $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{3a}{8}$. **4138.** $x_0=y_0=1$; $z_0=\frac{5}{3}$. **4139.** $x_0=\frac{9\pi}{448}a$; $y_0=\frac{9\pi}{448}b$; $z_0=\frac{9\pi}{448}c$. **4140.** $x_0=y_0=0$;

$z_0=\frac{7}{20}$. **4141.** $\frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}=\frac{3}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$. **4142.** $x_0=\alpha$; $y_0=\beta$; $z_0=\gamma$. **4143.** $I_{xy}=\frac{abc^3}{60}$; $I_{yz}=\frac{a^3bc}{60}$;

$I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$. **4144.** $I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3$; $I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$; $I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$. **4145.** $I_{xy}=\frac{\pi abc^3}{5}$; $I_{yz}=\frac{\pi a^3bc}{20}$;

$I_{xz}=\frac{\pi ab^3c}{20}$. **4146.** $I_{xy}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16)$; $I_{xz}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$; $I_{yz}=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92)$.

4147. $I_{xy}=\frac{7}{2}\pi abc^3$, $I_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$; $I_{yz}=\frac{4}{3}\pi a^3bc$. **4147.1** $I_{yz}=\frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}a^3bc$; $I_{zx}=\frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}ab^3c$;

$I_{xy}=\frac{\pi^2}{128\sqrt{2}}abc^3$. **4147.2** $I_{yz}=\frac{1}{5n^2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}a^3bc$; $I_{zx}=\frac{1}{5n^2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}ab^3c$;

$I_{xy}=\frac{1}{5n^2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}abc^3$. **4148.** $I_z=\frac{14}{15}$. **4149.** $I_z=\frac{4\pi}{15}\left(4\sqrt{2}-5\right)$. **4149.1** $\frac{\pi}{5}a^5$. **4150.** $\frac{4}{9}MR^2$.

4153. $I=\frac{M}{3}\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right)$, kde $M=2\pi\varrho_0a^2h$ je hmotnost válce. **4154.** $I_0=\frac{\pi^2a^5\varrho_0}{8}$. **4155.** $u=2\pi\varrho_0\left(R^2-\frac{r^2}{3}\right)$

pro $r\le R$; $u=\frac{4\pi R^3\varrho_0}{3r}$ pro $r>R$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **4156.** $u=4\pi\int_{R_1}^{R_2}f(\varrho)\min\left(\frac{\varrho^2}{r},\varrho\right)d\varrho$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4157. $u=\pi\varrho_0\left\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}-[(h-z)\,|h-z|+z\,|z|]+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z}\right|\right\}$.

4158. $X=0$; $Y=0$; $Z=-\frac{kMm}{a\,|a|}$ pro $|a|\geq R$, $Z=-\frac{kMm}{R^3}a$ pro $|a|<R$. **4159.** $X=0$; $Y=0$; $Z=-2\pi\varrho_0 k\left\{\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-(|z|-|h-z|)\right\}$. **4160.** $X=0$; $Y=0$; $Z=-\pi k\varrho_0 R\sin^2\alpha$.

4161. Konverguje pro $p>1$. **4162.** Konverguje pro $p>1$ a $q>1$. **4163.** Konverguje pro $p>\frac{1}{2}$.

4164. Konverguje pro $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$. **4165.** Diverguje. **4169.** $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$ $(p>q>1)$. **4170.** $\frac{1}{p-1}$ $(p>1)$.

4171. 2π. **4172.** $\frac{\pi}{p-1}$ $(p>1)$. **4173.** $\pi\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$. **4174.** $\frac{1}{2}$. **4175.** π. **4176.** $\frac{\pi}{2}$. **4177.** $\frac{\pi}{2}$.

4178. $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\Delta/\delta}$, kde $\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ b & c\end{vmatrix}$ a $\Delta=\begin{vmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}$. **4179.** $\frac{\pi}{e}ab$. **4180.** $-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}}$. **4181.** Konverguje.

4182. Konverguje pro $p<1$. **4183.** Konverguje pro $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$. **4184.** Konverguje pro $p<1$.

4185. Konverguje pro $p<1$. **4187.** $\frac{\pi}{2}$. **4188.** πa. **4189.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. **4190.** 2. **4191.** Konverguje pro $p>\frac{3}{2}$. **4192.** Konverguje pro $p<\frac{3}{2}$. **4193.** Konverguje pro $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$. **4194.** Konverguje pro $p<1$.

4195. Konverguje pro $p<1$. **4196.** $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ $(p<1, q<1, r<1)$. **4197.** $\frac{4\pi}{3}$.

4198. $2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right)$ $(p<1)$. **4199.** $\pi^{3/2}$. **4200.** $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$, kde $\Delta=|a_{ij}|$. **4204.** a) $\frac{n}{3}$; b) $\frac{n(3n+1)}{12}$. **4205.** $\frac{a^n}{n!}$.

4206. $\frac{1}{2^n n!}$. **4207.** $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$. **4208.** $\frac{2^n h_1 h_2 \ldots h_n}{|\Delta|}$. **4209.** $\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{n!}$. **4210.** $\frac{\pi^{(n-1)/2}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1 a_2 \ldots a_n$.

4211. $\frac{\pi^{n/2}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. **4212.** $\frac{\pi^{(n-1)/2}a^{n-1}h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. **4213.** $\frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. **4218.** $R^n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 f\left(\sqrt{u}\right)u^{n/2-1}du$.

4219. $u=\frac{16}{15}\pi^2\varrho_0^2R^5$. **4220.** $\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}}e^{-\Delta/\delta}$, kde $\delta=|a_{ij}|$ a $\Delta=\begin{vmatrix}a_{ij} & b_i\\ b_j & c\end{vmatrix}$ je determinant ovroubené matice.

4221. $1+\sqrt{2}$. **4222.** $\frac{256}{15}a^3$. **4223.** $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$. **4224.** $\frac{a^3}{6}\left(\cosh^{3/2}2t_0-1\right)$. **4225.** $4a^{7/3}$.

4226. $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$. **4227.** $2a^2\left(-2\sqrt{2}\right)$. **4228.** $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$. **4229.** $2a^2$. **4230.** $\frac{\pi}{a}$. **4231.** 5.

4232. $\sqrt{3}$. **4233.** $|x_0|+|z_0|$, kde $|x_0|<a$. **4234.** $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$. **4235.** $\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}$.

4236. $a\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$. **4237.** $\frac{2\pi}{3}\left(3a^2+4\pi^2b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$. **4238.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **4239.** $\frac{1}{3}\left[\left(2+t_0^2\right)^{3/2}-2^{3/2}\right]$.

4240. $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$. **4241.** $2b\left(b+a\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, kde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ je excentricita

elipsy. **4241.1** $\frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2}-1)$. **4242.** $\frac{a}{8}\left[\left(3\sqrt{3}-1\right)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. **4243.** $x_0=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$; $y_0=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$.

4244. $x_0=y_0=\frac{4}{3}a$. **4244.1** $S_x=S_y=\frac{3}{5}a^2$. **4244.2** πa^3. **4244.3** a) $\frac{32}{3}a^3$; b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. **4244.4** $r_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

4245. $x_0=y_0=z_0=\frac{4a}{3\pi}$. **4246.** $x_0=\frac{2}{5}$; $y_0=-\frac{1}{5}$; $z_0=\frac{1}{2}$. **4247.** $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$;

$I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$. **4248.** a) 0; b) $\frac{2}{3}$; c) 2. **4249.** a) 2; b) 2; c) 2. **4250.** $-\frac{14}{15}$. **4251.** $\frac{4}{3}$. **4252.** 0.

4253. $-2\pi a^2$. **4254.** -2π. **4255.** 0. **4256.** 0. **4257.** $\frac{\pi}{4}-1$. **4258.** 8. **4259.** 12. **4260.** 4. **4261.** -2.

4262. $\int_0^{a+b} f(u)du$. **4263.** $-\frac{3}{2}$. **4264.** 9. **4265.** $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)dy$. **4266.** 62. **4267.** 1. **4268.** $\pi+1$.

4269. $e^a\cos b-1$. **4271.** $z=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$. **4272.** $z=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$.

4273. $z=-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+\ln|x+y|+C$. **4274.** $z=e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$. **4275.** $z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}+C$.

4276. $z=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)+C$. **4278.** $|I_R|\le\frac{8\pi}{R^2}$. **4279.** $\frac{1}{35}$. **4280.** $-\pi a^2$. **4281.** $2\pi\sqrt{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

4282. $-\frac{\pi a^3}{4}$. **4283.** -4. **4284.** $-53\frac{7}{12}$. **4285.** 0. **4286.** $b-a$. **4287.** $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)dy+\int_{z_1}^{z_2}\chi(z)dz$.

4288. $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)du$. **4289.** $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)du$. **4290.** $u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$. **4291.** $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$.

4292. $u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\operatorname{arctg}\frac{z}{x+y}+C$. **4293.** $A=-mg(z_2-z_1)$. **4294.** $A=-\frac{k}{2}(a^2-b^2)$. **4295.** $A=k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$,

$r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$ $(i=1,2)$. **4296.** $I=\iint_S y^2dxdy$. **4297.** $-46\frac{2}{3}$. **4298.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **4299.** $-2\pi ab$.

4300. $-\frac{1}{5}(e^\pi-1)$. **4301.** 0. **4302.** $I_1-I_2=2$. **4303.** $\frac{\pi ma^2}{8}$.

4304. $mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1)$. **4305.** $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=kx+\frac{\partial u}{\partial y}$, kde u je dvakrát diferencovatelná funkce a k je konstanta. **4306.** $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x,y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x,y)]$. **4307.** 1) $I=0$; 2) $I=2\pi$.

4308. πab. **4309.** $\frac{3}{8}\pi ab$. **4310.** $\frac{a^2}{6}$. **4311.** $\frac{3}{2}a^2$. **4312.** a^2. **4313.** $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.

4314. $\frac{a^2}{2}B(2m+1,2n+1)$. **4315.** $\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. **4316.** $\frac{ab}{n}\left[1\pm\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]$. **4317.** $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$.

4318. $\pi(n+1)(n+2)r^2$; $6\pi r^2$. **4319.** $\pi(n-1)(n-2)r^2$; $6\pi r^2$. **4320.** $4a^2$. **4321.** $\operatorname{sgn}(ad-bc)$.

4322. $I=\sum\operatorname{sgn}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}$, kde se sčítá přes všechny průsečíky křivek $\varphi(x,y)=0$ a $\psi(x,y)=0$, které leží uvnitř smyčky C. **4324.** $I=2S$, kde S je plocha vymezená křivkou C. **4325.** $X'_x(x_0,y_0)+Y'_y(x_0,y_0)$. **4326.** Průměty síly na osy souřadnic jsou $X=0$; $Y=2kmM/\pi a^2$, kde k je gravitační konstanta. **4327.** $u=2\pi\varkappa R\ln\frac{1}{R}$ pro

$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}\le R$; $u=2\pi\varkappa R\ln\frac{1}{\varrho}$ pro $\varrho>R$. **4328.** $I_1=\frac{\pi}{m}\varrho^m\cos m\varphi, I_2=\frac{\pi}{m}\varrho^m\sin m\varphi$ pro $0\le\varrho\le 1$; $I_1=\frac{\pi}{m}\varrho^{-m}\cos m\varphi$, $I_2=\frac{\pi}{m}\varrho^{-m}\sin m\varphi$ pro $\varrho>1$. **4329.** $u=2\pi$, jestliže bod (x,y) leží uvnitř plochy vymezené křivkou C; $u=\pi$, jestliže bod (x,y) leží na křivce C; $u=0$, jestliže bod (x,y) leží vně křivky C.

4330. $K_1=\pi\varrho^m\cos m\varphi$, $K_2=\pi\varrho^m\sin m\varphi$ pro $0\le\varrho<1$; $K_1=0$, $K_2=0$ pro $\varrho=1$; $K_1=-\frac{\pi}{\varrho^m}\cos m\varphi$, $K_2=-\frac{\pi}{\varrho^m}\sin m\varphi$ pro $\varrho>1$. **4339.** $Q=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$; $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$.

4340. $H_x=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\eta-y)dz-(\zeta-z)dy]$; $H_y=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\zeta-z)dx-(\xi-x)dz]$; $H_z=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\xi-x)dy-(\eta-y)dx]$.

4341. $I_1-I_2=(4\pi-2\sqrt{3})a^4$. **4342.** $\frac{7}{2}\pi\sqrt{2}a^3$. **4343.** πa^3. **4344.** $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$. **4345.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$.

4346. $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$. **4347.** $\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$. **4348.** $\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right]$. **4349.** $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$ $\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$. **4350.** $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. **4352.** $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. **4352.1** πa^2. **4352.2** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **4353.** $\frac{4}{3}\pi\varrho_0 a^4$.

4354. $\frac{\pi\varrho_0 a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$. **4355.** $x_0=\frac{a}{2}$; $y_0=0$; $z_0=\frac{16}{9\pi}a$. **4356.** $x_0=y_0=\frac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_0=\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$.

4356.1 a) $40a^4$; b) $\pi R\left[R(R+H)^2+\frac{2}{3}H^3\right]$. **4356.2** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **4357.** Průměty gravitační síly na souřadnicové osy jsou $X=0$; $Y=0$; $Z=\pi k m\rho_0\ln\frac{a}{b}$. **4358.** $u=4\pi\varrho_0\min\left(a,\frac{a^2}{r_0}\right)$, kde $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. **4359.** $F(t)=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$ pro $|t|\le\sqrt{3}$; $F(t)=0$ pro $|t|>\sqrt{3}$. **4360.** $F(t)=\frac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6}t^4$. **4361.** $F=0$ pro $t\le r-a$; $F=\frac{\pi t}{r}\left[a^2-(r-t)^2\right]$ pro $r-a<t<r+a$; $F=0$ pro $t>r+a$ $(t\ge 0)$. **4362.** $4\pi a^3$. **4363.** $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]abc$.

4364. 0. **4365.** $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. **4366.** $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$. **4367.** $-\pi a^2\sqrt{3}$. **4368.** $\frac{h^3}{6}$. **4369.** $2S$.

4370. 0. **4371.** $-2\pi a(a+h)$. **4372.** $2\pi Rr^2$. **4373.** $-\frac{9}{2}a^3$. **4374.** 0. **4376.** $3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

4377. 0. **4378.** $2\iiint_V\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **4379.** $\iiint_V\Delta u dxdydz$, kde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4380.** 0.

4384. $\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|$. **4385.** $\frac{2}{9}a^3$. **4385.1** $2\pi^2a^2b$. **4387.** $3a^4$. **4388.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **4389.** 1.

4390. $-\frac{\pi h^4}{2}$. **4392.** a) $I=0$; b) $I=4\pi$. **4401.** a) $\operatorname{grad}u(0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$, $|\operatorname{grad}u(0)|=7$, $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$; b) $\operatorname{grad}u(A)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$, $|\operatorname{grad}u(A)|=3\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=0$; c) $\operatorname{grad}u(B)=7\boldsymbol{i}$, $|\operatorname{grad}u(B)|=7$, $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$; $\operatorname{grad}u=0$ v bodě $(-2,1,1)$.

4401.1 $\operatorname{grad}u(M)=12\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{k}$, $|\operatorname{grad}u(M)|=25$, $\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=-\frac{9}{25}$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

4402. a) $xy=z^2$; b) $x=y=0$ a $x=y=z$; c) $x=y=z$. **4403.** $r=1$. **4404.** $\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\frac{4z^2}{u^2}=1$ $(u\ge 16)$; $\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1$; $\max u=20$. **4405.** $\cos\varphi=-\frac{8}{9}$. **4406.** Ekvipotenciální plochy jsou vnitřky kuželů;

plochy stejné velikosti gradientu jsou tory; $\inf u = 0$, $\sup u = 1$; $\inf|\operatorname{grad} u| = 0$, $\sup|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{2}$.

4407. $\frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)|}$. **4409.** a) $\frac{r}{r}$; b) $2r$; c) $-\frac{r}{r^3}$. **4410.** $f'(r)\frac{r}{r}$. **4411.** c. **4412.** $2r(c\cdot c) - 2c(c\cdot r)$.

4415.1 a) $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}e_z$, kde $e_r = i\cos\varphi + j\sin\varphi$, $e_\varphi = -i\sin\varphi + j\cos\varphi$, $e_z = k$ jsou tečné vektory k odpovídajícím souřadnicovým křivkám; b) $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}e_\varphi$, kde $e_r = i\cos\varphi\sin\theta + j\sin\varphi\sin\theta + k\cos\theta$, $e_\theta = i\cos\varphi\cos\theta + j\sin\varphi\cos\theta - k\sin\theta$, $e_\varphi = -i\sin\varphi + j\cos\varphi$ jsou tečné vektory k odpovídajícím souřadnicovým křivkám. **4416.** $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial r} = |\operatorname{grad} u|$ pro $a = b = c$. **4417.** $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\cos(l,r)}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ pro $l \perp r$. **4418.** $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ pro $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$.

4419. $a = \frac{i\left(\sqrt{x^2+y^2}+yz\right) - j\left(\sqrt{x^2+y^2}+xz\right) + k(x-y)z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}$. **4420.** $y = c_1 x$, $z = c_2 x^2$. **4422.1** $\operatorname{div} a(M) = 18/125$;

$\Pi = \frac{24}{125}\pi\varepsilon^3$. **4423.** 0. **4425.** $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, kde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4426.** $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$;

$f(r) = c + \frac{c_1}{r}$, kde c a c_1 jsou konstanty. **4427.** a) 3; b) $\frac{2}{r}$. **4428.** $\frac{f'(r)}{r}(c\cdot r)$. **4429.** $3f(r) + rf'(r)$; $f(r) = \frac{c}{r^3}$,

kde c je konstanta. **4430.** a) $u\Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$; b) $u\Delta v + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v$, kde Δu je Laplaceův operátor.

4431. $\operatorname{div} v = 0$; $\operatorname{div} w = -2\omega^2$. **4432.** 0 vně přitahujících se středů. **4433.** $\operatorname{div} a = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$, kde

a_r, a_φ jsou průměty vektoru a na souřadnicové křivky $\varphi = \text{const}$ a $r = \text{const}$.

4434. $\operatorname{div} a = \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right]$, kde a_u, a_v, a_w jsou průměty vektoru a na

odpovídající souřadnicové křivky a $L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}$, $M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$,

$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. Jestliže r, φ, z jsou cylidrické souřadnice, pak

$\operatorname{div} a = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$; jsou-li r, θ, φ sférické souřadnice, pak

$\operatorname{div} a = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a_r \sin\theta\right) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin\theta) + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$. **4436.** a) 0; b) 0. **4436.1** $\operatorname{rot} a(M) = -\frac{5}{4}i - j + \frac{5}{2}k$,

$|\operatorname{rot} a(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}$, $\cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{141}}$, $\cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{141}}$, $\cos\gamma = \frac{10}{\sqrt{141}}$. **4437.** a) $\frac{f'(r)}{r}[r\times c]$;

b) $2f(r)c + \frac{f'(r)}{r}[c(r\cdot r) - r(c\cdot r)]$. **4439.** a) 0; b) 0. **4440.** $\operatorname{rot} v = 2\omega$. **4440.1** $\operatorname{rot} a = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right]k$,

kde a_φ a a_r jsou průměty vektoru a, na odpovídající souřadnicové křivky $r = \text{const}$ a $\varphi = \text{const}$.

4440.2 a) $\operatorname{rot} a = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)e_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)e_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right]e_z$

kde $a_r = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi$, $a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi$, $a_z = a_z$;

b) $\operatorname{rot} a = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right]e_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right]e_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]e_\varphi$,

kde $a_r = a_x\cos\varphi\sin\theta + a_y\sin\varphi\sin\theta + a_z\cos\theta$, $a_\theta = a_x\cos\varphi\cos\theta + a_y\sin\varphi\cos\theta - a_z\sin\theta$, $a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi$.

4441. a) 0; b) πh^3. **4442.** a) 0; b) 0. **4443.** π. **4444.** $\frac{3\pi}{8}$. **4445.** 0. **4445.1** $\frac{\pi}{5}$. **4447.** $4\pi m$.

4448. $\sum_{i=1}^{n} e_i$. **4450.** $c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$, kde c je koeficient měrné tepelné kapacity a ϱ je hustota tělesa.

4452. $2\pi^2 b^2$. **4452.1** $8\frac{20}{21}\ln 2$. **4452.2** $\frac{3}{4}\left(3+e^4-12e^{-2}\right)$. **4453.** $\int_{r_A}^{r_B} f(r) r\,dr$. **4454.** a) 2π; b) 2π.

4455. a) $\Gamma = 0$; b) $\Gamma = 2\pi n$, kde n je počet otočení křivky C kolem osy z. **4455.1** $\operatorname{rot} a(M) = -j - 2k$,

$\Gamma = -\pi(\cos\beta + 2\cos\gamma)\varepsilon^2$. **4456.** $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$, $\Gamma = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$; $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

4457. $u = xyz(x+y+z) + C$. **4457.1** $\frac{1}{3}$. **4458.** $u = \frac{m}{r}$. **4459.** $u(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}$, kde r_i je vzdálenost pohybujícího se bodu $M = (x,y,z)$ od bodu M_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. **4460.** $u(x,y,z) = \int_{r_0}^{r} tf(t)\,dt$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULTY
Matematické oddělení
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

FRAGMENT

FRAGMENT – ČTENÍ PRO RADOST I POUČENÍ

SVĚTOVĚ PROSLULÝ KURZ FYZIKY!

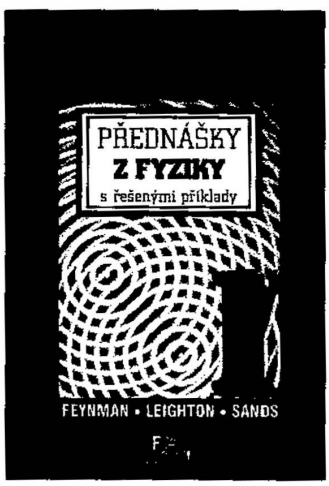
Kompletní vydání kurzu fyziky Richarda P. Feynmana vyšlo v češtině poprvé!



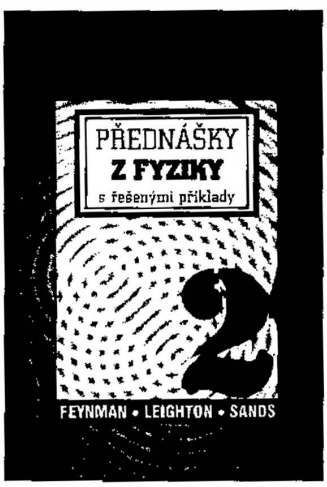
R. P Feynman (1918 – 1988)
nositel Nobelovy ceny za fyziku

Teoretické přednášky jsou doplněny příklady a cvičeními včetně jejich řešení.

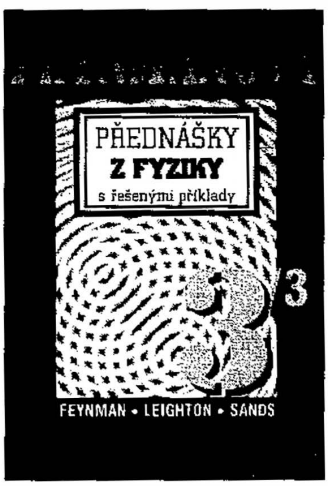
165 x 235 mm, váz., 495 Kč



732 str.



808 str.



450 str.

Knihy žádejte u svého knihkupce nebo si je můžete objednat přímo na adrese nakladatelství Fragment, Radiová 1, 102 27 Praha 10 – Hostivař, tel.: 267 008 815-6, fax: 2067 008 273, e-mail: objednavka@fragment.cz, www.fragment.cz