

Matematická analýza

2. díl

11. března 2026

Pick - Hencel - Spurný - Zelený

Obsah

Kapitola 1. Logika, množiny a základní číselné obory	1
1.1. Logika	1
1.2. Základní metody důkazů	11
1.3. Množiny	17
1.4. Relace uspořádání	19
1.5. Relace zobrazení	22
1.6. Množina reálných čísel	28
1.7. Vlastnosti elementárních funkcí	38
1.8. Teoretické a početní příklady	45
Kapitola 2. Limita posloupnosti	59
2.1. Nekonečné posloupnosti	59
2.2. Vlastní limita posloupnosti	61
2.3. Nevlastní limita posloupnosti	76
2.4. Hlubší věty o limitách	86
2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti	97
2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti	106
Kapitola 3. Číselné řady	121
3.1. Základní pojmy	121
3.2. Řady s nezápornými členy	126
3.3. Řady s obecnými členy	132
3.4. Absolutní konvergence číselných řad	137
3.5. Přerovnání řad	143
3.6. Součin řad	151
3.7. Zobecněné řady	154
3.8. Teoretické příklady k číselným řadám	168
3.9. Početní příklady k číselným řadám	184
Kapitola 4. Limita a spojitost funkce	199
4.1. Definice a základní vlastnosti	199
4.2. Věty o limitách	206
4.3. Funkce spojitě na intervalu	215
4.4. Teoretické příklady k limitě funkce	220

4.5. Početní příklady k limitě funkce	233
Kapitola 5. Derivace funkce	247
5.1. Základní vlastnosti derivace	247
5.2. Věty o střední hodnotě	258
5.3. Elementární funkce	262
5.4. L'Hôpitalovo pravidlo	280
5.5. Monotónní funkce	283
5.6. Konvexní a konkávní funkce	286
5.7. Průběh funkce	291
5.8. Teoretické příklady k derivaci funkce	295
5.9. Početní příklady k derivaci a jejím aplikacím	311
Kapitola 6. Taylorův polynom	357
6.1. Základní vlastnosti	357
6.2. Symbol malé o	363
6.3. Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí	366
6.4. Teoretické příklady k Taylorovu polynomu	373
6.5. Početní příklady k Taylorovu polynomu	376
Kapitola 7. Integrál	1
7.1. Primitivní funkce	1
7.2. Riemannův integrál	29
7.3. Newtonův integrál	47
7.4. Konvergence Newtonova integrálu	54
7.5. Aplikace určitého integrálu	63
7.6. Teoretické příklady na integrál	68
7.7. Početní příklady na integrál	83
Kapitola 8. Metrické prostory	115
8.1. Základní pojmy	115
8.2. Konvergence v metrických prostorech	126
8.3. Topologické pojmy v metrických prostorech	129
8.4. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory	143
8.5. Součin metrických prostorů	150
8.6. Kompaktní prostory	152
8.7. Úplné prostory	160
8.8. Separabilní prostory	180
8.9. Souvislé prostory	184
8.10. Teoretické příklady k metrickým prostorům	190
Kapitola 9. Funkce více proměnných	215
9.1. Parciální derivace a totální diferenciál	215
9.2. Derivace vektorových funkcí	227
9.3. Derivace vyšších řádů	235
9.4. Věty o implicitně zadaných funkcích	247

9.5.	Lokální extrémů funkce více proměnných	254
9.6.	Regulární zobrazení	257
9.7.	Teoretické příklady	258
9.8.	Počtení příklady k funkcím více proměnných	263
9.9.	Počtení příklady k metrickým prostorům	302
Kapitola 10.	Mocninné řady	305
10.1.	Základní vlastnosti	305
10.2.	Derivace mocninné řady	307
10.3.	Abelova věta	312
10.4.	Teoretické příklady na mocninné řady	316
10.5.	Počtení příklady na mocninné řady	318
Kapitola 11.	Stejněměrná konvergence posloupností a řad funkcí	327
11.1.	Stejněměrná konvergence posloupností funkcí	327
11.2.	Weierstrassova věta	335
11.3.	Stejněměrná konvergence řad funkcí	339
11.4.	Teoretické příklady ke stejnoměrné konvergenci	345
11.5.	Počtení příklady ke stejnoměrné konvergenci	352
Kapitola 12.	Diferenciální rovnice	369
12.1.	Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými	369
12.2.	Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	375
12.3.	Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty	376
12.4.	Soustavy diferenciálních rovnic	384
12.5.	Soustavy lineárních diferenciálních rovnic	396
12.6.	Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty	399
12.7.	Počtení příklady na diferenciální rovnice	403
Kapitola 13.	Křivkový a plošný integrál	423
13.1.	Hausdorffovy míry	423
13.2.	Křivky, plochy a jejich orientace	437
13.3.	Gaussova, Greenova a Stokesova věta	445
13.4.	Hlavní věta teorie pole	459
13.5.	Teoretické příklady k plošnému a křivkovému integrálu	462
13.6.	Počtení příklady	465
Kapitola 14.	Absolutně spojitá funkce a funkce s konečnou variací	473
14.1.	Přehled výsledků z teorie míry a integrálu	473
14.2.	Derivace monotónní funkce	473
14.3.	Funkce s konečnou variací	477
14.4.	Absolutně spojitá funkce	479

Kapitola 15. Fourierovy řady	487
15.1. Luzinova věta a její důsledky	487
15.2. Základní pojmy Fourierových řad	489
15.3. Cesàrovska sčítatelnost Fourierových řad	493
15.4. Bodová konvergence Fourierových řad	499
15.5. Fourierovy řady v Hilbertových prostorech	503
15.6. Teoretické příklady k Fourierovým řadám	510
15.7. Početní příklady k Fourierovým řadám	514
Dodatek A. Teorie množin	523
A.1. Axiomy teorie množin	523
A.2. Množinové operace	525
A.3. Relace ekvivalence	527
Dodatek B. Konstrukce číselných oborů	531
B.1. Základní vlastnosti operací	531
B.2. Přirozená čísla	532
B.3. Celá čísla	539
B.4. Racionální čísla	542
B.5. Reálná čísla	543
B.6. Komplexní čísla	555
Literatura	557

Integrál

V této kapitole budeme studovat tři důležité pojmy: primitivní funkce, Riemannův integrál a Newtonův integrál. Zavedení Riemannova integrálu je motivováno geometrickou úlohou nalézt obsah dané množiny. Pojem primitivní funkce pak poskytuje efektivní nástroj k výpočtu Riemannova integrálu v cele řadě případů. Oba pojmy pak přirozeně vedou k definici Newtonova integrálu, který je odlišný od Riemannova a v některých situacích je vhodnější než Riemannův. Závěr kapitoly bude věnován aplikacím určitého integrálu, jakými jsou například výpočet délky křivky, výpočet objemu a povrchu rotačního tělesa, integrální kritérium konvergence řad nebo tvar zbytku Taylorova polynomu.

7.1. Primitivní funkce

V tomto oddílu se budeme zabývat úlohou, která je v jistém smyslu opačná k derivování. Budeme k zadané funkci f hledat funkci F takovou, že její derivace je f . Jak uvidíme, tento problém je zpravidla komplikovanější než úloha nalézt derivaci zadané funkce.

7.1.1. Definice. Necht I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ je **primitivní funkce** k funkci f na I , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

7.1.2. (a) Necht F je primitivní funkce k funkci f na neprázdnom otevřeném intervalu I . Potom F je na I spojitá, neboť má dle definice v každém bodě I vlastní derivaci.

(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci (vizte 7.1.24).

(c) Primitivní funkce není určena jednoznačně. Je-li F primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I a $c \in \mathbb{R}$, potom je funkce $x \mapsto F(x) + c$, $x \in I$, také primitivní funkcí k f na I .

(d) Hledání primitivní funkce nazýváme *integrací* a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

7.1.3. Úmluva (konstanta versus konstantní funkce). Necht M je množina. Mezi konstantou $c \in \mathbb{R}$ a konstantní funkcí $\varphi(x) = c$, $x \in M$ je rozdíl, neboť c je reálné číslo a φ je relace, neboli podmnožina $M \times \mathbb{R}$. Pro zjednodušení značení budeme

φ značit také symbolem c . Máme-li například funkci $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, pak funkcí $f + c$ rozumíme funkci $x \mapsto f(x) + c, x \in M$. Z kontextu bude vždy zřejmé, který z významů máme na mysli.

7.1.4. Věta. Necht I je otevřený interval, $f, F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce, přičemž F a G jsou primitivní funkce k f na I . Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F = G + c$.

Důkaz. Definujme funkci $H: I \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $H = F - G$. Potom $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pro každé $x \in I$. Podle Věty 5.2.8 je tedy H konstantní na I . Odtud plyne dokazované tvrzení. ■

7.1.5. Necht funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F . Ze 7.1.2(c) a předchozí věty plyne, že libovolnou primitivní funkci k funkci f na I získáme z primitivní funkce F přičtením vhodné konstantní funkce.

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I označujeme symbolem

$$\int f(x) dx \quad \text{nebo} \quad \int f.$$

Symbol I pro interval, na němž uvažujeme primitivní funkce, sice není součástí právě uvedených symbolů, ale z kontextu bude vždy zřejmé, na kterém intervalu pracujeme.

Jednotlivé části symbolu $\int f(x) dx$ jsou znak **integrálu** $\int$, **integrand** f , tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci, a symbol dx označující proměnnou, vzhledem k níž integrujeme. Symbol dx uvažovaný samostatně nemá v této kapitole žádný matematický význam a nelze s ním algebraicky manipulovat.

7.1.6 (sčítání množin a jejich násobení reálným číslem). Necht V je reálný vektorový prostor (vizte [4]), $A, B \subset V$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom definujeme množiny $A + B$ a cA předpisy

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\} \quad \text{a} \quad cA = \{ca; a \in A\}.$$

Sčítání množin je komutativní i asociativní, pro každé $A, B, C \subset V$ platí $A + B = B + A$ a $(A + B) + C = A + (B + C)$. Jestliže $v \in V$, potom symbolem $v + A$ značíme množinu $\{v\} + A$.

7.1.7 (funkce jako vektorový prostor). Necht I je otevřený interval. Množinu všech funkcí definovaných na I označíme jako $\mathcal{F}(I)$. Na $\mathcal{F}(I)$ budeme uvažovat operace sčítání a násobení, které jsou definovány obvyklým způsobem (vizte 1.6.20). Spolu s těmito operacemi tvoří $\mathcal{F}(I)$ reálný vektorový prostor. Množinu všech konstantních funkcí na I označíme $\text{konst}(I)$.

7.1.8. (a) Necht I je otevřený interval, $A \subset \mathcal{F}(I)$ a $F \in \mathcal{F}(I)$. Pokud platí $A = F + \text{konst}(I)$, pak budeme psát

$$A \stackrel{c}{=} F \quad \text{na } I. \quad (7.1)$$

Na levé straně vztahu (7.1) stojí *množina* funkcí, zatímco na pravé straně stojí *funkce* F . Vztah $\stackrel{c}{=}$ tedy není rovností v obvyklém smyslu slova (například není symetrický) a čteme jej jako *rovnost až na konstantní funkci*.

(b) Necht funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F . V souladu s bodem (a) budeme pro popis množiny všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I používat značení

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I, \quad \text{nebo} \quad \int f \stackrel{c}{=} F \quad \text{na } I, \quad (7.2)$$

které znamená, že pro libovolnou primitivní funkci G k funkci f na intervalu I existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G = F + c$ na intervalu I . Zopakujme, že na levé straně vztahu (7.2) stojí množina všech primitivních funkcí k funkci f , zatímco na pravé straně stojí libovolný reprezentant této množiny, tedy funkce F , jedna z primitivních funkcí k funkci f na I .

V této kapitole budeme používat právě zavedené značení a operace z paragrafu 7.1.6 pro množiny tvaru $\int f$. Uvedené operace s množinami nesdílejí všechny obvyklé vlastnosti sčítání vektorů a jejich násobení reálným číslem, proto je při práci s nimi třeba jisté opatrnosti. Základní pravidla jsou obsažena ve Větech 7.1.9–7.1.11.

7.1.9. Věta. Necht f, H jsou funkce na otevřeném intervalu I a f má na I primitivní funkci F . Potom platí

$$H + \int f \stackrel{c}{=} H + F \quad \text{na } I.$$

Důkaz. Podle předpokladu platí $\int f = F + \text{konst}(I)$, a proto také

$$H + \int f = H + F + \text{konst}(I),$$

neboli $H + \int f \stackrel{c}{=} H + F$. ■

7.1.10. Věta. Necht f, g, H jsou funkce na otevřeném intervalu I a f má na I primitivní funkci. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Platí

$$\int (f + g) \stackrel{c}{=} H \quad \text{na } I. \quad (7.3)$$

(ii) Funkce g má primitivní funkci na I a platí

$$\int f = H - \int g \quad \text{na } I. \quad (7.4)$$

Důkaz. Necht F je primitivní funkce k f na intervalu I .

(i) $\Rightarrow$ (ii) Na I pak platí $(H - F)' = f + g - f = g$, a tedy g má primitivní funkci na I . Označme ji symbolem G . Dokážeme rovnost (7.4). Necht $L \in \int f$. Potom platí $(H - L)' = f + g - f = g$, a tedy

$$L = H - (H - L) \in H - \int g.$$

Pro opačnou inkluzi předpokládejme, že $L \in H - \int g$. Pak nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že $L = H - (G + c)$ na I . Potom máme

$$L' = H' - (G + c)' = f + g - g = f.$$

Platí tedy $L \in \int f$ na I .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Necht G je primitivní funkce ke g na intervalu I . Podle předpokladu nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že platí $F = H - (G + c)$ na I . Potom $F + G = H - c$ na I , a tedy $\int (f + g) \stackrel{c}{=} H$ na I . ■

7.1.11. Věta. Necht $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a funkce f a g mají na otevřeném intervalu I primitivní funkce. Pak mají funkce αf a $f + g$ na I primitivní funkci na I a platí

$$\int (f + g) = \int f + \int g, \quad (7.5)$$

$$\int \alpha f = \alpha \int f. \quad (7.6)$$

Důkaz. Necht F a G jsou po řadě primitivní funkce k funkcím f a g na intervalu I . Podle Věty 5.1.17 pro každé $x \in I$ platí

$$\begin{aligned} (F + G)'(x) &= F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) \quad \text{a} \\ (\alpha F)'(x) &= \alpha F'(x) = \alpha f(x). \end{aligned}$$

Funkce $f + g$ a αf tedy mají na I primitivní funkce. Zbývá dokázat uvedené rovnosti.

Rovnost (7.5). Vezměme $H \in \int (f + g)$. Potom nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$H = (F + G) + c = F + (G + c),$$

a tedy $H \in \int f + \int g$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Vezměme $H \in \int f + \int g$. Pak nalezneme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$H = (F + c_1) + (G + c_2) = (F + G) + (c_1 + c_2),$$

a tedy $H \in \int (f + g)$. Odtud plyne dokazovaná rovnost.

Rovnost (7.6). Vezměme $H \in \int \alpha f$. Potom nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$H = \alpha F + c = \alpha \left(H + \frac{c}{\alpha} \right),$$

a tedy $H \in \alpha \int f$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Vezměme $H \in \alpha \int f$. Pak nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že $H = \alpha(F + c) = \alpha F + \alpha c$, a tedy $H \in \alpha \int f$. ■

7.1.12. Pokud $\alpha = 0$, pak (7.6) neplatí, neboť na levé straně je množina $\text{konst}(I)$ a na pravé je jednoprvková množina obsahující konstantní nulovou funkci na I .

7.1.13 (tabulkové integrály). O správnosti následujících vzorců se lze přesvědčit derivováním:

$$\int x^n dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{pro } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0; x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty) \text{ pro } n \in \mathbb{Z}, n < -1,$$

$$\int x^\alpha dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \in (0, \infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{1}{x} dx \stackrel{c}{=} \log |x|, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty),$$

$$\int e^x dx \stackrel{c}{=} e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \sin x dx \stackrel{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \cos x dx \stackrel{c}{=} \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{cotg} x, \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{c}{=} \arcsin x, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{c}{=} \arccos x, \quad x \in (-1, 1).$$

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu (vizte Důsledek 7.2.29(a)).

7.1.14. Věta. Necht I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom má f na I primitivní funkci.

Integrace per partes.

7.1.15. Věta (integrace per partes). Necht funkce f a g mají na otevřeném intervalu I po řadě primitivní funkce F a G a f je spojitá na I . Pak platí

$$\int fG = FG - \int Fg \quad \text{na } I. \quad (7.7)$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I dle 7.1.2(a), takže i funkce fG je spojitá na I , a má tedy podle Věty 7.1.14 primitivní funkci na I . Podle Věty 5.1.17(a) platí

$$\int (fG + Fg) \stackrel{c}{=} FG \quad \text{na } I.$$

Díky Větě 7.1.10 dostáváme (7.7). ■

7.1.16. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $\log$ na $(0, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 7.1.15 položíme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ a $G(x) = \log x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= \int 1 \cdot \log x \, dx = \int f(x)G(x) \, dx \\ &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x) \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx \stackrel{c}{=} x(\log x - 1), \quad x \in (0, \infty), \end{aligned}$$

přičemž jsem v závěru výpočtu užili Větu 7.1.9. ♣

7.1.17. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $x \mapsto xe^x$ na $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 7.1.15 položíme $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int xe^x \, dx &= \int e^x x \, dx = \int f(x)G(x) \, dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) \, dx \\ &= e^x x - \int e^x \, dx \stackrel{c}{=} e^x(x - 1), \quad x \in (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

přičemž jsem v závěru výpočtu užili Větu 7.1.9. ♣

7.1.18. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Platí tedy

$$I_1 \stackrel{c}{=} \arctg x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctg x, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z Věty 7.1.14 plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Z Věty 7.1.15 dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx = x \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x(-n) \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}. \end{aligned}$$

Obě strany rovnosti sečteme s množinami $-I_n$ a $2nI_{n+1}$ a díky Větě 7.1.11(a) obdržíme

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n.$$

z které již požadovaný závěr plyne podle Věty 7.1.11(b). ♣

Následující příklad ukazuje, že v některých případech při hledání primitivní funkce metodou per partes musíme vyřešit funkcionální rovnici.

7.1.19. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $x \mapsto e^x \sin x$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Z Věty 7.1.14 plyne, že funkce $x \mapsto e^x \sin x$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Dvojím použitím Věty 7.1.15 dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ &= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Z této rovnosti a Věty 7.1.10 již plyne

$$\int e^x \sin x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

♣

7.1.20. Použijme metodu per partes pro výpočet primitivní funkce k funkci tg na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx = (-\cos x) \frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x) \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx \\ &= -1 + \int \operatorname{tg} x \, dx, \quad x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi). \end{aligned}$$

Tato rovnost by mohla svádět k odvození identity $0 = -1$. Správné použití Věty 7.1.10 však dává

$$\int 0 \, dx \stackrel{c}{=} -1, \quad x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi),$$

což žádný spor nepředstavuje.

Věty o substituci.

7.1.21. Definice. Necht $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu **Darbouxovu¹ vlastnost**, jestliže pro každý interval $J \subset I$ je množina $f(J)$ interval.

7.1.22. Pokud je funkce f spojitá na intervalu I , potom na něm má podle Věty 4.3.8 Darbouxovu vlastnost. Následující věta zobecňuje tento výsledek.

¹Jean Gaston Darboux (1842–1917)

7.1.23. Věta (Darboux). Necht f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom má f Darbouxovu vlastnost na I .

Důkaz. Necht $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Ověříme, že $z \in f(J)$. Pak je $f(J)$ interval podle Lemmatu 1.6.27.

Necht tedy F je primitivní k funkci f na I . Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak je funkce H spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí $H'(x) = f(x) - z$, tj. H má na I vlastní derivaci. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. V opačném případě bychom postupovali obdobně. S pomocí Věty 4.3.11 nalezneme bod minima funkce H na intervalu $[x_1, x_2]$, který označíme x_0 . Jelikož $H'(x_1) = f(x_1) - z < 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1, \delta): H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$. Obdobně odvodíme z faktu $H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$. Máme tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$, a proto platí $H'(x_0) = 0$ podle Věty 5.1.31. Odtud plyne $f(x_0) = z$. ■

7.1.24. Z Věty 7.1.23 plyne, že funkce sign nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci.

7.1.25. Věta (první věta o substituci). Necht $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) , $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24) platí

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

V následujících příkladech použijeme právě dokázanou první větu o substituci.

7.1.26. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $t \mapsto \sin^4 t \cos t$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Položme $a = -\infty$, $b = \infty$, $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$, $f(x) = x^4$, $x \in (a, b)$, a $\varphi(t) = \sin t$, $t \in (\alpha, \beta)$. Potom platí

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} x^5, \quad x \in (a, b).$$

Tedy dle první věty o substituci (Věta 7.1.25) platí

$$\int \sin^4 t \cdot \cos t dt = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} \sin^5 t, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

♣

7.1.27. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2+5t^2}}$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Položme $a = 0$, $b = \infty$, $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$, $f(x) = \frac{1}{10} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (a, b)$, a $\varphi(t) = 5 + 2t^2$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Použijeme substituci „ $x = 2 + 5t^2$ “, tj. funkci $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $\varphi(t) = 2 + 5t^2$, neboť si všimneme, že $\varphi'(t) = 10t$, a tedy

$$\int \frac{t}{\sqrt{2 + 5t^2}} dt = \frac{1}{10} \int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} dt.$$

Podle Věty 7.1.25 je třeba vypočítat

$$\frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} \sqrt{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

♣

7.1.28. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \frac{1}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$.

Řešení. Funkce g je spojitá na svém definičním oboru $(-2/3, 4/3)$, a tedy k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní. Nejprve si funkci g upravíme následujícím způsobem:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - (3x - 1)^2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x-1}{3}\right)^2}}.$$

Počítejme tedy

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1/3)^2}} dx.$$

Tento integrál připomíná integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \stackrel{c}{=} \arcsin t.$$

Užijeme Větu 7.1.25. Roli funkce φ bude plnit funkce $x \mapsto x - 1/3$, jejíž derivace je rovna 1. Dostáváme tak

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1/3)^2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}} dx.$$

Podle Věty 7.1.25 stačí spočítat

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \arcsin t, \quad t \in (-1, 1),$$

takže

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1/3)^2}} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \arcsin(x - 1/3), \quad x \in (-2/3, 4/3).$$

♣

7.1.29. Chceme-li použít Větu 7.1.25 při výpočtu primitivní funkce k funkci g , je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Často postupujeme tak, že nejprve zvolíme funkci φ a k ní pak určíme funkci f . V Příkladech 7.1.27 a 7.1.28 jsme výraz $\varphi'(x) dx$ nahradili výrazem dt a zbývající část integrandu již byla ve tvaru $f \circ \varphi$. Formálně jsme tedy provedli substituci $\varphi(t) = x$ a $\varphi'(t) dt = dx$. Poslední vztah, kterému nedáváme žádný matematický význam, je užitečnou pomůckou při výpočtech.

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz x nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(t)$ a výraz dx výrazem $(\varphi^{-1})'(t) dt$, tak obdržíme výraz $\int g(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) dt$. Integrand je potom hledanou funkcí f . Platí totiž

$$f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi^{-1}(\varphi(x))) \cdot (\varphi^{-1})'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(x),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27).

7.1.30. Věta (druhá věta o substituci). Necht $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Necht f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 7.1.23 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.5.7 je buď φ klesající na (α, β) , nebo je φ rostoucí na (α, β) . V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned} (G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24) a větu o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27). ■

V následujícím příkladu použijeme druhou větu o substituci, kterou jsme právě dokázali.

7.1.31. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$.

Řešení. Položme $(a, b) = (-1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$$\varphi(t) = \sin t \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Tedy podle druhé věty o substituci (Věta 7.1.30) platí

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x), \quad x \in (-1, 1).$$

♣

Uvedeme nyní ještě jednu užitečnou variantu věty o substituci.

7.1.32. Věta. Necht' $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $\varphi'(x)$ vlastní a nenulová. Potom $\varphi((a, b))$ je interval, který označíme (α, β) . Definujeme funkci $g: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)$. Necht' G je primitivní funkce k g na (α, β) . Potom $G \circ \varphi$ je primitivní funkce k f na (a, b) .

Důkaz. Funkce φ má na (a, b) vlastní derivaci, tudíž je spojitá, a tedy má Darbouxovu vlastnost. Odtud plyne, že $\varphi((a, b))$ je interval. Podle Věty 7.1.23 platí buď $\varphi'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, nebo $\varphi'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Tedy podle Věty 5.5.7 je buď φ klesající na (a, b) , nebo je φ rostoucí na (a, b) . V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$. Odtud plyne, že funkce g je dobře definovaná. Potom pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\begin{aligned} (G \circ \varphi)'(x) &= (g \circ \varphi)(x)\varphi'(x) = f(x)(\varphi^{-1})'(\varphi(x))\varphi'(x) \\ &= \frac{f(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))}\varphi'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. ■

7.1.33. Věta 7.1.14 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci. Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí. Tuto vlastnost má například funkce e^{-x^2} , důkaz však není snadný. Ukážeme nyní některé druhy funkcí, kde tato potíž nevzniká. Základní třídou takových funkcí jsou funkce racionální. Ukážeme také ještě některé další typy funkcí, jejichž integraci je možné převést na integraci racionálních funkcí pomocí vhodné substituce.

Integrace racionálních funkcí.

7.1.34. Definice. **Racionální funkcí** budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q .

7.1.35. Nejprve uvedeme některé poznatky z algebry. Všimněme si, že máme-li polynom

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

lze za proměnnou x dosazovat i komplexní čísla, přičemž hodnoty pak budou opět komplexní čísla. Každý polynom tedy můžeme chápat i jako zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Ve zbytku tohoto oddílu budeme uvažovat i polynomy s komplexními koeficienty, tj. $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Podobně jako v reálném případě, je takový polynom roven nule pro každé $x \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou všechny jeho koeficienty nulové. Odtud plyne, že můžeme definovat stupeň takového polynomu stejně jako v reálném případě a budeme jej značit symbolem $\text{st } P$.

7.1.36. Lemma (o dělení polynomů). Necht P a Q jsou dva polynomy (obecně s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:

- $\text{st } Z < \text{st } Q$,
- $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

7.1.37. Důsledek. Je-li P polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$ jeho **kořen** (tj. $P(\lambda) = 0$), pak existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Důkaz. Položme $Q(x) = x - \lambda$. Pak dle Lemmatu 7.1.36 existují polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$, kde $\text{st } Z < \text{st } Q = 1$. Polynom Z je tedy konstantní. Platí $0 = P(\lambda) = R(\lambda)(\lambda - \lambda) + Z(\lambda)$, tedy $Z(\lambda) = 0$. Z toho plyne, že Z je nulový. ■

7.1.38. Věta (rozklad na kořenové činitele). Necht $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{C}. \quad (7.8)$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, neboť $P(x) = a_1(x - (-\frac{a_0}{a_1}))$ a stačí položit $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. Necht tedy $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a tvrzení platí pro všechny polynomy stupně nejvýše $n - 1$. Podle základní věty algebry (Věta ??) existuje kořen $x_n \in \mathbb{C}$ polynomu P . Dle Důsledku 7.1.37 je $P(x) = (x - x_n)R(x)$ pro nějaký polynom R . Všimněme si, že $\text{st } R = n - 1$ a navíc koeficient u x^{n-1} v polynomu R je roven a_n . Podle indukčního předpokladu tedy existuje rozklad $R(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$. Tím dostaneme i požadovaný rozklad polynomu P . ■

7.1.39. (a) Pro každý polynom je rozklad (7.8) určený jednoznačně až na pořadí činitelů. Mezi čísla $x_1, \dots, x_n$ se vyskytují všechny kořeny polynomu P . Odtud plyne, že polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ má nejvýše n různých kořenů.

(b) Tvrzení Důsledku 7.1.37 lze ještě dále zesílit následujícím způsobem. Je-li P nenulový polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$, pak existuje právě jedno $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a jednoznačně určený polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$ a $R(\lambda) \neq 0$.

Platí-li totiž $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro jistý polynom R a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak je nutně polynom R nenulový a $k \leq \text{st } P$. Můžeme tedy nalézt největší $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro které existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$. Z Důsledku 7.1.37 plyne, že $R(\lambda) \neq 0$, jinak bychom dostali spor s maximalitou k .

Dokažme jednoznačnost. Předpokládejme, že platí $P(x) = (x - \lambda)^l \tilde{R}(x)$ pro nějaké $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a polynom $\tilde{R}$ splňující $\tilde{R}(\lambda) \neq 0$. Všimněme si, že z volby k plyne $l \leq k$. Pak dostáváme $(x - \lambda)^{k-l} R(x) = \tilde{R}(x)$ pro $x \neq \lambda$ a ze spojitosti plyne, že tento vztah je splněn i pro $x = \lambda$. Musí být $k = l$, jinak dosazením $x = \lambda$ dostáváme $\tilde{R}(\lambda) = 0$, což je spor. Potom také $R = \tilde{R}$, čímž je důkaz proveden.

7.1.40. Definice. Necht P je nenulový polynom, $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že číslo λ je **kořen násobnosti** k polynomu P , jestliže existuje polynom R splňující $R(\lambda) \neq 0$ a $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

7.1.41. Poznámka. Z poznámky před definicí plyne, že násobnost kořene je určená jednoznačně a je rovna počtu výskytů čísla λ v n -tici $x_1, x_2, \dots, x_n$ z Věty 7.1.38.

7.1.42. Věta. Necht P je polynom s reálnými koeficienty a $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen polynomu P násobnosti k . Pak i komplexně sdružené číslo $\bar{\lambda}$ je kořen polynomu P násobnosti k .

Důkaz. ■

7.1.43. Věta. Necht $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l$ taková, že

- $P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- žádné dva z polynomů $x - x_1, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,
- polynomy $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.

Důkaz. Necht $x_1, \dots, x_k$ jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $p_1, \dots, p_k$ a $z_1, \dots, z_l$ jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Potom jsou též podle Věty 7.1.42 čísla $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l$ kořeny polynomu P s násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Můžeme tedy psát

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x - z_1)^{q_1} (x - \bar{z}_1)^{q_1} \dots (x - z_l)^{q_l} (x - \bar{z}_l)^{q_l}.$$

Dále platí $(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 + (-z_i - \bar{z}_i)x + z_i \bar{z}_i$. Obě čísla $-z_i - \bar{z}_i, z_i \bar{z}_i$ jsou reálná, a proto můžeme položit $\alpha_i = -z_i - \bar{z}_i$ a $\beta_i = z_i \bar{z}_i$. Snadno ověříme, že požadované vlastnosti jsou splněny. ■

7.1.44. Věta (rozklad na parciální zlomky). Necht P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\text{st } P < \text{st } Q$ a necht

$$Q(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 7.1.43. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že

platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že Q je *monický*, tj. jeho vedoucí koeficient je roven 1.

1. Nejprve ukážeme, že tvrzení platí pro případ, kdy $Q(x) = (x-x_1)^n$ nebo $Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^n$. Je-li $n = 1$, je výraz $\frac{P}{Q}$ v požadovaném tvaru.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Necht' nyní Q je tvaru $Q(x) = (x-x_1)^n$. Pak existují polynom A a $r \in \mathbb{R}$ takové, že $P(x) = A(x)(x-x_1) + r$. Tedy

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^n} = \frac{A(x)}{(x-x_1)^{n-1}} + \frac{r}{(x-x_1)^n}.$$

Na první člen vpravo aplikujeme indukční předpoklad a druhý je již v požadovaném tvaru.

Podobně postupujeme v případě $Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^n$. Předpokládáme-li platnost tvrzení pro každé $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, píšeme $P(x) = A(x)(x^2 + \alpha x + \beta) + R(x)$, kde A je polynom a R je polynom nejvýše stupně 1. Pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}} + \frac{R(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}.$$

Opět lze na první člen použít indukční předpoklad, zatímco druhý je v požadovaném tvaru.

Tím je tvrzení dokázáno v případě, kdy Q je polynom typu $(x-x_1)^n$ nebo $(x^2 + \alpha x + \beta)^n$, kde kvadratický člen je nerozložitelný.

2. Dokazujeme nyní tvrzení pro případ, kdy Q je součinem n různých typů nerozložitelných prvočinitelů. Pro případ $n = 1$ bylo tvrzení dokázáno v části 1.

Předpokládejme nyní jeho platnost pro všechna $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Necht' $Q = GH$ je polynom stupně n , kde G i H jsou monické, nesdílejí žádný netriviální společný dělitele a $\text{st } P < n$. Tedy $\text{st } P < \text{st } G + \text{st } H = n$ a $\min\{\text{st } G, \text{st } H\} \geq 1$. Jelikož nemají G a H žádného netriviálního společného dělitele, dle Lemmatu ?? existují polynomy C a D takové, že $1 = CG + DH$. Pak C nemá společný násobek s H a D nemá společný násobek s G . Pak máme

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(CG + DH)}{Q} = \frac{PCG}{Q} + \frac{PDH}{Q} = \frac{PC}{H} + \frac{PD}{G}.$$

Dostali jsme tak součet dvou výrazů, z nichž každý má ve jmenovateli méně než n různých nerozložitelných prvočinitelů. V případě, kdy $\text{st } PC < \text{st } H$ a $\text{st } PD <$

st G , lze aplikovat indukční předpoklad a důkaz ukončit. V opačném případě předpokládejme nejprve, že $\text{st } PC \geq \text{st } H$. Pak $PC = GH + R$ pro nějaké polynomy Q a R , kde $\text{st } R < \text{st } H$. To implikuje, že R nesdílí s H žádného společného dělitele, neboť v opačném případě by společný dělitel H a R byl též dělitelem P (neboť C nemá s H společného dělitele), což by byl spor s podmínkou (vii).

Máme tak

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(CG + DH)}{Q} = \frac{(QH + R)G + DHP}{Q} = \frac{RG + (Q + DF)H}{Q}.$$

Jako výše díky podmínce (vii) vidíme, že $Q + DF$ nemá společného dělitele s G . Pak

$$\text{st } RG < \text{st } H + \text{st } G \quad \text{a} \quad \text{st } P < \text{st } H + \text{st } G,$$

a tedy též

$$\text{st}(Q + DF) < \text{st } H + \text{st } G.$$

Tedy $\text{st}(Q + DF) < \text{st } G$ a $\text{st } R < \text{st } H$. Dostáváme tak

$$\frac{P}{Q} = \frac{RG + (Q + DF)H}{Q} = \frac{R}{H} + \frac{Q + DF}{G},$$

přičemž na oba zlomky na pravé straně již lze použít indukční předpoklad.

Důkaz je tak dokončen. ■

7.1.45 (postup při hledání primitivní funkce k funkci racionální). Mějme polynomy P a Q . Máme-li integrovat racionální funkci P/Q , pak postupujeme takto:

V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q , vydělíme polynom P polynomem Q (Lemma 7.1.36) a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q . Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R . Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\text{st } P < \text{st } Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q , resp. P/Q , kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

Nyní si ukážeme jak na to. Parciální zlomek odpovídající reálnému kořeni a integrujeme následovně:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, \infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log |x-a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, \infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx &= \frac{B}{2} \underbrace{\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_1} + \\ &+ \left(C - \frac{B\alpha}{2} \right) \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_2}. \end{aligned}$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2 + \alpha x + \beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases} \\ I_2 &= \int \frac{1}{((x + \alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4)^q} dx = \\ &= \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^q} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x + \alpha/2}{\sqrt{\beta - \alpha^2/4}} \right)^2 + 1 \right)^q} dx. \end{aligned}$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $t = \frac{x + \alpha/2}{\sqrt{\beta - \alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1 + t^2)^q}.$$

Integraci této funkce jsme si ukázali v Příkladu 7.1.18.

7.1.46. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x^2 + 2x - 3)}.$$

Řešení. Nejprve určíme definiční obor funkce f . Výraz $x^2 + 2x + 2$ je vždy kladný, $x^2 + 2x - 3$ lze rozložit a platí $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Odtud je vidět, že $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Funkce f je spojitá na celém D_f . Má tedy primitivní funkci na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, \infty)$.

Protože polynom v čitateli je menšího stupně, než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky. Rozklad bude mít tvar

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1)(x + 3)} &= \\ &= \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{E}{x - 1} + \frac{F}{x + 3}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$\begin{aligned} x = & (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3) + \\ & + (Cx + D)(x - 1)(x + 3) + \\ & + E(x^2 + 2x + 2)^2(x + 3) + F(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1), \end{aligned} \quad (7.10)$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Polynomy jsou však spojité na $\mathbb{R}$, a proto vztah (7.10) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (7.10).

$$\begin{aligned} x^5: & \quad 0 = A + E + F, \\ x^4: & \quad 0 = 4A + B + 7E + 3F, \\ x^3: & \quad 0 = 3A + 4B + C + 20E + 4F, \\ x^2: & \quad 0 = -2A + 3B + 2C + D + 32E, \\ x^1: & \quad 1 = -6A - 2B - 3C + 2D + 28E - 4F, \\ x^0: & \quad 0 = -6B - 3D + 12E - 4F. \end{aligned}$$

Dostali jsme tak soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých.

b) Dosadíme do (7.10) šest různých čísel za x a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Nejvýhodnější je dosazovat taková čísla, pro která se některé sčítance rovnají 0 (tj. reálné kořeny jmenovatele původního zlomku – v našem případě čísla -3 a 1).

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (7.10) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a). Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$. Tím máme určeny koeficienty v rozkladu (7.9), který má tedy tvar

$$f(x) = -\frac{1}{25} \cdot \frac{x}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{x + 3}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx \stackrel{c}{=} \\
&\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \arctg(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{1}{((x + 1)^2 + 1)^2} dx \stackrel{c}{=} \\
&\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \arctg(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{1}{x - 1} dx &\stackrel{c}{=} \log|x - 1|, \quad x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, \infty), \\
\int \frac{1}{x + 3} dx &\stackrel{c}{=} \log|x + 3|, \quad x \in (-\infty, -3) \text{ a } x \in (-3, \infty).
\end{aligned}$$

Na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, \infty)$ je tak primitivní funkcí k funkci f kterákoliv z funkcí

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{50} \log(x^2 + 2x + 2) + \frac{7}{50} \arctg(x + 1) + \frac{1}{10} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \\
&+ \frac{1}{100} \log|x - 1| + \frac{3}{100} \log|x + 3| + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

♣

7.1.47. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$.

Řešení. Standardním postupem (dělením polynomů) spočteme

$$\frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = x^3 + 2 + 3 \frac{x + 1}{x^2 - 1} = x^3 + 2 + 3 \frac{1}{x - 1}.$$

Tedy

$$\int \frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} dx \stackrel{c}{=} \frac{x^4}{4} + 2x + 3 \log|x - 1|$$

na $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a na $(1, \infty)$.

♣

7.1.48. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x^2 + x + 1)}$.

Řešení. Obecný rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1},$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Vynásobíme obě strany výrazem $(x+1)^2(x^2+x+1)$ a obdržíme $x^2+1 = x^3(B+C) + x^2(A+2B+2C+D) + x(A+2B+2C+2D) + (A+B+D)$.

Dva polynomy se rovnají právě tehdy, když se rovnají všechny jejich koeficienty. Tedy dostaneme tedy soustavu čtyř lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= B + C \\ 1 &= A + 2B + 2C + D \\ 0 &= A + 2B + C + 2D \\ 1 &= A + B + D. \end{aligned}$$

Jejím řešením je

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -1.$$

Tedy

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Máme

$$\int \frac{2}{(x+1)^2} dx \stackrel{c}{=} \frac{-2}{x+1} \quad \text{na } (-\infty, -1) \text{ a } (-1, \infty)$$

a

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1} dx.$$

Ten substitucí $t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ převedeme na integrál $\int \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{t^2+1} dt$. Tedy

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} \stackrel{c}{=} \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Dohromady máme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx &\stackrel{c}{=} \frac{-2}{x+1} + \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \\ &\quad \text{na } (-\infty, -1) \text{ a } (-1, \infty). \end{aligned}$$

♣

Trigonometrické substituce.

7.1.49. Definice. Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[u, v] \mapsto \sum_{i,j=0}^n a_{ij} u^i v^j,$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{0, \dots, n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

7.1.50. Označení. Až do konce tohoto oddílu budeme symbolem R značit racionální funkci dvou proměnných.

7.1.51. Definice. Řekneme, že R je **sudá v první souřadnici**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x, y) = R(x, y)$. Analogicky definujeme **lichost v první** a **sudost** a **lichost v druhé souřadnici**.

Funkce R je **sudá**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, -y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x, y) = R(-x, -y)$. Analogicky definujeme lichost funkce R .

7.1.52. Necht R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin t, \cos t) dt, \quad t \in I, \quad (7.11)$$

přičemž integrand je definován na intervalu I . Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít následujících substitucí.

(a) Je-li R lichá ve druhé souřadnici, lze užít substituci $\sin t = x$. Přesněji řečeno: použijeme Větu 7.1.25 pro funkci $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $\varphi(t) = \sin t$. Příslušnou funkci f lze pak volit jako racionální funkci jedné reálné proměnné. Podobné upřesnění je možné doplnit i v následujících bodech (b)-(d).

(b) Je-li R lichá v první souřadnici, lze užít substituci $\cos t = x$.

(c) Je-li R sudá, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$.

(d) Vždy lze použít substituci $\operatorname{tg}(t/2) = x$.

7.1.53. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(t) = \frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t + \cos^4 t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Funkce g je spojitá na $\mathbb{R}$, má tedy na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Označme

$$R(u, v) = \frac{uv}{u^4 + v^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a vidíme, že R je lichá v první i v druhé souřadnici a je také sudá. Pro převod na integraci racionální funkce lze tedy užít jakoukoliv ze substitucí uvedených v 7.1.52.

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočteme nejprve

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \\ \sin t &= 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2}, \\ dt &= \frac{2}{1 + x^2} dx.\end{aligned}$$

Při určení dx jsme použili rovnost $x = 2 \operatorname{arctg} t$ a 7.1.29.

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^4} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{t(1-t^2)(1+t^2)}{16t^4 + (1-t^2)^4} dt.$$

Je vidět, že jsme dosáhli svého cíle. Výsledná racionální funkce je ale komplikovaná a navíc bychom museli ještě překonat potíže spojené s tím, že substituci provádíme pouze pro $x \in (-\pi, \pi)$, popřípadě na intervalu vzniklém posunutím o $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkusme tedy další substituce.

(a) Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci f upravit na tvar

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $dx = \cos t dt$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} dt.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2 - 4u + 2} du = \int \frac{1}{(2u - 1)^2 + 1} du \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2u - 1), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tedy

$$\int g(t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin^2 t - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Substituce $t = \cos x$. Funkci f lze upravit na tvar

$$f(x) = \frac{\cos x}{(1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x} \cdot \sin x.$$

Uvědomíme-li si, že $dt = -\sin x dx$, dostáváme

$$-\int \frac{t}{(1 - t^2)^2 + t^4} dt \stackrel{c}{=} -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Výpočet je zcela analogický výpočtu v předchozím případě.) Primitivní funkci k f je na $\mathbb{R}$ kterákoliv z funkcí

$$-\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cos^2 x - 1) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

(c) Zkusme ještě substituci $t = \operatorname{tg} x$, která je v našem případě rovněž použitelná. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $f(x)$ výrazem $\cos^2 x$ a dostaneme

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Nyní použijeme vztah $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{t}{t^4 + 1} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. My však víme, že funkce f má primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$ (je totiž na $\mathbb{R}$ spojitá). Tuto primitivní funkci můžeme nalézt způsobem, který byl popsán v předchozím příkladu.

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f . Tento nedostatek lze překonat „nalepováním“ v bodech, které jsme museli vynechat. Obdobná situace je při užití substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$ – ta však většinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající. Je tedy lepší – pokud to dovoluje tvar integrované funkce – se jejímu použití vyhnout a použít příslušnou ze zbývajících tří substitucí.

Z výše uvedeného je vidět, že tvar výsledku může podstatně záviset na použité substituci, vždy však jde o funkce, které se liší pouze o konstantu. ♣

7.1.54. Příklad. Určete primitivní funkci k $f(x) = \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x}$.

Řešení. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}$ a má tedy na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Označíme-li

$$R(u, v) = \frac{1}{1 + 3v^2},$$

potom $f(x) = R(\sin x, \cos x)$. Platí $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Lze tedy užít substituci $t = \operatorname{tg} x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Abychom tuto substituci mohli provést, vypočteme

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Dále z rovnosti $x = \operatorname{arctg} t$ dostáváme $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ podle poznámky na straně ???. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1 + 3 \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{4 + t^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podle věty o substituci tedy platí

$$\int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

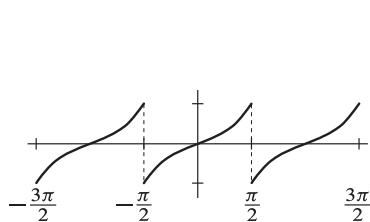
Označíme-li $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right)$, je funkce F primitivní k f na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Každá primitivní funkce G k f na $\mathbb{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $c_k \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Protože G je spojitá a platí rovnosti

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi -} G(x) = \frac{\pi}{4} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi +} G(x) = -\frac{\pi}{4} + c_{k+1},$$

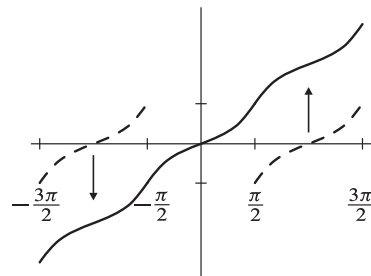
musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{2}$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Odtud plyne $c_k = c_0 + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Každá primitivní funkce k f má tedy tvar

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + c_0 + k\frac{\pi}{2} & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ \frac{\pi}{4} + c_0 + k\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Funkce G vznikla tak, že na každém intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ jsme k funkci F přičetli vhodnou konstantu tak, aby výsledná funkce byla spojitá, vizte obrázky. Tomuto postupu se říká „lepení“.



OBRÁZEK 1.



OBRÁZEK 2.

7.1.55. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}.$$

Řešení. Zadaná trigonometrická funkce je typu (ii)

7.1.56. Věta. Nechtě f, F jsou spojitě funkce na otevřeném intervalu I , $c \in I$ a nechtě $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I .

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z Věty 5.2.9.

7.1.57. Příklad. Spočítejte $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$.

Řešení. Protože $R(a, b) = \frac{1}{1+a^2}$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. V první větě o substituci (Věta 7.1.25) je pak $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ a $(a, b) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zjevně je $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ nenulová na $(-\infty, \infty)$ a $\varphi((-\infty, \infty)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Protože $\operatorname{tg} x = t$, máme

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}.$$

Tedy

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Počítáme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+2t^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Z druhé věty o substituci (Věta 7.1.30) tedy plyne, že

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \quad (7.12)$$

Funkce $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ je ale spojitá na celém $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty 7.1.14 má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci G . Tu najdeme pomocí již nalezené funkce F z (7.12). Protože

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

položíme

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + k \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak G je spojitá funkce a v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí $G'(x) = (1 + \sin^2 x)^{-1}$. V bodech tvaru $k\pi + \frac{\pi}{2}$ tato rovnost platí díky Větě 7.1.56. ♣

Integrály typu $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}})$.

7.1.58. Při integraci funkce $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, kde $q \in \mathbb{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

7.1.59. Věta (Integrály tvaru $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}})$). Necht $q \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$ a $R(x, y)$ je racionální funkcí dvou proměnných. Necht I je otevřený interval obsažený v $\mathcal{D}\left(R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}\right)\right)$. Položíme $\varphi(x) = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}$, $x \in I$. Pak je φ monotónní funkce, $J = \varphi(I)$ je otevřený interval a $t \mapsto R(\varphi^{-1}(t), t)(\varphi^{-1})'(t)$ je racionální

spojitá funkce definovaná na J . Je-li F její primitivní funkce na J , je $F \circ \varphi$ primitivní funkce k $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$ na I .

Důkaz. Zobrazení $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ je ryze monotónní na každém otevřeném intervalu obsaženém v jeho definičním oboru. Vzhledem k monotonii odmocniny pak dostáváme ryzi monotonii funkce $x \mapsto \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$ na každém otevřeném intervalu obsaženém v definičním oboru této funkce. Proto je φ ryze monotónní funkce a její obor hodnot J je otevřený interval (viz Věta 4.3.8). Inverzní funkce $\varphi^{-1}: J \rightarrow I$ je určena jako $\varphi^{-1}(t) = \frac{t^q d - b}{a - t^q c}$, z čehož plyne, že $t \mapsto R(\varphi^{-1}(t), t)(\varphi^{-1})'(t)$ je racionální funkce na J . Fakt, že $F \circ \varphi$ je primitivní k $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$ na I , nyní plyne z Věty 7.1.30. ■

7.1.60. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ je definovaná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a je na nich spojitá. Na nich tedy budeme hledat primitivní funkci. Položme $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Pak

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} = \varphi(t),$$

přičemž $\varphi: (0, 1) \rightarrow (-\infty, -1)$ a $\varphi: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ jsou bijekce s nenulovou derivací

$$\varphi'(t) = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2}.$$

Podle druhé věty o substituci (Věta 7.1.30) dostaneme integrál

$$I = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} t \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = \int \frac{-4t^2}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} dt.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$\frac{4t^2}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} = -\frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t + 1} - \frac{2}{t^2 + 1}.$$

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log|t + 1| - \log|t - 1| - 2 \operatorname{arctg} t, \quad \text{na } (0, 1) \text{ a } (1, \infty).$$

Závěrem dostáváme

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx \stackrel{c}{=} \log \left| \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \text{na } (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty).$$

♣

7.1.61. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{x-1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}$.

Řešení. Funkce je na $D_f = (0, \infty)$ spojitá a má zde tedy primitivní funkci.
Vyskytují-li se v předpisu funkce f výrazy

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$, $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$, pak užijeme substituci $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}$, kde s je nejmenší společný násobek čísel $q_1, \dots, q_n$.

V našem případě máme v předpisu funkce f mocniny $x^{1/2}$ a $x^{2/3}$. Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6. Užijeme tedy substituci $t = x^{1/6}$, $x \in (0, \infty)$. Odtud odvodíme $dx = 6t^5 dt$. Na intervalu $(0, \infty)$ pak hledáme primitivní funkci

$$\int \frac{t^6 - 1}{t^6(t^3 + t^4)} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^6 - 1}{t^5 + t^4} dt.$$

Protože v posledním integrovaném výrazu (je to racionální funkce proměnné t) je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

$$\begin{aligned} (t^6 - 1) : (t^5 + t^4) &= t - 1 + \frac{t^4 - 1}{t^4(t + 1)} = \\ &= t - 1 + \frac{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)}{t^4(t + 1)} = \\ &= t - 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4}. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme integrovat

$$6 \int \frac{t^6 - 1}{t^5 + t^4} dt \stackrel{c}{=} 3t^2 - 6t + 6 \log t + 6 \frac{1}{t} - 3 \frac{1}{t^2} + 2 \frac{1}{t^3}, \quad t \in (0, \infty).$$

Dle věty o substituci je primitivní funkcí k f na $(0, \infty)$ každá funkce tvaru

$$3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \log x + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. ♣

Integrály typu $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt$.

7.1.62. Také integraci funkce $R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechtě tedy $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(t) = at^2 + bt + c$ můžeme pro převod použít některý z následujících postupů.

(a) Pokud má q dvojnásobný reálný kořen α . Pak platí $q(t) = a(t - \alpha)^2$. Funkce g má neprázdný definiční obor, a proto $a > 0$. Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t - \alpha|, \quad t \in \mathbb{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionálních. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2 . Potom „slepíme“ F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I , která bude primitivní ke g na I .

(b) Pokud $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I. \quad (7.13)$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at + b}{2\sqrt{at^2 + bt + c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \quad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1} . Pro každé $x \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-2\sqrt{a}x^2 + 2bx - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}x - b)^2}$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g . Substituce (7.13) se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + x,$$

který se i lépe pamatuje.

(c) Pokud $a < 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2 , přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)} = \sqrt{-a}(t - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I , který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v 7.1.58.

7.1.63. Příklad. Spočítejte $\int \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + t + 1}} dt$.

Řešení. Integrand označíme g . Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém $\mathbb{R}$, použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \quad dt = -2 \frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2} dx.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné x výraz $\sqrt{t^2 + t + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} + x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x - 2)(2x - 1)} dx.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2x^2 - 2x + 2) : (2x^2 - 5x + 2) = 1 + \frac{3x}{(x - 2)(2x - 1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x - 2)(2x - 1)} dx &= \int 1 dx + 2 \int \frac{1}{x - 2} dx - \int \frac{1}{2x - 1} dx \stackrel{c}{=} \\ &\stackrel{c}{=} x + 2 \log |x - 2| - \frac{1}{2} \log |2x - 1| \end{aligned}$$

na intervalech $(\frac{1}{2}, 2)$ a $(2, \infty)$.

Podle Věty 7.1.25) má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + t + 1} - t + 2 \log \left| \sqrt{t^2 + t + 1} - t - 2 \right| \\ - \frac{1}{2} \log \left| 2\sqrt{t^2 + t + 1} - 2t - 1 \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

7.1.64. Příklad. Spočítejte $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$.

Řešení. Použijeme substituci

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + t.$$

Pak

$$x = \frac{1 - t^2}{2t} = \varphi(t)$$

a

$$\varphi'(t) = \frac{1(1 - t^2)}{2t^2}.$$

Pak $\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ a $\varphi : (1, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ jsou bijekce s nenulovou derivací. Tedy počítáme integrál

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{2t} \frac{1+t^2}{2t}} \frac{-(1+t^2)}{2t^2} dt \\ &= \int \frac{-2}{1-t^2} dt = - \left(\int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt \right) \\ &\stackrel{c}{=} -\log|t^2 - 1|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = -\log \left| \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 - 1 \right| \quad \text{na } (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty).$$

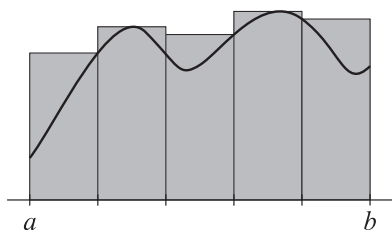
♣

7.2. Riemannův integrál

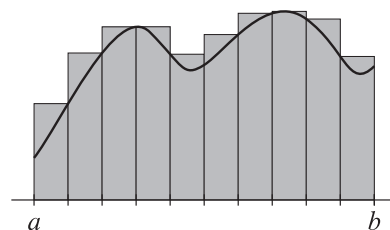
Zavedení Riemannova integrálu je mimo jiné motivováno problémem, jak definovat pojem obsahu i pro komplikovanější množiny v rovině než jsou jednoduché geometrické útvary jako obdélník, trojúhelník, apod.

Mějme tedy omezenou nezápornou funkci f definovanou na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$. Chceme definovat, jakou plochu má obrazec pod grafem funkce f tak, aby to bylo v souladu s tím, jak počítáme plochu u jednoduchých geometrických obrazců.

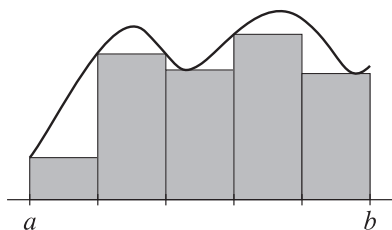
Jednou z možností je aproximovat obrazec pomocí konečných sjednocení obdélníků, jejichž plochu známe, a pak pomocí „limitního přechodu“ dojít k výsledku. Celá myšlenka je patrna z následujících obrázků. V prvních dvou odhadujeme plochu obrazce shora, ve druhých dvou naopak zdola.



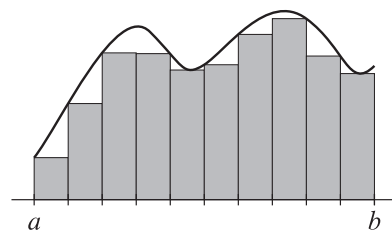
OBRÁZEK 3.



OBRÁZEK 4.



OBRÁZEK 5.



OBRÁZEK 6.

Vyjádřeme tyto intuitivní úvahy matematicky přesnou řečí.

7.2.1. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom **dělením intervalu** $[a, b]$ nazveme každou konečnou posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, pro kterou platí $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Body dělení D nazýváme **dělicími body** D . **Normou dělení** D rozumíme číslo

$$v(D) = \max\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Řekneme, že dělení D' je **jemnější** než D (nebo že D' **zjemňuje** D), pokud všechny dělicí body D jsou obsaženy v D' .

7.2.2. Označení. Necht f je reálná funkce a $M \subset \mathbb{R}$. Potom symbol $\sup_M f$ značí $\sup\{f(x); x \in M\}$ a symbol $\inf_M f$ značí $\inf\{f(x); x \in M\}$.

7.2.3. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je nějaké dělení intervalu $[a, b]$. Potom definujeme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Hodnotu $\overline{S}(f, D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f, D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D .

Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

7.2.4. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht f je omezená funkce na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ **Riemannův integrál**, pokud $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$. Hodnota Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a, b]$ je pak rovna společné hodnotě $\int_a^b f(x) dx$ a $\overline{\int_a^b f(x) dx}$ a značíme ji $\int_a^b f(x) dx$. Je-li $a > b$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, a je-li $a = b$ položíme $\int_a^b f(x) dx = 0$.

7.2.5. Označení. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$, značíme symbolem $\mathcal{R}(a, b)$.

7.2.6. Omezenost funkce f v definici Riemannova integrálu je nezbytná, protože v opačném případě by hodnoty $\overline{S}(f, D)$ a $\underline{S}(f, D)$ nemusely být vlastní.

7.2.7. Příklady. (a) Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $c \in \mathbb{R}$. Necht $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem $f(x) = c$, $x \in [a, b]$. Potom $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$, protože pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f = \inf_I f = c$, a tedy $\overline{S}(f, D) = \underline{S}(f, D) = c(b - a)$ pro každé dělení D intervalu $[a, b]$.

(b) Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Necht D je Dirichletova funkce. Potom $\int_a^b D(x) dx = 0$ a $\overline{\int_a^b D(x) dx} = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(c) Necht R je Riemannova funkce. Potom $R \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b R(x) dx = 0$ (odvodíme později).

(d) Platí $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ (odvodíme později).

7.2.8. Poznámka. Necht $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$, $M_1 \subset M_2$. Necht f je funkce definovaná alespoň na M_2 . Potom platí

$$\sup_{M_1} f \leq \sup_{M_2} f \quad \text{a} \quad \inf_{M_1} f \geq \inf_{M_2} f.$$

7.2.9. Věta (vlastnosti dělení). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht f je omezená funkce na $[a, b]$.

(a) Necht D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$, přičemž D' zjemňuje D . Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

(b) Necht D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

(c) Platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Důkaz. (a) Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) &= \inf_{[x_{j-1}, z]} f \cdot (z - x_{j-1}) + \inf_{[z, x_j]} f \cdot (x_j - z) \\ &\quad - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Protože

$$\inf_{[x_{j-1}, z]} f \geq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z, x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz první nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělicí bod navíc. Obecný případ první nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.

Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti první.

(b) Máme-li dána dělení D a D' , snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D' . Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D').$$

(c) Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx.$$

Tedy i

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx.$$

Tím je důkaz proveden. ■

7.2.10. Důsledek. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht' D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Označme kde $m = \inf_{[a, b]} f$ a $M = \sup_{[a, b]} f$. Pak

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b-a).$$

Důkaz. První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení $D'' = \{a, b\}$. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Věty 7.2.9. ■

7.2.11. Věta (aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak pro každé

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$ platí

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx \leq \bar{S}(f, D) < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + \varepsilon$$

a

$$\int_{\underline{a}}^b f(x) dx \geq \underline{S}(f, D) > \int_{\underline{a}}^b f(x) dx - \varepsilon.$$

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\bar{S}(f, D_0) < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\{\mu(D_0), \frac{\varepsilon}{4Kn}\}.$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0 . Ověříme nejprve, že

$$\bar{S}(f, D) \leq \bar{S}(f, P) + 2Knv(D). \quad (7.14)$$

Označme totiž jako $\mathcal{D}$ všechny intervaly dané dělením D a $\mathcal{P}$ všechny intervaly dané dělením P . Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I . Pak

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I| \quad \text{a} \quad \bar{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot |I|$$

Nechť interval $I = [\alpha, \beta]$ splňuje $I \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný. Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X . Vzhledem k nerovnosti $v(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{0, \dots, n\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\bar{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha, \beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\bar{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha, x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i, \beta]} f \cdot (\beta - x_i).$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{[\alpha, \beta]} f(\beta - \alpha) - \left(\sup_{[\alpha, x_i]} f(x_i - \alpha) + \sup_{[x_i, \beta]} f(\beta - x_i) \right) \right| \\ & \leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha) \leq 2K\nu(D). \end{aligned}$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ protínajících X nejvýše n , máme

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) \leq 2K\nu(D),$$

tj. nerovnost (7.14).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\begin{aligned} \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx & \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2K\nu(D) \\ & \leq \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx + 2\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \underline{S}(f, D) \geq \int_a^b f(x) \, dx - \varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak zjevně vyhovuje požadovaným vlastnostem, a důkaz je tedy hotov. ■

7.2.12. Důsledek. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht' $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$. Pak

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \quad \text{a} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Necht' $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 7.2.11 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx + \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx \leq \overline{S}(f, D_n) < \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

7.2.13. Věta. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je omezená funkce na $[a, b]$ a posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$ splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n). \quad (7.15)$$

Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n). \quad (7.16)$$

Důkaz. Dle Věty 7.2.9 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underline{S}(f, D_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{S}(f, D_n).$$

Odtud plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Díky (7.15) dostáváme $\overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx$. Funkce f je tedy riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí (7.16). ■

7.2.14. Příklad. Ukažte podle definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a spočítejte $\int_0^1 f(x) dx$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} v(D_n) = \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, D_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3} (n-1)n(2n-1), \\ \overline{S}(f, D_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Věty 7.2.13 pak máme $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. ♣

7.2.15. Věta (kritérium existence Riemannova integrálu). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

- (i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,
- (ii) pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Necht $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Necht D je dělení intervalu $[a, b]$ zjemňující D_1 i D_2 . Pak dostaneme díky Větě 7.2.9 nerovnosti

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &\leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2) \\ &\leq \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy (ii) platí.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. ■

7.2.16. Definice. Necht $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je **stejněměrně spojitá** na I , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x, y \in I: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

7.2.17. Je-li funkce f na intervalu I stejněměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Necht $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejněměrné spojitosti pro ε . Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0 , respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I .

7.2.18. Příklad. Necht $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I , ale není stejněměrně spojitá na I .

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejněměrné spojitosti. ■

7.2.19. Věta (vztah spojitosti a stejněměrné spojitosti). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f je stejněměrně spojitá na $[a, b]$.

Důkaz. Necht f není stejněměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě 2.4.7 vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$ (Věta 2.2.42). Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x .

Podle Heineovy věty (Věta 4.3.4) platí

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}). \quad (7.17)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|. \quad (7.18)$$

Díky (7.17) platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|) = 0.$$

Odtud a z (7.18) dostáváme pomocí věty o dvou strážnících

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ však platí $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, což je spor. ■

7.2.20. Věta (vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Důkaz. Funkce f je omezená na $[a, b]$ (Důsledek 4.3.12). Pro ověření riemannovské integrovatelnosti můžeme použít Větu 7.2.15. Necht $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá (Věta 7.2.19), lze tedy nalézt $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že $v(D) < \delta$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

Věta 7.2.15 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. ■

7.2.21. Věta (vztah monotonicity a riemannovské integrovatelnosti). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b]: f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 7.2.15. Necht $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)(f(b)-f(a)) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, $i = 0, \dots, n$. Pak platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle Věty 7.2.21 tedy platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$. ■

7.2.22. Věta (linearita Riemannova integrálu). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx, \\ \int_a^b \alpha f(x) \, dx &= \alpha \int_a^b f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Důkaz. Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.

Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

$$\inf_I f + \inf_I g \leq \inf_I (f + g) \quad \text{a} \quad \sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D). \quad (7.19)$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 7.2.12 platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)) &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n)) &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx. \end{aligned}$$

Ze (7.19) tedy máme podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f + g, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f + g, D_n) = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

Z Důsledku 7.2.12 plyne $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$ a

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a, b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim v(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x) \, dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x) \, dx.$$

Z Důsledku 7.2.12 tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim v(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x) \, dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(-f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x) \, dx.$$

Jako výše proto platí $-f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b -f(x) \, dx = -\int_a^b f(x) \, dx$. ■

7.2.23. Věta (Riemannův integrál a uspořádání). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Důkaz. Necht $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim v(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x) \, dx. \quad \blacksquare$$

7.2.24. Věta (aditivita Riemannova integrálu). Necht $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, a f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (7.20)$$

Důkaz. Necht $\{D_n^1\}, \{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Necht $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělicích bodů dělení D_n^1 a D_n^2 . Pak platí $\lim v(D_n) = 0$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$, takže je omezená i na intervalu $[a, b]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D_n) &= \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2), \\ \underline{S}(f, D_n) &= \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Podle Věty 7.2.12

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Tedy máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Dle Důsledku 7.2.12 platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a také (7.20).

$\Rightarrow$ Předpokládejme $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti (7.21). Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) \\ &\leq (\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)) + (\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)) \\ &= \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n). \end{aligned}$$

Poněvadž platí $\lim (\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}(a, b)$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)) = 0.$$

Odtud již plyne z Věty 7.2.12 riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$. Integrovatelnost f na intervalu $[b, c]$ lze dokázat obdobně. Rovnost (7.20) plyne z první části důkazu. ■

7.2.25. Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) + \int_c^a f(x) dx = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 7.2.24 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

7.2.26. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (7.22)$$

Důkaz. Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f. \quad (7.23)$$

Nerovnost (7.23) ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \sup_I |f| - \inf_I |f| &\leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta \\ &\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta \leq \sup_I f - \inf_I f + 2\eta. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost (7.23) ověřena.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 7.2.15 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z (7.23) plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 7.2.15 je tedy $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$. Zbývá odvodit nerovnost (7.22).

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (7.24)$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 7.2.22. Použijeme nerovnost (7.24) pro funkci f a pomocí Věty 7.2.22 obdržíme

$$-\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (-f(x)) dx \leq \int_a^b |-f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (7.25)$$

Z nerovností (7.24) a (7.25) dostáváme (7.22). ■

7.2.27. Lze ukázat, že pokud $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, pak $fg \in \mathcal{R}([a, b])$. Riemannovsky integrovatelné funkce tak tvoří takzvanou *algebru*. Důkaz tohoto tvrzení ale již provádět nebudeme.

7.2.28. Věta (derivace funkce horní meze). Necht $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}(a, b)$ pro každé $a, b \in J$. Necht $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in J.$$

Potom platí:

- (a) F je spojitá na J ,
- (b) jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a funkce f je spojitá v x_0 , pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. (a) Necht $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J . Dokážeme, že

$$\lim_{y \rightarrow y_0+} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f Riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená. Necht K je kladné číslo splňující

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \delta] : |f(x)| \leq K.$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_c^y f(x) dx - \int_c^{y_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{y_0}^y |f(x)| dx \leq \int_{y_0}^y K dx = K(y - y_0). \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \rightarrow y_0+} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \rightarrow y_0+} F(y) = F(y_0).$$

Spojitosť zleva v bodech J , které nejsou levým krajním bodem J , lze dokázat obdobně.

(b) Necht $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right|.$$

Platí $\int_{x_0}^x f(t) dt = f(x_0) \cdot (x - x_0)$ pro každé $x \in P(x_0, \delta)$. Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Výraz $\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě, protože pro $x < x_0$ je záporný. Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$ a tvrzení je dokázáno. ■

7.2.29. Důsledek (vztah spojitosti a existence primitivní funkce).

- (a) Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu (a, b) . Potom f má na (a, b) primitivní funkci.
- (b) Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) . Potom existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 7.2.20) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto je F dobře definovaná funkce. Věta 7.2.28 pak zaručuje platnost vztahu $F' = f$ na (a, b) , tj. F je primitivní k f .

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a - 1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b + 1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a - 1, b + 1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t) dt, \quad x \in (a - 1, b + 1).$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá (vizte Větu 5.1.15). Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f , existuje podle Věty 7.1.4 $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b) : F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow a+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt = \tilde{F}(b) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$. Tím je důkaz dokončen. ■

7.2.30. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Jestliže g je funkce definovaná alespoň na $[a, b]$, která se v intervalu $[a, b]$ liší od f v konečném počtu bodů, potom $g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Důkaz. Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g . Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b]; f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé, v opačném případě označme m počet prvků množiny J . Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J . Systém $\mathcal{S}$ má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z $\mathcal{I}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) &= \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I| \\ &= \sum_{I \in \mathcal{S}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|, \end{aligned} \quad (7.26)$$

neboť $\sup_I f = \sup_I g$, pokud $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{S}$. Můžeme tedy odhadnout

$$\begin{aligned} |\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D)| &\leq \sum_{I \in \mathcal{S}} (|\sup_I f| + |\sup_I g|) \cdot |I| \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{S}} 2K \cdot |I| \leq \sum_{I \in \mathcal{S}} 2K \cdot v(D) \\ &\leq 2m \cdot 2K \cdot v(D) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Obdobně obdržíme

$$|\underline{S}(f, D) - \underline{S}(g, D)| < \varepsilon. \quad (7.28)$$

Podle (7.26), (7.27) a (7.28) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D) \\ < \overline{S}(f, D) + \varepsilon < \int_a^b f(x) dx + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Odtud podle Věty 7.2.15 plyne, že g je na intervalu $[a, b]$ riemannovsky integrovatelná. Z odhadu (7.29) pak plyne $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. ■

7.2.31. Věta (charakterizace riemannovské integrovatelnosti). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

- (i) Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
- (ii) Existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $v(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x) dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 7.2.15 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $v(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x) dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $v(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Výrok (ii) tedy platí.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Necht (ii) je splněna pro $I \in \mathbb{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f . Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $v(D) < \delta$ máme

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\begin{aligned} \eta &= \min\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}, \\ K &= \max\{|f(x_i)|; i \in \{1, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolně. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ t & i = j. \end{cases}$$

Pak

$$\begin{aligned} |f(t)(x_j - x_{j-1})| &= \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^n K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b - a). \end{aligned}$$

Tedy platí

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta} (1 + |I| + K(b - a))$$

a f je omezená.

Můžeme tedy použít Větu 7.2.15. Necht $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Necht $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b - a) \leq I + \varepsilon + \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f, D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b - a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < 2(1 + b - a)\varepsilon.$$

Tedy f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. ■

7.2.32. Podívejme se ještě na vztah hodnoty I a hodnoty $\int_a^b f(x) dx$ v předchozí větě. Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x) dx$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\int_a^b f(x) dx \leq I$. Obdobně odvodíme $\int_a^b f(x) dx \geq I$, a tedy $I = \int_a^b f(x) dx$.

7.2.33. Poznámka. Podmínka (ii) Věty 7.2.31 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

7.3. Newtonův integrál

7.3.1. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F ,
- existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x) dx$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. Jestliže $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

7.3.2. Označení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b , kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N) \int_a^b f(x) dx \quad \text{a} \quad (R) \int_a^b f(x) dx.$$

7.3.3. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z věty o rovnosti až na konstantu (Věta 7.1.4).

(b) Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a necht f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{existuje} & \left\{ \begin{array}{l} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty, \text{ tedy diverguje,} \end{array} \right. \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

7.3.4. Označení. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Necht funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

7.3.5. Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočítejte $(N) \int_0^1 x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

♣

7.3.6. Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočítejte $(N) \int_1^\infty x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

♣

7.3.7. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0, 1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovalná, neboť na $(0, 1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sign} x$ je intervalu $[-1, 1]$ monotónní, a tedy podle Věty 7.2.21 také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1, 1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1, 1)$ nemá f dle 7.1.24 primitivní funkci.

7.3.8. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

7.3.9. Věta (linearita Newtonova integrálu). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Důkaz. Necht F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b) . Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit (Věta ??) máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

■

7.3.10. Věta (Newtonův integrál a uspořádání). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$. Necht platí $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Necht F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b) . Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b) (vizte Větu 5.5.7). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 7.3.9 máme

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

■

7.3.11. Věta (aditivita Newtonova integrálu). Necht $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$.

(a) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$, potom $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (7.30)$$

(b) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a f je spojitá v c , pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí (7.30).

Důkaz. (a) Necht F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) . Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b) . Navíc má funkce F v bodě c , jakožto spojitá funkce na (a, b) , vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(b) Necht F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b) . Funkce f je spojitá na v bodě c , a proto je omezená na jistém okolí bodu c . Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 7.3.10 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^x (-K) dt \leq \int_{c-\delta}^x f(t) dt \leq \int_{c-\delta}^x K dt = K(x - c + \delta).$$

Dále platí $\int_{c-\delta}^x f(t) dt = F(x) - F(c-\delta)$ pro každé $x \in (c-\delta, c)$, neboť F je spojitá na (a, c) . Limita $\lim_{x \rightarrow c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně platí, že $\lim_{x \rightarrow c+} G(x)$ je vlastní. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x \rightarrow c-} F(x) = \lim_{x \rightarrow c+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \rightarrow c-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí díky Větě 5.2.9

$$H'(c) = \lim_{x \rightarrow c} H'(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c . Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b) a má vlastní limity v krajních bodech (a, b) , protože je v příslušných bodech mají funkce F a G . Tedy $f \in \mathcal{N}(a, c)$. ■

7.3.12. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a f je spojitá na (a, b) . Pak $\int_a^b |f(x)| dx$ existuje a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Důkaz. Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní dle Věty 7.1.14. Označme ji F . Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající (vizte Větu 5.5.7). Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b) , přičemž $\lim_{x \rightarrow b-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ definován. Je-li tento rozdíl roven ∞ , požadovaná nerovnost zjevně platí. Pokud je konečný, pak $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$. Můžeme tedy použít Větu 7.3.10. Platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, a tedy

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \max \left\{ \int_a^b f(x) dx, -\int_a^b f(x) dx \right\} \\ &= \max \left\{ \int_a^b f(x) dx, \int_a^b -f(x) dx \right\} \leq \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

■

7.3.13. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

7.3.14. Věta (per partes pro Newtonův integrál). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a, b) . Necht F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b) . Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b) . Označme ji písmenem H . Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF . Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x) dx$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Z 7.3.13 plyne, že

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)g(x) dx &= [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b \\ &= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

7.3.15. Věta (substituce pro Newtonův integrál). Necht $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a, b) a φ je funkce definovaná na (α, β) . Necht φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt, \quad (7.31)$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci (funkci φ'). Z Darbouxovy vlastnosti derivace (Věta 7.1.23) tedy plyne, že obraz intervalu (α, β) při zobrazení φ' , tedy množina $\varphi'((\alpha, \beta))$, je interval. Z předpokladu víme, že bod 0 není prvkem tohoto intervalu. Z toho vyplývá, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládejme, že φ' je záporná na (α, β) . Nyní rozlišíme dvě možnosti. Nejprve budeme předpokládat, že existuje integrál na levé straně rovnosti (7.31) a pak na pravé.

Existuje $\int_a^b f(x) dx$. Potom má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24) plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t \rightarrow \beta-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \alpha+} \varphi(t) = b$$

a z Věty 4.2.26

$$\lim_{t \rightarrow \alpha+} F(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x), \quad \lim_{t \rightarrow \beta-} F(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))(-\varphi'(t)) dt = [-F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\lim_{x \rightarrow a+} F(x) + \lim_{x \rightarrow b-} F(x) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Existuje $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci (Věta 7.1.30) pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f . Platí

$$\lim_{x \rightarrow a+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \rightarrow b-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow a+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \rightarrow \beta-} G(t), \quad \lim_{x \rightarrow b-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \rightarrow \alpha+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x) dx = [-G \circ \varphi^{-1}]_a^b = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt.$$

■

7.3.16. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce). Necht $a \in \mathbb{R}^*$ a necht $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$. Necht funkce F je definována alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova-Cauchyova) podmínka:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x, y \in P(a, \delta): |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = A$ a $A \in \mathbb{R}$. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$ kladné, že

$$\forall x \in P(a, \delta): |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x, y \in P(a, \delta)$ máme

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - A| + |A - F(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Necht platí podmínka věty. Necht je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz Věta 2.4.26). Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, necht kladné $\delta \in \mathbb{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$. Pak pro $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$, platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$ (ta existuje díky Větě 2.4.26). Pak $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost

$\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a . Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ z Bolzanovy--Cauchyovy podmínky. Necht $n_1 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1: x_n, y_n \in P(a, \delta).$$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty 4.2.16 máme proto $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = A$. ■

7.3.17. Tvrzení Věty 7.3.16 platí obdobně i pro jednostranné limity.

7.3.18. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a, b) . Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Podle Věty 7.1.14 má f na (a, b) primitivní funkci F . Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Cauchyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Necht $K \in \mathbb{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b): |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí z Věty ??(c)

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 7.3.16.

Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně. ■

7.3.19. Pro neomezený interval tvrzení Věty 7.3.18 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \arctg(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu $\mathbb{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ však dokonce ani neexistuje.

7.3.20. Věta (vztah Riemannova a Newtonova integrálu). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht f je omezená funkce na $[a, b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$, pak

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, existuje podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti (Věta 7.2.31) $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_i - x_{i-1}]$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R) \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Mějme tedy $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno a $\delta \in (0, \infty)$ nalezeno tak, že splňuje tuto podmínku. Vezměme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ .

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow b-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \rightarrow a+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$ dle Poznámky ??(a) a faktu $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Navíc $H' = f$ na (a, b) . Pro každé $i = 1, \dots, n$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$\begin{aligned} (N) \int_a^b f(x) dx &= \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x) = H(b) - H(a) \\ &= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^n (H(x_i) - H(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\left| (N) \int_a^b f(x) dx - (R) \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R) \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

7.3.21. Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 7.2.20, Věty 7.3.18 a Věty 7.3.20. ■

7.4. Konvergence Newtonova integrálu

7.4.1. Věta (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Necht dále je f spojitá na $[a, b]$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f . Po eventuelním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, dostáváme $G(x) \geq F(x)$ na (c, b) . Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva (vizte Větu 4.2.27) a platí

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow b-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ vlastní.

Obě funkce mají vlastní limitu v c , jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$ podle Věty 7.3.18. Věta ??(c) nyní dává $f \in \mathcal{N}(a, b)$. ■

7.4.2. Poznámka. Tvrzení Věty 7.4.1 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

7.4.3. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konverguje.

Řešení. Zkoumejme konvergenci $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$. Máme totiž pomocí per partes

$$\int \cos \frac{1}{x} dx = x \cos \frac{1}{x} - \int x \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \frac{-1}{x^2} dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = x \cos \frac{1}{x} - \int \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Protože $\int_0^1 \cos \frac{1}{x}$ konverguje (Věta 7.3.18), konverguje i

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \left[x \cos \frac{1}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx.$$

Substitucí $\frac{1}{x} = t$ máme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 t \left(\sin \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} dt$$

(vizte Větu 7.3.15). ♣

7.4.4. Příklad. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ konverguje.

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy dle Věty 7.3.18 konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1, \infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1, \infty)$ (Příklad 7.3.5(b)), je podle Věty 7.4.1 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Použitím Věty ??(c) dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0, \infty)$. ♣

7.4.5. Věta (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht' $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Necht' f, g jsou spojitě nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Označme $c = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a necht' $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Z Věty ?? existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) : 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c}f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$ dle Věty ??(c), a tedy Věta 7.4.1 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde Newtonovsky integrovatelná. Dle Věty ??(d) je $g \in \mathcal{N}(a, x_0)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomoci odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0, b) . ■

7.4.6. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2} dx$ konverguje.

Řešení. Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojitě nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}}{x^{-\frac{5}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x + 1} = 2. \end{aligned}$$

Podle Věty 7.4.5 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1, \infty)$ (Příklad 7.3.5(b)). ♣

7.4.7. Lemma (odhady Newtonova integrálu součinu dvou funkcí). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x \in [a, b]} \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq g(a) \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x f(t) dt.$$

Speciálně platí

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq g(a) \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f(t) dt \right|.$$

Důkaz. Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg (viz Věta 7.2.19) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow (|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon) \ \& \ (|f(x) - f(y)| < \varepsilon). \quad (7.32)$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt, \quad x \in [a, b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ . Pak máme ze (7.32) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i] : f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) \, dt.$$

Obdobnou úvahou dostáváme pomocí (7.32)

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t) \, dt &\leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq g(x_{i-1}) \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) \, dt + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) \, dt + (g(a) + 1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).$$

Pak

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t)g(t) dt &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t) dt \\
 &\leq \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a) + 1) \\
 &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a) \\
 &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon} \\
 &\leq \sup_{t \in [a, b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon} \\
 &= g(a) \sup_{t \in [a, b]} F(t) + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).
 \end{aligned}$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

První nerovnost lze dokázat obdobně. ■

7.4.8. Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu).
Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

- (a) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.
- (b) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. V obou případech má funkce fg na (a, b) funkci primitivní, označme ji H . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že g je nerostoucí. V opačném případě bychom mohli pracovat s funkcí $-g$, neboť změna znaménka u g konvergenci integrálu $\int_a^b f(x)g(x) dx$ neovlivní.

(a) Můžeme předpokládat, že g je nezáporná, protože jinak bychom uvažovali funkci $g(x) + K$, kde K je číslo splňující

$$\forall x \in [a, b) : |g(x)| < K.$$

Pak totiž konvergence integrálu

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b (f(x)(g(x) + K) - f(x)K) dx$$

plyne z dokázaného tvrzení pro nezápornou funkci a Věty ??(a).

Mějme tedy g nezápornou a necht $C \in (0, \infty)$ splňuje

$$\forall x \in [a, b) : |g(x)| < C.$$

Podle předpokladu existuje $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ vlastní. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. K němu nalezneme pomocí Bolzanovy--Cauchyovy podmínky pro funkce (Věta 7.3.16) kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b, \delta) : -\varepsilon < F(y) - F(x) < \varepsilon.$$

Potom pro x, y z okolí $P_-(b, \delta)$, $x < y$, platí podle Lemmatu 7.4.7

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t) \, dt \leq g(x) \sup_{z \in [x, y]} \int_x^z f(t) \, dt \\ &= g(x) \sup_{z \in [x, y]} (F(z) - F(x)) \leq g(x)\varepsilon \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t) \, dx \geq g(x) \inf_{z \in [x, y]} \int_x^z f(t) \, dt \\ &\geq g(x) \inf_{z \in [x, y]} (F(z) - F(x)) \geq -g(x)\varepsilon \geq -C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| < C\varepsilon.$$

Tedy H splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku v bodě b zleva, má v něm vlastní limitu zleva.

Snadnou úvahou pak obdržíme $fg \in \mathcal{N}(a, b)$ (viz závěr důkazu Věty 7.4.1). Podrobněji, zvolme $c \in (a, b)$. Ze spojitosti funkce fg na $[a, c]$ odvodíme $fg \in \mathcal{N}(a, c)$ (Věta 7.3.18). Dále H je spojitá v c , a tedy má zde vlastní limitu. Proto $fg \in \mathcal{N}(a, c)$. Věta ??(c) pak završí argumentaci.

(b) Z předpokladu plyne, že $g(x) \geq 0$ pro všechna $x \in [a, b)$. Necht $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je takové, že

$$\forall x \in (a, b) : |F(x)| < K.$$

Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P_-(b, \delta) : |g(x)| < \varepsilon.$$

Pak pro $x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$ máme

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t) \, dt \\ &\leq g(x) \sup_{z \in [x, y]} (F(z) - F(x)) \\ &\leq \varepsilon \sup_{z \in [x, y]} (F(z) - F(x)) \\ &\leq 2K\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t) \, dt \\
&\geq g(x) \inf_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \\
&\geq \varepsilon \inf_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \\
&\geq -2K\varepsilon,
\end{aligned}$$

a tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| \leq 2K\varepsilon.$$

Tedy Věta 7.3.16 říká, že H má vlastní limitu v b zleva. Jako výše pak důkaz uzavřeme pozorováním, že $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. ■

7.4.9. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} \, dx$ konverguje.

Řešení. Položíme ve Větě 7.4.8(b) pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \cos x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Pak primitivní funkce k f , totiž $\sin x$, je omezená na $(1, \infty)$ a $g(x)$ je na $[1, \infty)$ nezáporná monotónní funkce mající v ∞ limitu 0. A obě funkce jsou zjevně spojité na $[1, \infty)$. Tedy dle výše zmíněné věty zadaný integrál konverguje. ♣

7.4.10. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \arctg x \frac{\cos x}{x} \, dx$ konverguje.

Řešení. Ve Větě 7.4.8(a) položíme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{a} \quad g(x) = \arctg x.$$

Obě funkce jsou spojité na $[1, \infty)$, g je omezená neklesající a $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tedy integrál konverguje podle Věty 7.4.8(a). ♣

7.4.11. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} \, dx$ diverguje.

Řešení. Protože platí

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}, \quad x \in [1, \infty),$$

stačí dle Věty 7.4.1 ověřit divergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} \, dx.$$

Pišme

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Jest

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} \, dx = \frac{1}{4} \int_2^\infty \frac{\cos y}{y} \, dy$$

a z předchozího příkladu víme, že $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tím spíše $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(2, \infty)$, a tedy i $\frac{\cos 2x}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Máme tudíž

$$\frac{1}{2x} = \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^2 x}{x},$$

přičemž $\frac{1}{2x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$ a $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Kdyby $\frac{\sin^2 x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, pak by podle Věty ??(a) platilo i $\frac{1}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, což by byl spor. Odtud plyne, že $\frac{\sin^2 x}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$, a tedy i $\frac{|\sin x|}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$. ♣

7.4.12. Věta (první věta o střední hodnotě). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Necht' f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná na $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Funkce f , jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M (viz Věta ??). Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \quad (7.33)$$

Pokud $\int_a^b g(x) dx = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x) dx > 0$. Potom ze (7.33) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$ dle Věty 4.3.8, existuje $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

7.4.13. Věta (druhá věta o střední hodnotě). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Necht' f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je monotónní a spojitá na $[a, b]$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx. \quad (7.34)$$

Důkaz. Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (7.34).

Definujme

$$\varphi(y) = g(a) \int_a^y f(t) dt + g(b) \int_y^b f(t) dt, \quad y \in [a, b].$$

Potom lze funkci φ vyjádřit jako

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b)) \int_a^y f(t) dt + g(b) \int_a^b f(t) dt, \quad y \in [a, b].$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$ (Věta 7.2.28), a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y \in [a, b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y \in [a, b]} \varphi(y).$$

Uvažujme spojitou nezápornou nerostoucí funkci

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a, b].$$

Lemma 7.4.7 pak dává

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)g(t) dt - g(b) \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b f(t)\psi(t) dt \\ &\leq \psi(a) \sup_{t \in [a, b]} \int_a^t f(s) ds \\ &= (g(a) - g(b)) \max_{t \in [a, b]} \int_a^t f(s) ds, \end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)g(t) dt &\leq (g(a) - g(b)) \max_{t \in [a, b]} \int_a^t f(s) ds + g(b) \int_a^b f(t) dt \\ &= \max_{t \in [a, b]} \left((g(a) - g(b)) \int_a^t f(s) ds + g(b) \int_a^b f(t) dt \right) \\ &= \varphi(y_1). \end{aligned}$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 7.4.7

$$\int_a^b f(t)g(t) dt \geq \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a, b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t) dt$ (Věta 4.3.8), a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = \varphi(c) = g(a) \int_a^c f(t) dt + g(b) \int_c^b f(t) dt.$$

■

7.4.14. Poznámka. Věta 7.4.13 nabízí alternativní důkaz Věty 7.4.8. Mějme totiž f, g, F, H jako v důkazu Věty 7.4.8. V případě tvrzení (a) najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b, \delta) : |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Nechť g je omezená konstantou C . Vezměme $x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$. Ať $c \in [x, y]$ splňuje

$$\int_x^y f(t)g(t) dt = g(x) \int_x^c f(t) dt + g(y) \int_c^y f(t) dt. \quad (7.35)$$

Pak pro tato x, y máme

$$\begin{aligned} |H(x) - H(y)| &= \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| = \left| g(x) \int_x^c f(t) dt + g(y) \int_c^y f(t) dt \right| \\ &\leq C \left| \int_x^c f(t) dt \right| + C \left| \int_c^y f(t) dt \right| \\ &= C |F(c) - F(x)| + C |F(y) - F(c)| \\ &\leq 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy H má v b zleva vlastní limitu a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

V Případě tvrzení (b) Věty 7.4.8(b), nechť C omezuje F a $|g(x)| < \varepsilon$ pro $x \in P_-(b, \delta)$. Nechť $x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$. Najdeme bod $c \in [x, y]$ splňující (7.35). Pak máme odhad

$$\begin{aligned} |H(x) - H(y)| &= \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| = \left| g(x) \int_x^c f(t) dt + g(y) \int_c^y f(t) dt \right| \\ &\leq \varepsilon \left| \int_x^c f(t) dt \right| + \varepsilon \left| \int_c^y f(t) dt \right| \\ &= \varepsilon |F(c) - F(x)| + \varepsilon |F(y) - F(c)| \\ &\leq 4C\varepsilon. \end{aligned}$$

Důkaz pak dokončíme jako výše.

7.5. Aplikace určitého integrálu

7.5.1. Věta (Integrální kritérium). Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0, \infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ konverguje.

Důkaz. Uvažujme $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$ a dělení $D = \{n_0, n_0+1, \dots, n_1-1, n_1\}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= a_{n_0} + \dots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i, \\ \underline{S}(f, D) &= a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i. \end{aligned}$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i &= \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x) \, dx \\ &= (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x) \, dx = (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x) \, dx \\ &\leq \overline{S}(f, D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x) \, dx$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^x f(t) \, dt, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞) , a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme z (7.36)

$$\begin{aligned} \int_{n_0}^{\infty} f(x) \, dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{n_0}^x f(t) \, dt \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0+1}^n a_i \\ &= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i. \end{aligned}$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak pro (7.36) dává

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{n_0}^n f(t) \, dt \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} F(x). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a podle (7.37) je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t) \, dt$ konverguje. ■

7.5.2. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverguje.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x) \, dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t} \, dt = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

diverguje podle Věty 7.5.1. ♣

7.5.3. Věta (Zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru). Necht $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$ -ní derivaci. Pak

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (7.38)$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt,$$

tedy (7.38) pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n+1$. Mějme tedy $(n+2)$ -krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomoci per partes (Věta 7.3.14) počítat

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \\ &= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1} \right]_a^x \\ &\quad - \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n (-1) dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x) \\ &= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ■

7.5.4. Definice. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** C^1 , tj. φ_i' jsou spojitě na $[a, b]$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle \varphi \rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

7.5.5. Příklady. (a) Jednotkovou kružnici v rovině lze vyjádřit křivkou $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Graf funkce f na intervalu je křivkou popsanou zobrazením $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$.

(c) Geometrický obraz křivky lze často parametrizovat různými zobrazeními φ , například graf funkce $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ lze popsat také jako $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

7.5.6. Definice. Necht' $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka. Její **délkou** rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D); D \text{ dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=1}^n \|\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\|.$$

7.5.7. Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom definujeme

$$(N) \int_a^b f(x) dx = \left((N) \int_a^b f_1(x) dx, \dots, (N) \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Obdobně definujeme $(R) \int_a^b f(x) dx$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{R}(a, b)$

7.5.8. Lemma. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \left\| \left[\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right] \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad (7.39)$$

Důkaz. Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\| dt$ konverguje. Položme

$$y = \left[\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right] \in \mathbb{R}^n.$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \int_a^b f_i(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n y_i f_i(t) \right) dt \leq \int_a^b \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n f_i^2(t) \right)} dt \\ &= \int_a^b \|y\| \|f(t)\| dt = \|y\| \int_a^b \|f(t)\| dt. \end{aligned}$$

Pokud $y = 0$, (7.39) zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, právě provedený výpočet dává (7.39). ■

7.5.9. Věta. Necht' $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka. Pak platí

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2} dt.$$

Důkaz. Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 7.5.8

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^k \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Odtud plyne $L(\varphi) \leq \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ'_i stejnoměrně spojitě na $[a, b]$ (viz Věta 7.2.19), existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta : |\varphi'_i(t) - \varphi'_i(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| dt - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) &\leq \|\varphi'(x_j)\| (x_j - x_{j-1}) \\ &= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) dt \right\| \\ &\leq \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) dt \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) dt \right\| \\ &\leq \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \leq \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a) \leq L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$

Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \leq L(\varphi)$. ■

7.5.10. Příklad. (a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a, b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.

7.6. Teoretické příklady na integrál

7.6.1. Lemma. Necht I je otevřený interval, $f \in \mathcal{F}(I)$ a φ je konstantní nulová funkce na intervalu I . Označme $A = f + \text{konst}(I)$.

(a) Necht $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$cA = \begin{cases} A, & \text{pokud } c \neq 0, \\ \{\varphi\}, & \text{pokud } c = 0. \end{cases}$$

(b) Platí $A + \text{konst}(I) = A$.

(c) Necht $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$a_1A + a_2A = \begin{cases} (a_1 + a_2)A, & \text{pokud } a_1 + a_2 \neq 0, \\ \text{konst}(I), & \text{pokud } a_1 + a_2 = 0 \text{ a } a_1 \neq 0, \\ \{\varphi\}, & \text{pokud } a_1 = a_2 = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) ihned plynou z definice.

(c) *Případ* $a_1 + a_2 \neq 0$. Necht $f_1, f_2 \in A$. Nalezneme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ platí $f_1(x) = f(x) + c_1$ a $f_2(x) = f(x) + c_2$. Pak pro každé $x \in I$ platí

$$\begin{aligned} a_1f_1(x) + a_2f_2(x) &= (a_1 + a_2)f(x) + a_1c_1 + a_2c_2 \\ &= (a_1 + a_2) \cdot \left(f(x) + \frac{a_1c_1 + a_2c_2}{a_1 + a_2} \right). \end{aligned}$$

Odtud již snadno plyne, že $a_1f_1 + a_2f_2 \in (a_1 + a_2)A$.

Nyní předpokládejme, že $g \in (a_1 + a_2)A$. Nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $g(x) = (a_1 + a_2)(f(x) + c)$. Pak pro každé $x \in I$ platí

$$g(x) = a_1(f(x) + c) + a_2(f(x) + c).$$

Odtud plyne $g \in a_1A + a_2A$. Tím je požadovaná rovnost dokázána.

Případ $a_1 + a_2 = 0, a_1 \neq 0$. Necht $f_1, f_2 \in A$. Nalezneme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ platí $f_1(x) = f(x) + c_1$ a $f_2(x) = f(x) + c_2$. Pak pro každé $x \in I$ platí

$$\begin{aligned} a_1f_1(x) + a_2f_2(x) &= a_1(f(x) + c_1) + a_2(f(x) + c_2) \\ &= (a_1 + a_2)f(x) + a_1c_1 + a_2c_2 = a_1c_1 + a_2c_2. \end{aligned}$$

Funkce $a_1f_1 + a_2f_2$ je tedy na intervalu I konstantní, neboli $a_1f_1 + a_2f_2 \in \text{konst}(I)$.

Necht $g \in \text{konst}(I)$. Položme $f_1 = f + \frac{1}{a_1}g$ a $f_2 = f$. Potom $a_1f_1 + a_2f_2 = g$, a tedy $g \in a_1A + a_2A$. Tím je požadovaný vztah dokázán.

Případ $a_1 = a_2 = 0$. Tvrzení je zřejmé. ■

7.6.2. Příklad. Definujme funkci $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ je iracionální,} \\ \frac{1}{q}, & \text{pokud } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělné.} \end{cases}$$

Ukažte, že f nemá primitivní funkci na žádném intervalu $(a, b) \in [0, 1]$ a $(R) \int_0^1 f(x) dx = 0$.

Řešení. Je-li $(a, b) \subset [0, 1]$ libovolný interval, vezmeme racionální číslo tvaru $\frac{p}{q}$, p, q nesoudělné, ležící v intervalu (a, b) . Pak funkce f nenabývá na (a, b) žádných iracionálních hodnot v intervalu $(0, \frac{1}{q})$, a tedy nemá na (a, b) Darbouxovu vlastnost. Proto dle Věty 7.1.23 nemá na (a, b) primitivní funkci.

Ukažme nyní, že $(R) \int_0^1 f(x) dx = 0$. K tomuto účelu postačí ukázat, že pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[0, 1]$ splňující $\overline{S}(f, D) \leq \varepsilon$. Pak totiž

$$0 \leq \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \varepsilon$$

a $(R) \int f(x) dx = 0$ dle Věty 7.2.15.

Najdeme nyní takové dělení. Množina

$$M = \{x \in [0, 1]; f(x) \geq \varepsilon\}$$

je konečná. Lze proto najít navzájem se neprotínající intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $\sum_{i=1}^n |I_i| < \varepsilon$ a $M \subset \bigcup_{i \in I} I_i$. Necht D sestává z krajních bodů intervalů I_i , $i = 1, \dots, n$, s eventuálně přidanými body 0 a 1. Pak pro interval I z D různý od $I_1, \dots, I_n$ platí $\sup_I f \leq \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{I_i} f \right) |I_i| + \sum_{I \notin \{I_1, \dots, I_n\}} \left(\sup_I f \right) |I| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |I_i| + \varepsilon \cdot \sum_{I \notin \{I_1, \dots, I_n\}} |I| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

♣

7.6.3. Příklad. Necht f je spojitá funkce na otevřeném omezeném intervalu (a, b) . Ukažte, že f je stejnoměrně spojitá na (a, b) právě tehdy, když existují vlastní limity v krajních bodech (a, b) .

Řešení. Má-li f vlastní limity v krajních bodech intervalu (a, b) , můžeme definovat $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{y \rightarrow a+} f(y), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ \lim_{y \rightarrow b-} f(y), & x = b. \end{cases}$$

Pak F je na $[a, b]$ spojitá, a tedy i stejnoměrně spojitá (vizte Větu 7.2.19). Tedy f je stejnoměrně spojitá na (a, b) .

Obráceně, je-li f stejnoměrně spojitá na (a, b) , splňuje v obou krajních bodech Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (Věta 7.3.16). To ověříme takto. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, dle definice stejnoměrné spojitosti, tj.

$$\forall x, y \in I: (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Tedy pro $x, y \in P_+(a, \delta)$ máme $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, což jsme potřebovali dokázat. ♣

7.6.4. Příklad. Necht $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak funkce

$$x \mapsto f(x)g(x), \quad x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \text{ a } x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$$

leží v $\mathcal{R}(a, b)$.

Řešení. Jelikož maximum i minimum dvou omezených funkcí je funkce omezená a

$$\begin{aligned} \max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \end{aligned}$$

jsou funkce $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ riemannovsky integrovatelné dle Věty ??(a).

Obraťme nyní naši pozornost k součinu fg . Protože $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2)$, stačí dokázat integrovatelnost f^2 pro $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Mějme tedy funkci $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak f^2 je omezená funkce díky omezenosti f . Je-li c konstanta, platí $f^2 = (f+c)^2 - c^2 - 2cf$, a tedy stačí uvažovat nezápornou funkci f . Necht tedy f je nezáporná a omezená číslem M . Pro $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, najdeme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$ (viz Věta 7.2.15). Necht $\mathcal{D}$ značí množinu intervalů v dělení D .

Protože pro množinu A nezáporných čísel platí

$$\sup A^2 = \sup\{x^2; x \in A\} = (\sup A)^2 \quad \text{a} \quad \inf A^2 = (\inf A)^2,$$

máme pro množinu A sestávající z nezáporných čísel a omezenou číslem M odhad

$$\begin{aligned} \sup A^2 - \inf A^2 &= (\sup A)^2 - (\inf A)^2 \\ &= (\sup A - \inf A)(\sup A + \inf A) \leq 2M(\sup A - \inf A). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Použitím (7.40) dostáváme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f^2, D) - \underline{S}(f^2, D) &= \sum_{I \in \mathcal{D}} \left(\sup_I f^2 - \inf_I f^2 \right) \cdot |I| \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{D}} 2M \left(\sup_I f - \inf_I f \right) \cdot |I| \leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f^2 je riemannovsky integrovatelná dle Věty 7.2.15. ♣

7.6.5. Příklad. Necht $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná kladná funkce na $[a, b]$. Pak $(R) \int_a^b f(x) dx > 0$.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $f(x) > 0$ pro každé $x \in [a, b]$ a přitom $(R) \int_a^b f(x) dx = 0$. Zkonstruujeme nedegenerované intervaly $[a_n, b_n] \subset [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

- (a) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a, b]$,
- (b) $0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$,
- (c) $\sup_{[a_n, b_n]} f \leq \frac{1}{n}$.

Induktivní konstrukce. Příklad $n = 1$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=1}^m$ intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < 1$ a $\bar{S}(f, D) < b - a$. Potom existuje $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $\sup_{[x_{i_0-1}, x_{i_0}]} f < 1$. Kdyby tomu tak nebylo, platilo by

$$b - a > \bar{S}(f, D) = \sum_{i=1}^m \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) = b - a,$$

což je spor. Můžeme tedy položit $a_1 = x_{i_0-1}$ a $b_1 = x_{i_0}$.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme zkonstruován interval $[a_n, b_n]$. Protože platí podle Věty 7.2.24

$$0 = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_n} f(x) dx + \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx + \int_{b_n}^b f(x) dx$$

a členy na pravé straně jsou nezáporné (vizte Větu 7.2.23), máme

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x) dx = 0.$$

Vezměme dělení D intervalu $[a_n, b_n]$ takové, že $S(f, D) < \frac{b_n - a_n}{n+1}$. Protože $S(f, D) \geq S(f, D')$ pro každé jemnější dělení D' , můžeme předpokládat, že $v(D) < \frac{1}{n+1}$. Z definice $S(f, D)$ plyne, že alespoň na jednom intervalu určeném dělením D je supremum funkce f menší než $\frac{1}{n+1}$. Tento interval označíme jako $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, čímž je konstrukce provedena.

Příklad ?? nyní dává, že existuje bod $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Pro něj pak platí

$$\forall n \in \mathbb{N}: f(x) \leq \sup_{[a_n, b_n]} f \leq \frac{1}{n},$$

a tedy $f(x) = 0$. To je však spor s předpokladem. ♣

7.6.6. Příklad. Ukažte, že

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}. \end{aligned}$$

Řešení. Odvodíme rekurentní formuli pro $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Integrací per partes totiž dostáváme pro $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= \int \sin^{n-1} x \sin x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

Proto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx.$$

Protože

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1,$$

máme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

Závěrem použijeme substituci $t = \frac{\pi}{2} - x$ k odvození

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$

♣

7.6.7. Příklad (Wallisova formule). Ukažte, že

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Díky Příkladu 7.6.6 máme

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k},$$

$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

Tedy dostáváme

$$\frac{\pi}{2} = S_n \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \frac{S_n}{C_n} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}. \quad (7.41)$$

Povšimněme si, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < \sin^{2n+2} x < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

a tedy dle Příkladu 7.6.5

$$0 < S_{n+1} \leq C_n \leq S_n \leq C_{n-1}.$$

Tím pádem máme

$$\frac{2n+1}{2n} = \frac{C_{n-1}}{C_n} \geq \frac{S_n}{C_n} \geq \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n}{n+1}.$$

Limitním přechodem v (7.41) máme požadovanou rovnost

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}$$

♣

7.6.8. Příklad (Stirlingův² vzorec). Ukažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \quad \text{a} \quad b_n = \log a_n.$$

Pak platí pro $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - b_{n+1} = (n + \tfrac{1}{2}) \log \frac{n+1}{n} - 1. \quad (7.42)$$

Protože dle Příkladu ?? platí

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1),$$

máme

$$\log \frac{n+1}{n} = \log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}.$$

Dosazením do (7.42) dostaneme

$$b_n - b_{n+1} = (n + \tfrac{1}{2}) \log \frac{n+1}{n} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}.$$

Tedy je posloupnost $\{b_n\}$ klesající. Dále dostáváme odhad

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^k = \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{n(n+1)}.$$

²James Stirling (1692–1770)

Tím pádem obdržíme

$$\begin{aligned} b_1 - b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

což znamená, že $b_n > b_1 - \frac{1}{4}$. Tedy posloupnost $\{b_n\}$, jakožto klesající a zdola omezená, konverguje k nějakému číslu b . Z toho máme konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n} = e^b.$$

Označíme $C = e^b$ a spočtěme její hodnotu. Protože víme z Příkladu 7.6.7, že

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)},$$

dostáváme s použitím $\lim a_n = C$ vztah

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} a_n^4 (2n)^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{(a_{2n})^2 4n \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4}{(a_{2n})^2} \frac{n^2}{n(2n+1)} = \frac{1}{2}C^2.$$

Protože $C \geq 0$, dostáváme $C = \sqrt{\pi}$ a Stirlingova formule je odvozena. ♣

7.6.9. Příklad (Laplaceův-Gaussův integrál). Ukažte, že

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí po substituci $x = \sin t$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \quad (7.43)$$

podle Příkladu 7.6.6. Dále pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, platí díky substituci $x = \operatorname{tg} t$ a opět díky Příkladu 7.6.6

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \cos^{-2} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Dále platí

$$1 - y \leq e^{-y} \leq \frac{1}{1+y}, \quad y \in [0, \infty). \quad (7.45)$$

Označíme-li totiž

$$\varphi_1(y) = e^{-y} - 1 + y, \quad \varphi_2(y) = 1 - (1+y)e^{-y}, \quad y \in [0, \infty),$$

pak

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$$

a

$$\varphi_1'(y) = 1 - e^{-y} > 0, \quad \varphi_2'(y) = ye^{-y} > 0, \quad y \in (0, \infty).$$

Obě funkce jsou tedy rostoucí na $[0, \infty)$ (viz Věta 5.2.6), a proto nezáporné na $(0, \infty)$. Odtud již plyne (7.45).

Z (7.45) máme

$$(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2}, \quad x \in (0, 1),$$

a

$$e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1 + x^2)^n}, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx.$$

Substitucí $t = x\sqrt{n}$ dostaneme

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^\infty e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx.$$

Z rovností (7.43) a (7.44) obdržíme

$$\sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n + 1)} \leq \int_0^\infty e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n - 2)} \frac{\pi}{2}. \quad (7.46)$$

Spočtěme nyní limity krajních výrazů v (7.46). Použitím Stirlingovy formule 7.6.8 máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n + 1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} 2^{2n} (n!)^2}{(2n + 1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right)^2}{\sqrt{2\pi(2n + 1)} \left(\frac{2n + 1}{e} \right)^{2n + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi n \sqrt{n} 2^{2n} n^{2n} e}{\sqrt{2\pi(2n + 1)} (2n + 1)^{2n + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi n \sqrt{n} n^{2n} e}{\sqrt{2\pi(2n + 1)} \left(\left(\frac{n + \frac{1}{2}}{n} \right)^n \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{e}{(e^{\frac{1}{2}})^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Z tohoto vzorce pak dostáváme

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{\pi}{2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)} \frac{\pi}{2(2n+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}\pi}{2(2n+1)} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{2(2n+1)} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
 \end{aligned}$$

Tedy z Věty 2.2.44 máme limitním přechodem v (7.46)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

♣

7.6.10. Příklad. Ukažte, že číslo π je iracionální.

Důkaz. Předpokládejme, že $\pi = \frac{a}{b}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme polynomy

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^n b^k x^k, \\
 F(x) &= f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).
 \end{aligned}$$

Všimněme si, že $n!f(x)$ má celé koeficienty a členy u x mají stupeň alespoň n . Proto

$$f(0), f^{(1)}(0), \dots, f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}. \quad (7.47)$$

Protože $f(x) = f(\frac{a}{b} - x) = f(\pi - x)$, platí též

$$f(\pi), f^{(1)}(\pi), \dots, f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}. \quad (7.48)$$

Protože $f^{(2n+2)}(x) = 0$, odvodíme

$$(F'(x) \sin x - F(x) \cos x)' = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x.$$

Tedy

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x] = F(\pi) + F(0).$$

Díky (7.47) a (7.48) platí

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Ale máme

$$0 < f(x) \sin x < \frac{1}{n!}(\pi^n a^n),$$

a tedy dle Příkladu 7.6.5 platí

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx < \pi \frac{1}{n!}(\pi^n a^n).$$

Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ je tedy

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \in \mathbb{N} \cap (0, 1),$$

což je spor. ■

7.6.11. Příklad. Necht f je sudá funkce a $[-a, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}(-a, a)$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a, a)$), pak

$$(R) \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2(R) \int_0^a f(x) \, dx \quad (\text{resp. } (N) \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2(N) \int_0^a f(x) \, dx).$$

Necht f je lichá funkce a $[-a, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}(-a, a)$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a, a)$), pak

$$(R) \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0 \quad (\text{resp. } (N) \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0).$$

Řešení. Pro newtonovsky integrovatelné funkce tvrzení snadno plyne z Věty o substituci 7.3.15, neboť substitucí $x = -t$ dostaneme pro sudou funkci rovnost

$$\begin{aligned} (N) \int_{-a}^a f(x) \, dx &= (N) \int_{-a}^0 f(x) \, dx + (N) \int_0^a f(x) \, dx \\ &= (N) \int_0^a f(-t) \, dt + (N) \int_0^a f(t) \, dt \\ &= (N) \int_0^a f(t) \, dt + (N) \int_0^a f(t) \, dt \\ &= 2(N) \int_0^a f(x) \, dx, \end{aligned}$$

pro lichou pak

$$\begin{aligned} (N) \int_{-a}^a f(x) \, dx &= (N) \int_{-a}^0 f(x) \, dx + (N) \int_0^a f(x) \, dx \\ &= (N) \int_0^a f(-t) \, dt + (N) \int_0^a f(t) \, dt \\ &= (N) \int_0^a -f(t) \, dt + (N) \int_0^a f(t) \, dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nechť f je nyní sudá funkce riemannovsky integrovatelná na $[-a, a]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení $D_n^+ = \{\frac{ja}{n}\}_{j=0}^n$ a $D_n^- = \{-a + \frac{ja}{n}\}_{j=0}^n$. Díky Důsledku 7.2.12 platí

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^-) \quad \text{a} \quad \int_0^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+).$$

Vzhledem k sudosti funkce f platí $\overline{S}(f, D_n^-) = \overline{S}(f, D_n^+)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy dostáváme

$$\begin{aligned} (R) \int_{-a}^a f(x) dx &= (R) \int_{-a}^0 f(x) dx + (R) \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \cdot (R) \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Je-li funkce f lichá, platí pro výše uvažovaná dělení D_n^- a D_n^+ vztah $\overline{S}(f, D_n^+) = -\underline{S}(f, D_n^-)$. Tím pádem máme

$$\begin{aligned} (R) \int_{-a}^a f(x) dx &= (R) \int_{-a}^0 f(x) dx + (R) \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+) + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

7.6.12. Příklad. Necht $p \in \mathbb{R}$ a f je p -periodická funkce.

- (a) Necht jsou intervaly $[a, b]$ a $[a + p, b + p]$ obsaženy v $\mathcal{D}(f)$ a f je riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Pak je riemannovsky integrovatelná na $[a + p, b + p]$ a platí $(R) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx$.
- (b) Necht jsou intervaly (a, b) a $(a + p, b + p)$ obsaženy v $\mathcal{D}(f)$ a f je newtonovsky integrovatelná funkce na (a, b) . Pak je newtonovsky integrovatelná na $(a + p, b + p)$ a platí $(N) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx$.

Řešení. (a) Necht $\{D_n\}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $v(D_n) \rightarrow 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení D'_n intervalu $[a + p, b + p]$, které vznikne z D_n přičtením p k dělicím bodům dělení D_n . Jelikož je f p -periodická, platí

$\overline{S}(\emptyset f, D'_n) = \overline{S}(\emptyset f, D_n)$ a $\underline{S}(\emptyset f, D'_n) = \underline{S}(\emptyset f, D_n)$. Tedy existuje $(R) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx$ a platí pro něj

$$(R) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

(b) Necht F je primitivní funkce k f na (a, b) . Pak je funkce

$$G(x) = F(x - p), \quad x \in (a + p, b + p),$$

primitivní k f na $(a + p, b + p)$. Vskutku, pro $x \in (a + p, b + p)$ platí

$$G'(x) = F'(x - p) = f(x - p) = f(x).$$

Jelikož máme

$$\begin{aligned} [G(x)]_{a+p}^{b+p} &= \lim_{x \rightarrow (b+p)-} G(x) - \lim_{x \rightarrow (a+p)+} G(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow (b+p)-} F(x - p) - \lim_{x \rightarrow (a+p)+} F(x - p) \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x) = [F(x)]_a^b, \end{aligned}$$

platí

$$(N) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

♣

7.6.13. Příklad. Ukažte, že součin dvou riemannovsky integrovatelných funkcí na omezeném uzavřeném intervalu je opět riemannovsky integrovatelná funkce. Dále najděte příklad newtonovsky integrovatelné funkce na otevřeném intervalu, jejíž druhá mocnina není newtonovsky integrovatelná.

Řešení. Mějme $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$. Protože

$$fg = \frac{1}{2} ((f + g)^2 - f^2 - g^2),$$

stačí dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}(a, b)$ pro $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Jelikož je riemannovsky integrovatelná funkce omezená, lze přičtením vhodné konstanty $c \in \mathbb{R}$ zařídit, že $f + c$ je nezáporná. Pak ale

$$f^2 = (f + c)^2 - c^2 - 2cf$$

je v $\mathcal{R}(a, b)$, pokud $f + c \in \mathcal{R}(a, b)$. Lze tedy předpokládat, že f je nezáporná riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Naším cílem je dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}(a, b)$.

Nejprve si rozmysleme, že pro omezenou $A \subset [0, \infty)$ platí

$$(\sup A)^2 = \sup\{a^2; a \in A\} \quad \text{a} \quad (\inf A)^2 = \inf\{a^2; a \in A\}. \quad (7.49)$$

Z nerovnosti $(\sup A)^2 \geq a^2$, $a \in A$, je totiž patrné, že $(\sup A)^2 \geq \sup\{a^2; a \in A\}$. Máme-li $\varepsilon(0, \infty)$ dáno, najdeme $\tilde{a} \in A$ takové, že $\tilde{a} > \sup A - \varepsilon$. Pak

$$\sup\{a^2; a \in A\} \geq (\tilde{a})^2 > (\sup A)^2 - \varepsilon(2 \sup A - \varepsilon).$$

Tedy dostáváme i opačnou nerovnost pro první tvrzení. Druhé se dokáže obdobně.

Mějme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolné. Podle Věty 7.2.15 najdeme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \varepsilon.$$

Nechť $M \in \mathbb{R}$ omezuje f na $[a, b]$. Pak máme z (7.49)

$$\begin{aligned} \overline{S}(f^2, D) - \underline{S}(f^2, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f^2 - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f^2 \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f \right)^2 - \left(\inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right)^2 \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right) \left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f + \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right) \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M \leq 2M (\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D)) \leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Věta 7.2.15 říká, že $f^2 \in \mathcal{R}(a, b)$.

Pro důkaz druhé části tvrzení stačí uvažovat funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, 1)$. Pak $f \in \mathcal{N}(0, 1)$, ale $f^2 \notin \mathcal{N}(0, 1)$. ♣

7.6.14. Příklad. Najděte příklad funkce f , která má primitivní funkci na intervalu $(-1, 1)$, ale $|f|$ ani f^2 primitivní funkci na $(-1, 1)$ nemá.

Řešení. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x^3}) + 3 \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Protože je funkce

$$g(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

spojitá na $(-1, 1)$, má zde primitivní funkci. Tedy i funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

má primitivní funkci na $(-1, 1)$. Ukážeme, že

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left| \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \right|, & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

primitivní funkci na $(-1, 1)$ nemá. Předpokládejme, že G je primitivní funkce k $|f|$ na $(-1, 1)$. Položme

$$H(x) = (R) \int_{-1}^x |f(t)| dt, \quad x \in (-1, 0).$$

Pak podle Věty 7.2.28 je H dobře definovaná funkce na $(-1, 0)$ a její derivace je zde rovna $|f|$. Věta 7.1.4 tedy dává existenci konstanty $c \in \mathbb{R}$ takové, že $H(x) = G(x) + c$, $x \in (-1, 0)$. Pak tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0-} H(x) = G(0) + c$$

je vlastní. Ukážeme, že tento fakt vede ke sporu. Počítejme pomocí Věty o substituci ??

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} H(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (R) \int_{-1}^x \frac{1}{t^2} \left| \sin\left(\frac{1}{t^3}\right) \right| dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (N) \int_{-1}^x \frac{1}{t^2} \left| \sin\left(\frac{1}{t^3}\right) \right| dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (N) \int_{\frac{1}{x}}^{-1} |\sin t^3| dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (N) \int_1^{\frac{1}{x}} |\sin t^3| dt \\ &= (N) \int_1^{\infty} |\sin t^3| dt \\ &= (N) \int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t^{\frac{2}{3}}} dt \\ &\geq (N) \int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t} dt = \infty \end{aligned}$$

(poslední rovnost plyne z Příkladu 7.4.11). Tím jsme dostali kýžený spor.

Pro funkci f^2 postupujeme obdobně pomocí výpočtu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} (R) \int_{-1}^x f^2(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0-} (N) \int_{-1}^x \frac{1}{t^4} \left(\sin\left(\frac{1}{t^3}\right) \right)^2 dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (N) \int_{\frac{1}{x}}^{-1} t^2 (\sin t^3)^2 dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (N) \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 (\sin t^3)^2 dt \\ &= (N) \int_1^{\infty} t^2 (\sin t^3)^2 dt \\ &= \frac{1}{3} (N) \int_1^{\infty} \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{6} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_1^{\infty} = \infty. \end{aligned}$$

♣

7.6.15. Příklad. Necht $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je monotónní spojitá funkce a necht konverguje $(N) \int_0^1 f(x) dx$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je nerostoucí a nezáporná. Označíme $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx, \end{aligned}$$

a tedy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

Na druhou stranu máme odhady

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \sum_{k=2}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= a_n + \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Jelikož integrál $\int_0^1 f(x) dx$ konverguje, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx = 0$. (Vskutku, je-li F primitivní funkce k f na $(0, 1)$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(x)]_0^{\frac{1}{n}} = 0.)$$

Dostáváme tak

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Platí tak $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. ♣

7.6.16. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

Řešení. Pro $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ platí

$$\log a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{k}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Použijeme-li předešlý Příklad 7.6.15 na funkci $f(x) = \log x$, dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \int_0^1 \log x dx = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 1 dx = -1.$$

Ze spojitosti funkce $\exp$ tak máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \exp(-1).$$

♣

7.7. Početní příklady na integrál

Výpočet primitivní funkce. Jestliže v níže uvedených příkladech na určení primitivní funkce není uveden interval, pak hledáme primitivní funkci na všech maximálních otevřených intervalech obsažených v definičním oboru integrandu.

7.7.1. Příklad. Spočtete

$$\int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx.$$

Řešení. Díky Větě ?? platí

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^4}} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5} \right) dx \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{9\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}, \quad x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, \infty).\end{aligned}$$

♣

7.7.2. Příklad. Spočtěte

$$\int \sin^4 x \, dx.$$

Řešení. Jelikož

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x,\end{aligned}$$

dostáváme

$$\int \sin^4 x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

7.7.3. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx.$$

Řešení. Máme

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx &= \int \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx = \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx - \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx \\ &\stackrel{c}{=} -\operatorname{cotgh} x - \operatorname{tgh} x \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \text{ a } x \in (0, \infty).\end{aligned}$$

♣

7.7.4. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci arctg na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Položíme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a $G(x) = \arctg x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom je f spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy podle Věty 7.1.15 platí

$$\begin{aligned} \int \arctg x \, dx &= \int 1 \cdot \arctg x \, dx = \int f(x)G(x) \, dx \\ &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x) \, dx \\ &= x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx && \text{(Věta 7.1.15)} \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx && \text{(Věta 7.1.11)} \\ &\stackrel{c}{=} x \arctg x - \frac{1}{2} \log(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

7.7.5. Příklad. Spočtěte

$$\int \left(\frac{\log x}{x} \right)^2 dx.$$

Řešení. Pomocí Věty 7.1.15 postupně odvodíme

$$\begin{aligned} \int \log^2 x \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2 \int \frac{\log x}{x^2} dx \\ &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2 \left(-\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \right) \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{x} (\log^2 x + 2 \log x + 2), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

♣

7.7.6. Příklad. Spočtěte

$$\int x^2 \arccos x \, dx.$$

Řešení. Dvojnásobným použitím Věty 7.1.15 dostáváme

$$\begin{aligned} \int x^2 \arccos x \, dx &= \frac{x^3 \arccos x}{3} + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 (\sqrt{1-x^2})' dx \\ &= \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{1}{3} \int 2x \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Pomocí substituce $t = 1 - x^2$ převedeme poslední integrál na hledání primitivní funkce $\int -\sqrt{t} \, dt$. Tedy

$$\int 2x \sqrt{1-x^2} \, dx \stackrel{c}{=} -\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

z čehož plyne závěr

$$\int x^2 \arccos x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{2}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

♣

7.7.7. Příklad. Spočtěte

$$\int \sin(\log x) \, dx \quad \text{a} \quad \int \cos(\log x) \, dx.$$

Řešení. Označíme-li $I_1 = \int \sin(\log x) \, dx$ a $I_2 = \int \cos(\log x) \, dx$, pomocí Věty 7.1.15 dostáváme pro $x \in (0, \infty)$ rovnosti

$$I_1 = x \sin(\log x) - I_2 \quad \text{a} \quad I_2 = x \cos(\log x) + I_1.$$

Množiny I_1 a I_2 jsou určeny až na konstantu. Použitím Lemmatu 7.6.1 máme po dosazení druhé rovnice do první a přičtení I_1 rovnost

$$2I_1 = I_1 + I_1 = x \sin(\log x) - x \cos(\log x) - I_1 + I_1 = x \sin(\log x) - x \cos(\log x) + C$$

(C značí množinu všech konstantních funkcí na $(0, \infty)$). Tedy

$$I_1 \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} (x \sin(\log x) - x \cos(\log x)), \quad x \in (0, \infty).$$

Obdobně odvodíme vztah

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} (x \sin(\log x) + x \cos(\log x)), \quad x \in (0, \infty).$$

♣

7.7.8. Příklad. Spočtěte

$$\int (2x-3)^{10} \, dx$$

Řešení. Máme

$$\int (2x-3)^{10} \, dx = \frac{1}{2} \int (2x-3)^{10} 2 \, dx.$$

Položíme-li ve Větě ?? $\varphi(x) = 2x-3$ a $f(t) = t^{10}$, máme $\int f(t) \, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{11} t^{11}$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy platí

$$\int (2x-3)^{10} \stackrel{c}{=} \frac{1}{22} (2x-3)^{11}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

7.7.9. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx.$$

Řešení. Zvolíme substituci $t = \varphi(x) = e^x$, čímž úlohu převedeme na výpočet

$$\int \frac{t}{1+t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \stackrel{c}{=} t - \log|1+t|$$

pro $t \in (-\infty, -1)$ a $t \in (-1, \infty)$. Proto

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx \stackrel{c}{=} e^x - \log(1+e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

7.7.10. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{1+\cos x} dx.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{1}{1+\cos x}$ je spojitá na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, a na těchto intervalech tedy budeme hledat její primitivní funkci. Platí

$$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Pro první člen platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \stackrel{c}{=} -\cotg x, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi) \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

V druhém členu použijeme Větu ?? pro funkci $\varphi(x) = \sin x$ a $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Jelikož $\int f(t) \stackrel{c}{=} -\frac{1}{t}$, $t \in (-\infty, 0)$ a $t \in (0, \infty)$, platí

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{\sin x}, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi) \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Položíme-li nyní

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-\cos x + 1}{\sin x}, & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

dostaneme spojitou funkci na $(-\pi, \pi)$, která je dle předchozích výpočtů a Věty 7.1.56 primitivní k h na $(-\pi, \pi)$. Rozšíříme-li g 2π -periodicky na $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, z periodicity uvažovaných funkcí plyne, že g je primitivní k h na množině $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ (viz Příklad 7.6.12). ♣

7.7.11. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx.$$

Řešení. Položme $\varphi(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{4+t^2}$ pro $t \in \mathbb{R}$. Potom

$$\int f(t) dt = \int \frac{1}{4\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)} \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx,$$

dostáváme podle Věty ??

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

7.7.12. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Předpokládejme nejprve, že $x \in (1, \infty)$. Potom platí

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

Položme dále $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (1, \infty)$ a $g(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ pro $t \in (-1, 1)$. Potom

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (1, \infty).$$

Protože $\int g(t) dt \stackrel{c}{=} -\arcsin t$, $t \in (-1, 1)$, platí podle Věty 7.1.32

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (1, \infty).$$

Podobně odvodíme, že

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (-\infty, -1).$$

♣

7.7.13. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x \log x \log \log x} dx.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(1, e)$ a (e, ∞) . Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x \log \log x}$ a $\varphi(x) = \log \log x$ pro $x \in (1, e)$. Potom $\varphi((1, e)) = (-\infty, 0)$. Definujme $g(t) = \frac{1}{t}$ pro $t \in (-\infty, 0)$. Potom

$$\int f(x) dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Protože $\int g(t) dt \stackrel{c}{=} \log |t|$, $t \in (-\infty, 0)$, máme podle druhé věty o substituci (Věta 7.1.30)

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \log |\varphi(x)| = \log |\log \log x|, \quad x \in (1, e).$$

Obdobně odvodíme, že

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \log |\log \log x|, \quad x \in (e, \infty).$$

♣

7.7.14. Příklad. Spočtěte

$$\int \operatorname{tg} x \, dx.$$

Řešení. Položme $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ pro $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $g(t) = \frac{1}{t}$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\int f(x) \, dx = - \int g(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx.$$

Tedy

$$\int f(x) \, dx \stackrel{c}{=} -\log |\cos x|, \quad x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

♣

7.7.15. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} \, dx.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x}$ je spojitá funkce na $\mathbb{R} \setminus 0$, kde tedy budeme hledat funkci k ní primitivní. Platí

$$h(x) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Položíme-li $\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{t^2 - 1}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, platí

$$h(x) = \frac{1}{\log \frac{3}{2}} f(\varphi(x)) \varphi'(x).$$

Protože

$$\int f(t) \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \quad \text{pro } t \in (-\infty, -1), t \in (-1, 1) \text{ a } t \in (1, \infty),$$

dostáváme

$$\int h(x) \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2(\log 3 - \log 2)} \log \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \text{ a } x \in (0, \infty).$$

♣

7.7.16. Příklad. Spočtěte

$$\int x \sqrt{2-5x} \, dx.$$

Řešení. Primitivní funkci k $h(x) = x \sqrt{2-5x}$ budeme hledat na intervalu $(-\infty, \frac{2}{5})$. Uvažujme substituci $\varphi(x) = 2-5x$, $x \in (-\infty, \frac{2}{5})$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \frac{2-t}{5}$, $(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{1}{5}$ a

$$h(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{2}{25} \sqrt{t} + \frac{1}{25} t^{\frac{3}{2}}, \quad t \in (0, \infty).$$

Jelikož

$$\int h \stackrel{c}{=} -\frac{4}{75}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{125}t^{\frac{5}{2}}, \quad t \in (0, \infty),$$

dle Věty 7.1.32 platí

$$\int h(x) \, dx \stackrel{c}{=} -\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}, \quad x \in (-\infty, \frac{2}{5}).$$

♣

7.7.17. Příklad. Spočtěte

$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx.$$

Řešení. Primitivní funkci $h(x) = \cos^5 x \sqrt{\sin x}$ budeme hledat na intervalech $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pišme

$$h(x) = \cos^4 x \sqrt{\sin x} \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x} \cos x.$$

Položíme-li $\varphi(x) = \sin x$ a $f(t) = (1-t^2)^2 \sqrt{t}$, $t \in (0, \infty)$, platí

$$\int f(t) \, dt = \int \left(\sqrt{t} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}} \right) \, dt \stackrel{c}{=} \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}, \quad t \in (0, \infty).$$

Pomocí Věty ?? dostáváme

$$\int h(x) \stackrel{c}{=} \frac{2}{3} \sin x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} \sin x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} \sin x^{\frac{11}{2}} \quad \text{pro } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

♣

7.7.18. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx,$$

kde a je kladné reálné číslo.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, a $\varphi(t) = a \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a \sqrt{1 + \sinh^2 t}} = \frac{1}{a \cosh t}$$

a

$$\varphi'(t) = a \cosh t.$$

Tedy

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \int 1 \, dt \stackrel{c}{=} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proto

$$\int f(x) \, dx \stackrel{c}{=} \varphi^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) = \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Poslední rovnost snadno odvodíme ze vzorce $\frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.)

♣

7.7.19. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$$

Řešení. Dle Věty ?? existují čísla $A, B, C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Pak platí

$$x^2 + 1 = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Ze spojitosti obou stran této rovnosti pak plyne, že je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Porovnáme-li koeficienty polynomy na levé straně s koeficienty polynomu na straně pravé, obdržíme $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ a $C = \frac{1}{2}$. Proto

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx &= \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \log|x-1| \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \log|x^2 - 1| \quad \text{pro } x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 1) \text{ a } x \in (1, \infty). \end{aligned}$$

♣

7.7.20. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Řešení. Jelikož polynom $x^4 + 1$ nemá reálné kořeny, lze ho vyjádřit jako součin dvou nerozložitelných kvadratických polynomů. Ty nalezneme buď za pomoci metody neurčitých koeficientů nebo pomocí rozkladu

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Rozklad na parciální vzorky tedy bude mít tvar

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Úpravou obdržíme rovnost

$$\begin{aligned} 1 &= (Ax + B)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\ &= x^3(A + C) + x^2(-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D) + x(A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D) + (B + D). \end{aligned}$$

Řešením příslušné soustavy lineárních rovnic dostáváme

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Pak

$$\begin{aligned}\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx &= \int \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x + \sqrt{2})}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx \\&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1).\end{aligned}$$

Obdobně postupujeme i u druhého členu, což vede k výsledku

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4 + 1} dx &\stackrel{c}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) \\&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

♣

7.7.21. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx.$$

Řešení. Použijeme substituci $y = x - 1$, čímž se problém převede na výpočet

$$\begin{aligned}\int \frac{(y+1)^3}{y^{100}} dy &= \int (y^{-97} + 3y^{-98} + 3y^{-99} + y^{-100}) dy \\&\stackrel{c}{=} -\frac{1}{96}y^{-96} - \frac{3}{97}y^{-97} - \frac{3}{98}y^{-98} - \frac{1}{99}y^{-99}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dy &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{96}(x-1)^{-96} - \frac{3}{97}(x-1)^{-97} - \frac{3}{98}(x-1)^{-98} \\&\quad - \frac{1}{99}(x-1)^{-99} \quad \text{pro } x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, \infty).\end{aligned}$$

♣

7.7.22. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx.$$

Řešení. Jelikož

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx = \frac{1}{5} \int \frac{x^5 5x^4}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx,$$

substitucí $y = x^5$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{y}{(y^2 + 2y + 2)^2} dy.$$

Díky Příkladu 7.1.18 pak máme

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{(y^2 + 2y + 2)^2} dy &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{2y + 2}{(y^2 + 2y + 2)^2} - \frac{2}{(y^2 + 2y + 2)^2} \right) dy \\ &= -\frac{1}{2(y^2 + 2y + 2)} - \int \frac{1}{((y + 1)^2 + 1)^2} dy \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2(y^2 + 2y + 2)} - \frac{y + 1}{2(y^2 + 2y + 2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(y + 1). \end{aligned}$$

Závěr jest tedy následující:

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx \stackrel{c}{=} -\frac{x^5 + 1}{10(x^{10} + 2x^5 + 2)} - \frac{1}{10} \operatorname{arctg}(x^5 + 1),$$

přičemž rovnost platí na $\mathbb{R}$. ♣

7.7.23. Příklad. Spočtete

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$ splňuje

$$h(x) = \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 x + 2) \cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Položíme $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a $f(t) = \frac{1}{t^2 + 2}$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož

$$\int f(t) dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

máme pro funkci

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

rovnost

$$\int h(x) \stackrel{c}{=} H(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Nechť nyní H je π -periodicky dodefinována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pak též $H'(x) = h(x)$ na této množině (viz Příklad 7.6.12). Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} H(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} H(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

je funkce

$$F(x) = \begin{cases} H(x) + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

díky Větě 7.1.56 primitivní k h na celém $\mathbb{R}$. ♣

7.7.24. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sin x} dx \quad \text{a} \quad \int \frac{1}{\cos x} dx.$$

Řešení. Pro funkci $h(x) = \frac{1}{\sin x}$ platí

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi). \end{aligned}$$

Položíme-li $\varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ a $f(t) = \frac{1}{t}$, máme rovnost

$$h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Proto

$$\int h(x) dx \stackrel{c}{=} \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|, \quad x \in (-\pi, 0), \quad x \in (0, \pi).$$

Díky periodicitě však tato rovnost platí i pro všechna $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pro výpočet druhé primitivní funkce uvažujme rovnost $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$, $x \in \mathbb{R}$, a substituční funkci $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + x$. Díky Větě ?? a předešlému výpočtu pak platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} dx \\ &\stackrel{c}{=} \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \quad \text{pro } x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

♣

7.7.25. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jeli-kož

$$\frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)(\sin^2 x)} = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)},$$

substitucí $t = \varphi(x) = \cos x$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} dt.$$

Snadným rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$\frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} = \frac{1}{3(2+t)} - \frac{1}{6(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)}.$$

Tedy

$$\int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \log(2+t) + \frac{1}{6} \log(1-t) - \frac{1}{2} \log(1+t)$$

pro $t \in (-\infty, -2)$, $t \in (-2, -1)$, $t \in (-1, 1)$ a $t \in (1, \infty)$. z čehož plyne

$$\int \frac{1}{(2+\cos x) \sin x} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \log(2+\cos x) + \frac{1}{6} \log(1-\cos x) - \frac{1}{2} \log(1+\cos x),$$

přičemž $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. ♣

7.7.26. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

Řešení. Použijeme substituci $t = \varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Stejně jako ve Větě ?? máme $\varphi^{-1}(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ a $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$. Dostáváme tak úlohu

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+2)^2} dt = \int \frac{t^2+2-1}{(t^2+2)^2} dt = \int \frac{1}{t^2+2} - \int \frac{1}{(t^2+2)^2} dt.$$

První integrál vyjde

$$\int \frac{1}{t^2+2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

zatímco druhý je dle rekurzivního vzorce 7.1.18 roven

$$\int \frac{1}{(t^2+2)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{2(1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2)} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dohromady dostáváme

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+2)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) - \frac{t}{4(2+t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dosazením tak získáváme rovnost

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx \stackrel{c}{=} \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Označme

$$F(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)}.$$

Z periodicity uvažovaných funkcí plyne, že F je primitivní k zadané funkci také na každém intervalu tvaru $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} F(x) = -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}},$$

funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + k \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + k \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a mimo body $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je primitivní k funkci zadané. Dle Věty 7.1.56 se tedy jedná o hledanou primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. ♣

7.7.27. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx.$$

Řešení. Použijeme substituci $t = \varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Pak $\varphi^{-1}(t) = 2 \operatorname{arctg} t$, $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ a $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Dosazením získáváme integrál

$$\int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2} dt = \frac{3}{5} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}(t + \frac{1}{3})\right)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3t + 1}{\sqrt{5}} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pak je funkce

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right)$$

primitivní k zadané funkci $f = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Z periodicity uvažovaných funkcí je F primitivní k f i na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\pi+} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + k \frac{\pi}{\sqrt{5}}, & x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + k \frac{\pi}{\sqrt{5}}, & x = \pi + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a mimo body $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je primitivní k funkci zadané. Dle Věty 7.1.56 se tedy jedná o hledanou primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. ♣

7.7.28. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

Řešení. Polynom $x^2 + x + 1$ je kladný na celé reálné ose, a tedy budeme hledat primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Použijeme Eulerovu substituci (viz Věta 7.1.62), tj. položíme $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$. Pak

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t}$$

a

$$(\varphi^{-1})'(t) = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2}.$$

Úlohu jsme tak převedli na hledání primitivní funkce

$$\begin{aligned} \int -2 \cdot \frac{(1 - 2t)(t^2 - t + 1)}{(-t^2 + t - 2)(1 - 2t)^2} dt &= 2 \int \frac{1}{1 - 2t} dt \\ &\stackrel{c}{=} -\log |1 - 2t|, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Proto platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x + x^2}} dx \stackrel{c}{=} -\log \left| 1 - 2 \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

7.7.29. Příklad. Spočtete

$$\int \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt[3]{x + 1}} dx.$$

Řešení. Použijeme Větu 7.1.59, takže položíme $\varphi(x) = \sqrt[6]{x + 1}$. Pak $(\varphi^{-1})(t) = t^6 - 1$ a $(\varphi^{-1})'(t) = 6t^5$. Úlohu jsme tak převedli na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{(1 - t^3)6t^5}{1 + t^2} dt.$$

Standardním postupem odvodíme identitu

$$\frac{t^8 - t^5}{t^2 + 1} = t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 + \frac{-t + 1}{t^2 + 1}.$$

Jelikož

$$\int \frac{-t + 1}{t^2 + 1} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int \frac{t}{t^2 + 1} dt \stackrel{c}{=} \arctg t - \frac{1}{2} \log(1 + t^2),$$

máme výsledek

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - t^3)6t^5}{1 + t^2} dt &\stackrel{c}{=} -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t \\ &\quad + 3 \log(1 + t^2) - 6 \arctg t, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Nyní jen stačí dosadit $t = \sqrt[6]{1 + x}$ a obdržíme tak hledanou primitivní funkci pro $x \in (-1, \infty)$.

♣

7.7.30. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$$

Řešení. Jelikož

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1},$$

zvolíme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (viz Věta 7.1.59). Pak $\varphi^{-1}(t) = -\frac{1+t^2}{1-t^2}$ a $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{-4t}{(1-t^2)^2}$. Úlohu tak převedeme na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{-4t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{4t}{(1+t)^3(1-t)} dt.$$

Standardním postupem obdržíme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{4t}{(1+t)^3(1-t)} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2}{(1+t)^3},$$

což znamená, že

$$\int \frac{4t}{(1+t)^3(1-t)} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}$$

pro $t \in (-\infty, -1)$, $t \in (-1, 1)$ a $t \in (1, \infty)$. Dosazením $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ dostaneme hledanou primitivní funkci na intervalu $(1, \infty)$. ♣

7.7.31. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx.$$

Řešení. Substitucí $t = \varphi(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$ dostáváme

$$\varphi^{-1}(t) = \left(\frac{t^2-1}{2t} \right)^2 \quad \text{a} \quad (\varphi^{-1})'(t) = \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}.$$

Tím jsme úlohu převedli na hledání primitivní funkce

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{(t^2+1)(t^2-1)}{2t^3} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3} dt \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \left(t - \log|t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) \end{aligned}$$

pro $t \in (-\infty, -1)$, $t \in (-1, 0)$ a $t \in (0, \infty)$. Dosazením $t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$ obdržíme hledanou primitivní funkci na intervalu $(0, \infty)$. ♣

7.7.32. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x \sqrt{-\log^2 x + 4 \log - 3}} dx.$$

Řešení. Substitucí $t = \log x$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{1}{\sqrt{-t^2 + 4t - 3}} dt.$$

Jelikož

$$\sqrt{-t^2 + 4t - 3} = \sqrt{(t-1)(3-t)} = (3-t) \sqrt{\frac{t-1}{3-t}}, \quad t \in (1, 3),$$

položíme $y = \varphi(t) = \sqrt{\frac{t-1}{3-t}}$. Pak $\varphi^{-1}(y) = \frac{3y^2+1}{y^2+1}$, $(\varphi^{-1})'(y) = \frac{4y}{(y^2+1)^2}$ a $3-t = \frac{2}{y^2+1}$. Tím obdržíme

$$\int \frac{1}{\frac{2}{y^2+1} \cdot y} \cdot \frac{4y}{(y^2+1)^2} dy = \int \frac{2}{y^2+1} dy \stackrel{c}{=} 2 \operatorname{arctg} y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Proto platí

$$\int \frac{1}{x \sqrt{-\log^2 x + 4 \log - 3}} dx \stackrel{c}{=} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\log x - 1}{3 - \log x}}, \quad x \in (e, e^3).$$

♣

7.7.33. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} dx.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(-\infty, 0)$. Výpočet započneme úpravou

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}}{(1+e^x) - (1-e^x)} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{1+e^x}}{2e^x} dx - \int \frac{\sqrt{1-e^x}}{2e^x} dx. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Podívejme se nejprve na první člen. V něm provedeme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{1+e^x}$, $x \in (-\infty, 0)$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \log(t^2 - 1)$ a $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2t}{t^2-1}$. Úlohu jsme tak převedli na výpočet primitivní funkce

$$\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt.$$

Dle Věty ?? existují čísla $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Úpravou a použitím spojitosti dostáváme rovnost

$$t^2 = A(t^3 + t^2 - t - 1) + B(t^2 + 2t + 1) + C(t^3 - t^2 - t + 1) + D(t^2 - 2t + 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Systém rovnic

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B - C + D &= 1 \\ -A + 2B - C - 2D &= 0 \\ -A + B + C + D &= 0 \end{aligned}$$

má řešení

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = \frac{1}{4}.$$

Proto platí

$$\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{4} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)}.$$

V druhém výrazu z (7.50) provedeme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{1+e^x}$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \log(1-t^2)$ a $(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$. Dostaneme tak integrál

$$\int \frac{-t^2}{(1-t^2)^2} dt.$$

Použitím první části výpočtu obdržíme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} dx &\stackrel{c}{=} \frac{1}{4} \log \left| \frac{t_1-1}{t_1+1} \right| - \frac{1}{4(t_1-1)} - \frac{1}{4(t_1+1)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \log \left| \frac{t_2-1}{t_2+1} \right| - \frac{1}{4(t_2-1)} - \frac{1}{4(t_2+1)}, \end{aligned}$$

kde $t_1 = \sqrt{1+e^x}$ a $t_2 = \sqrt{1-e^x}$. Výpočet přitom platí na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

Určitý integrál.

7.7.34. Příklad. Nalezněte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right)$$

Řešení. Jelikož

$$\frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n},$$

stačí dle Věty 2.2.44 určit limitu výrazu

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}}.$$

Uvážíme-li však funkci $f(x) = 2^x$, $x \in [0, 1]$, obdržíme riemannovsky integrovatelnou funkci na $[0, 1]$ (viz Věta 7.2.20) a dle Důsledku 7.2.13 máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} = (R) \int_0^1 2^x dx = (N) \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\log 2} [2^x]_0^1 = \frac{1}{\log 2}.$$

♣

7.7.35. Příklad. Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Označme

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a

$$F(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dle Věty 7.2.28 platí

$$F'(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (F(x^3) - F(x^2))' = g(x^3)3x^2 - g(x^2)2x \\ &= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

7.7.36. Příklad. Nalezněte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení. Pomocí l'Hospitalova pravidla odvodíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

♣

7.7.37. Příklad. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$$

Řešení. Použitím Věty 7.3.15 a Příkladu 7.6.12 dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{200\pi} \sqrt{1 - \cos y} \, dy = 50 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos y} \, dy \\ &= 50 \left(\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos y} \, dy + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos y} \, dy \right) \\ &= 100 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos y} \, dy = 100 \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1 + \cos y}} \, dy \\ &= 100 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = 200 \left[\sqrt{t} \right]_{t=0}^{t=2} = 200\sqrt{2}. \end{aligned}$$

♣

7.7.38. Příklad. Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos x} \, dx,$$

kde $\varepsilon \in [0, 1)$.

Řešení. Použitím substituce $\cotg \frac{x}{2} = t$, kde $\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos x} \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{t^2-1}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{t^2(1+\varepsilon) + 1-\varepsilon} \, dt \\ &= \frac{4}{1-\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \left(t \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)^2} \, dt \\ &= \left[\frac{4}{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{arctg} \left(t \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right) \right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{4}{\sqrt{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

♣

7.7.39. Příklad. Spočtěte integrál

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Řešení. Pomocí Věty 7.3.14 dostáváme

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} \, dx \\ &= \frac{3}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

♣

7.7.40. Příklad. Spočtete integrál

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| \, dx.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| \, dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\log x) \, dx + \int_1^e \log x \, dx \\ &= [-x \log x + x]_{\frac{1}{e}}^1 + [x \log x - x]_1^e \\ &= 2 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

♣

7.7.41. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx, \quad \int_1^\infty x^\alpha \, dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Jelikož

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1, & \alpha \neq -1, \\ [\log x]_0^1, & \alpha = -1 \end{cases}$$

integrál $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.

Podobně odvodíme, že $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

♣

7.7.42. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\log x|^\beta \, dx, \quad \int_{10}^\infty x^\alpha |\log x|^\beta \, dx,$$

kde α a β jsou reálné parametry.

Řešení. Uvažujme nejprve první integrál. Integrovaná funkce má v bodě $\frac{1}{2}$ vlastní limitu a na intervalu $(0, \frac{1}{2})$ je spojitá. Je tedy třeba vyšetřit její integrovatelnost u bodu 0.

Pokud $\alpha > -1$, zvolíme $\alpha' \in (-1, \alpha)$ a díky platnosti vztahu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-\alpha'} |\log x|^\beta = 0$$

odvodíme odhad

$$x^\alpha |\log x|^\beta \leq x^{\alpha'},$$

který platí ne nějakém okolí $(0, \delta)$. Jelikož $\int_0^\delta x^{\alpha'}$ konverguje (viz Příklad 7.7.41), konverguje dle Věty 7.4.1 i integrál původní.

Pokud $\alpha = -1$, platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} |\log x|^\beta = \begin{cases} -\left[\frac{(-\log x)^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}, & \beta \neq -1, \\ -[\log(-\log x)]_0^{\frac{1}{2}}, & \beta = -1. \end{cases}$$

Tedy integrál konverguje pro $\beta < -1$.

Je-li konečně $\alpha < -1$, zvolíme $\alpha' \in (\alpha, -1)$ a díky platnosti vztahu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-\alpha'} |\log x|^\beta = \infty$$

odvodíme odhad

$$x^\alpha |\log x|^\beta \geq x^{\alpha'},$$

který platí na nějakém okolí $(0, \delta)$. Z divergence integrálu $\int_0^\delta x^{\alpha'}$ pak plyne divergence integrálu zadaného.

Závěrem tedy lze říci, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$ nebo když $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

Druhý integrál bychom vyšetřili obdobným způsobem, přičemž by nám vyšlo, že konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ nebo $\alpha = -1$ a $\beta < -1$. ♣

7.7.43. Příklad. Dokažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

Řešení. Snadno ověříme, že integrál konverguje. Vskutku,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \log x}{\log x} = 1,$$

a $\log x$ je funkce integrovatelná u 0 (viz Příklad 7.7.42).

Nyní pomocí substituce $x = 2t$ máme

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(2 \sin t \cos t) dt \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2 dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t) dt \right).\end{aligned}$$

Jelikož substitucí $t = \frac{\pi}{2} - u$ v posledním integrálu získáváme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u) du,$$

platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = \frac{\pi \log 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx.$$

Tím je požadovaná rovnost dokázána. ♣

7.7.44. Příklad. Vypočítejte integrály

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx, \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{a} \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

Řešení. První integrál převedeme pomocí per partes na

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = [x \log(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = \frac{\pi \log 2}{2}.$$

V druhém provedeme substituci $x = \sin t$ a dostaneme

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) dt = -\frac{\pi \log 2}{2}.$$

Třetí pak opět pomocí per partes vyčíslíme jako

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx = [\arcsin x \log x]_0^1 - \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi \log 2}{2}.$$

♣

Konvergence integrálu.

7.7.45. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx.$$

Řešení. Integrandy jsou spojité funkce, takže stačí vyšetřit existenci integrálů v krajních bodech daných intervalů. Podívejme se nejprve na funkci $f(x) = \frac{-\log x}{1-x^2}$. Pak pro $g(x) = -\log x$ platí $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Jelikož má $g(x)$ u 0 konvergentní integrál, dle Věty 7.4.5 má u 0 i $f(x)$ konvergentní integrál. Tedy i $-f(x)$ (což je zadaná funkce) má u 0 konvergentní integrál.

U bodu 1 platí

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\log x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\log x}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2},$$

a tedy je zadaná funkce u 1 jakožto omezená funkce integrovatelná.

Závěr tedy je, že první integrál konverguje.

Druhý integrand u 0 srovnáme s funkcí $\log x$, co je funkce u 0 integrovatelná.

U nekonečna se integrand chová jako $\frac{\log x}{x^2}$ (tj. pro $f(x) = \frac{\log x}{1+x^2}$ a $g(x) = \frac{\log x}{x^2}$ platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, co je integrovatelná funkce. Tedy i f je integrovatelná u nekonečna. Dohromady máme, že i druhý integrál je konvergentní.

♣

7.7.46. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Integrand $f(x)$ je nezáporná spojitá funkce na $(0, \infty)$, budeme tak vyšetřovat integrovatelnost v krajních bodech tohoto intervalu. Položíme $g(x) = x^{3-\alpha}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Dle Věty 7.4.5 konverguje f u 0 právě tehdy, když u 0 konverguje g . To však nastává právě pro $3 - \alpha > -1$, tj. $\alpha < 4$.

U nekonečna uvažíme funkci $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1,$$

a tedy f má u nekonečna konvergentní integrál právě tehdy, když g je integrovatelná u nekonečna. To však nastává právě pro $\alpha - 1 > 1$.

Dohromady tak máme, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (2, 4)$.

♣

7.7.47. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

Řešení. Daná funkce $f(x)$ je integrovatelná u 0, neboť zde je omezená ($\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ a $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je omezená). U nekonečna f srovnáme s funkcí $g(x) = \frac{1}{x^2}$, neboť pak máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Jelikož je g integrovatelná u nekonečna, je i f integrovatelná u nekonečna. Proto je f integrovatelná na $(0, \infty)$.

♣

7.7.48. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \operatorname{tg}^\alpha x \, dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Co se týče integrovatelnosti daná funkce f u 0, položíme $g(x) = x^{\alpha+2}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^p \frac{1}{\cos^p x} = -\frac{1}{2}.$$

Tedy f je integrovatelná u 0 právě tehdy, když g je integrovatelná u 0. To nastává v případě $\alpha > -3$.

Situaci u bodu $\frac{\pi}{2}$ nám pomůže objasnit funkce

$$g(x) = \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \sin^\alpha x \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \right)^\alpha \frac{\log(\cos x)}{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\log\left(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}\right) + \log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1. \end{aligned}$$

Jelikož je funkce g integrovatelná u $\frac{\pi}{2}$ zleva právě tehdy, když $\alpha < 1$ (viz Příklad 7.7.42, máme dle Věty 7.4.5 nutnou a postačující podmínku pro integrovatelnost f u $\frac{\pi}{2}$).

Závěr tedy jest, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-3, 1)$. ♣

7.7.49. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Vzhledem ke spojitosti dané funkce f na $[1, \infty)$ stačí vyšetřit její integrovatelnost v nekonečnu. Je-li $\alpha > 1$, platí $|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, a tedy f je absolutně integrovatelná. Je-li $\alpha \in (0, 1]$, má $\sin x$ omezenou primitivní funkci a $x^{-\alpha}$ je klesající funkce s limitou 0 v nekonečnu. Dle Věty 7.4.8 je integrál z f konvergentní. Pokud $\alpha \in (-\infty, 0]$, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x x^{-\alpha} \, dx \right| \geq (2n\pi)^{-\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x \, dx = 2 \cdot (2n\pi)^{-\alpha}.$$

Z tohoto odhadu vidíme neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro primitivní funkci k f v nekonečnu. Integrál tak není v tomto případě konvergentní.

Uvažujme nyní znovu $\alpha \in (0, 1]$. Pak pro přirozená čísla $n < m$ platí

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi}^{2m\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx &= \sum_{k=n}^{m-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \\ &\geq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(2(k+1)\pi)^\alpha} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= 2^{1-\alpha} \pi^{-\alpha} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-\alpha}$ divergentní, plyne z předcházejícího odhadu neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro primitivní funkci f v nekonečnu.

Integrál je tak konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 0$, a je absolutně konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

♣

7.7.50. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) x^{-\alpha} dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Jelikož

$$\cos x = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

a

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

dostáváme pro danou funkci f vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x^{4-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Tedy f je integrovatelná u 0 právě tehdy, když $4 - \alpha > -1$, tj. $\alpha < 5$.

Zkoumejme nyní situaci v nekonečnu. Pověsimně si, že $e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-\alpha}$ je (absolutně) integrovatelná v nekonečnu pro každé α . To totiž ihned plyne z odhadu

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-\alpha} \leq x^{-2}$$

platného na nějakém okolí ∞ , který odvodíme z limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^\gamma = 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pro $\alpha > 1$ tak máme odhad

$$|f(x)| \leq \frac{2}{x^\alpha},$$

a tedy je f absolutně integrovatelná.

Pokud $\alpha \in (0, 1]$, jsou funkce $\frac{\cos x}{x^\alpha}$ a $e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-\alpha}$ integrovatelné, a tedy i f je integrovatelná. Není však absolutně integrovatelná, neboť máme odhad

$$|f(x)| \geq \frac{|\cos x|}{x^\alpha} - e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-\alpha},$$

kde na pravé straně je součet divergentní a konvergentní funkce, tj. funkce s divergentním integrálem.

Pokud $\alpha \in (-\infty, 0]$, integrál $\int_{10}^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ diverguje (viz Příklad 7.7.49). Jelikož $\int_{10}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-\alpha} dx$ konverguje, diverguje i $\int_{10}^{\infty} f(x) dx$.

Závěr tedy jest, že $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (0, 5)$. Dále daný integrál konverguje absolutně právě tehdy, když $\alpha \in (1, 5)$.

♣

7.7.51. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálů

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\sin x}{x + 2 \sin x} dx, \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2 \sin x} dx.$$

Řešení. U prvního integrálu vyšetřujeme díky nezápornosti integrandu pouze absolutní konvergenci. Jelikož však

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{2x}$ diverguje a $\int_{10}^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x}$ konverguje (viz Věta 7.4.8), diverguje i integrál $\int_{10}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$.
U druhého integrálu odhadneme

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin x}{x + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{x} \right| &= \left| \frac{x \sin x - x \sin x - 2 \sin^2 x}{x(x + 2 \sin x)} \right| \\ &\leq \frac{2}{x(x - 2)} \end{aligned}$$

Funkce $\frac{\sin x}{x + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{x}$ je tak integrovatelná (viz Věta 7.4.1), což díky integrovatelnosti funkce $\frac{\sin x}{x}$ implikuje integrovatelnost funkce

$$\frac{\sin x}{x + 2 \sin x} = \left(\frac{\sin x}{x + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{x} \right) + \frac{\sin x}{x}.$$

U absolutní konvergence použijeme odhad

$$\left| \frac{\sin x}{x + 2 \sin x} \right| \geq \frac{|\sin x|}{x + 2} = \frac{|\sin x|}{x} \frac{x}{x + 2},$$

který dává díky Příkladu 7.7.49 a Větě 7.4.8(A) divergenci daného integrálu.

U třetího integrálu postupujeme obdobně jako u předešlého, dostaneme však odhad

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| = \left| \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2 \sin x)} \right| \geq \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}.$$

Snadno odvodíme, že funkce na pravé straně této nerovnosti není integrovatelná, a tedy je funkce

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2 \sin x} = \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

součtem funkce s konvergentním integrálem a funkce s divergentním integrálem. Jedná se tedy o neintegrovatelnou funkci.

♣

7.7.52. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} x \sin x^4 dx$$

Řešení. U 0 je funkce spojitá, a tedy integrovatelná. Dále píšme

$$\int_1^{\infty} x \sin x^4 dx = \int_1^{\infty} 4x^3 \sin x^4 \frac{1}{4x^2} dx.$$

Jelikož je funkce $f 4x^3 \sin x^4 = -\cos x^4$ omezená a $\frac{1}{4x^2}$ konverguje v nekonečno monotónně k nule, konverguje integrál dle Věty 7.4.8(D).

U absolutní konvergence je třeba znovu vyzkoumat integrovatelnost v nekonečno. K tomuto účelu použijeme substituci $x^4 = y$ a obdržíme

$$\int_1^{\infty} x |\sin x^4| dx = \int_1^{\infty} \sqrt[4]{y} \frac{\sin y}{4y^{\frac{3}{4}}} dy = \frac{1}{4} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{1}{2}}} dy,$$

což je divergentní integrál (viz Příklad 7.7.49). Tedy je daný integrál absolutně divergentní.

♣

7.7.53. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} \sin(x + \log x) dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Označme $\varphi(x) = x + \log x$. Jelikož $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, vidíme, že $1 \leq \varphi' \leq 2$ a φ' klesá. Tedy φ' i $\frac{1}{\varphi'}$ jsou omezené monotónní funkce. Dle Věty 7.4.8(A) tak platí

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} \sin \varphi(x) dx \text{ konverguje} \iff \int_1^{\infty} x^{\alpha} (\sin \varphi(x)) \varphi'(x) dx \text{ konverguje}.$$

Budeme tak vyšetřovat konvergenci druhého integrálu.

Označme $\psi(x) = \varphi'(x) \sin \varphi(x)$. Pak $\int \psi(x) dx = -\cos \varphi(x)$ je omezená, a tedy v případě $\alpha < 0$ integrál konverguje dle Věty 7.4.8(D). Pokud $\alpha = 0$, integrál diverguje, neboť

$$\int_1^{\infty} \varphi'(x) \sin \varphi(x) dx = [-\cos \varphi(x)]_1^{\infty}$$

neexistuje (viz Příklad 4.4.3). Je-li $\alpha > 0$, pak integrál diverguje. V opačném případě by totiž integrál

$$\int_1^\infty \psi(x) dx = \int_1^\infty x^\alpha \psi(x) x^{-\alpha} dx$$

konvergoval dle Věty 7.4.8(A), což dle předcházející části neplatí. Integrál tak konverguje pro $\alpha < 0$.

Vyzkoumejme nyní absolutní konvergenci. Podobně jako výše odvodíme z Věty 7.4.8(A), že

$$\int_1^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| dx \text{ konverguje} \iff \int_1^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx \text{ konverguje.}$$

Pro případ $\alpha < -1$ je zjevně integrál konvergentní. Předpokládejme, že $\alpha \in [-1, 0)$. Zvolme libovolné $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, a nechť $x, y \in [1, \infty)$ splňují $\varphi(a) = n\pi$ a $\varphi(b) = m\pi$ (Takové body existují, neboť $\varphi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ je rostoucí bijekce.) Pak

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx &\geq \int_a^b x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx \\ &\geq b^\alpha \int_a^b |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx = b^\alpha \int_{n\pi}^{m\pi} |\sin y| dy \\ &= b^\alpha 2(m - n). \end{aligned}$$

Jelikož

$$b \leq b + \log b = \varphi(b) = m\pi,$$

platí $b^\alpha \geq (m\pi)^\alpha$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx &\geq 2(m^{1+\alpha} - b^\alpha n) \\ &= 2(m^{1+\alpha} - n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha) \\ &\geq 2(1 - n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha). \end{aligned} \tag{7.51}$$

Protože $\lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha = 0$, dostáváme z (7.51) neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky v nekonečnu.

Vskutku, nechť $x_0 \in (1, \infty)$ je libovolné. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\varphi^{-1}(n\pi) > x_0$ a nechť $m > n$ je takové přirozené číslo, že $n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha < \frac{1}{2}$. Pak (7.51) dává

$$\int_{x_0}^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx \geq \int_a^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx > 1.$$

Tím je ukázáno, že daný integrál diverguje absolutně pro $\alpha \in [-1, 0)$. ♣

7.7.54. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\sin x)}{x} dx$$

Řešení. Ukážeme nejprve, že pro libovolné $a < b$ platí

$$\left| \int_a^b \sin(\sin x) \, dx \right| \leq 2\pi. \quad (7.52)$$

Je-li totiž $b - a \leq 2\pi$, pak odhad zjevně platí. V opačném případě nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a + k2\pi \geq b$ a $a + (k-1)2\pi < b$. Pak

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sin(\sin x) \, dx \right| &= \left| \int_a^{a+k2\pi} \sin(\sin x) \, dx - \int_b^{a+2k\pi} \sin(\sin x) \, dx \right| \\ &= \left| \int_b^{a+2k\pi} \sin(\sin x) \, dx \right| \leq 2\pi, \end{aligned}$$

neboť

$$\int_a^{a+k2\pi} \sin(\sin x) \, dx = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{a+n2\pi}^{a+(n+1)2\pi} \sin(\sin x) \, dx = 0.$$

Tato rovnost platí díky výpočtu

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(\sin x) \, dx &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\sin x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x) \, dx + \int_0^{\pi} \sin(\sin(y + \pi)) \, dy \\ &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x) \, dx + \int_0^{\pi} \sin(-\sin y) \, dy = 0. \end{aligned}$$

Tím je (7.52) dokázána.

Ověřme nyní platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro daný integrál. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, položme $x_0 = \max\{1, 4\pi\varepsilon^{-1}\}$. Pak pro $a, b \in (x_0, \infty)$, $a < b$, existuje dle Věty 7.4.13 $c \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^b \frac{\sin(\sin x)}{x} \, dx = \frac{1}{a} \int_a^c \sin(\sin x) \, dx + \frac{1}{b} \int_c^b \sin(\sin x) \, dx.$$

Z toho dostáváme díky (7.52)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{\sin(\sin x)}{x} \, dx \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \left| \int_a^c \sin(\sin x) \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{4\pi} \left| \int_c^b \sin(\sin x) \, dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} 2\pi + \frac{\varepsilon}{4\pi} 2\pi = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím je konvergence daného integrálu dokázána. ♣

7.7.55. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x} \, dx.$$

Řešení. Platí $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} x$, takže můžeme psát

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x} dx = \int_0^1 (\sin x^{-2})(-2x^{-3}) \frac{-x^2}{2} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} dx.$$

Jelikož je $f(\sin x^{-2})(-2x^{-3}) dx = \cos x^{-2}$ omezená a $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x^2}{2} = 0$, konverguje dle Věty 7.4.8(D) integrál

$$\int_0^1 (\sin x^{-2})(-2x^{-3}) \frac{-x^2}{2} dx.$$

K ověření konvergence stačí nyní dle Věty 7.4.8(A) ukázat, že je funkce $x \mapsto \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ na nějakém pravém okolí bodu 0 omezená a monotónní. Její omezenost je zřejmá, neboť má v 0 vlastní limitu. Dále platí

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{0\},$$

a tedy pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

platí

$$f'(0) = 0 \quad \text{a} \quad f''(0) = -\frac{2}{3}.$$

Jelikož má f spojitou druhou derivaci, platí $f'' < 0$ pro nějaké $(0, \delta)$. Tedy f' klesá na $(0, \delta)$, což implikuje, že $f' < 0$ na $(0, \delta)$. Tedy f klesá na $(0, \delta)$. Proto je funkce $\frac{1}{f}$ monotónní na $(0, \delta)$ a důkaz je tak hotov. ♣

Metrické prostory

Tato kapitola je věnována metrickým prostorům, tj. množinám, na kterých je dán způsob měření vzdálenosti. Metrické prostory nám umožní definovat pojem spojitosti obecněji než tomu bylo v Kapitole 4. Dále budeme zkoumat některé důležité typy metrických prostorů. Výsledky této kapitoly budeme později často používat.

8.1. Základní pojmy

8.1.1. Definice. Necht P je množina a $\varrho: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ je funkce splňující následující tři podmínky:

- (a) $\forall x, y \in P: \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (b) $\forall x, y \in P: \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- (c) $\forall x, y, z \in P: \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Potom funkci ϱ nazýváme **metrikou** na P a dvojici (P, ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**. Jsou-li x, y prvky množiny P , pak nezáporné číslo $\varrho(x, y)$ nazýváme jejich **vzdáleností**.

8.1.2. Metrický prostor (P, ϱ) sestává z množiny prvků P a z funkce ϱ , pomocí které mezi prvky P měříme vzdálenost. V tomto kontextu budeme o prvcích množiny P hovořit jako o bodech. Definice metrického prostoru připouští i možnost, že P je prázdná množina. Podmínky (a)–(c) vyjadřují přirozené požadavky, které by měl splňovat libovolný způsob měření vzdálenosti na jakékoli množině. Podmínka (a) vyjadřuje jednak to, že dva různé body mají vždy od sebe kladnou vzdálenost a jednak to, že vzdálenost každého bodu od sebe sama je vždy nulová. Podmínka (b) říká, že vzdálenost bodu x od bodu y je vždy stejná jako vzdálenost bodu y od bodu x . Podmínka (c), kterou nazýváme **trojúhelníkovou nerovností**, je dalším přirozeným požadavkem.

8.1.3. Úmluva. Přestože metrický prostor (P, ϱ) je dvojice (množina, metrika), často používáme obratu „metrický prostor P “, pokud je volba metriky zřejmá z kontextu.

Příklady metrických prostorů. Následující série příkladů ilustruje právě definovaný pojem metrického prostoru. S metrickými prostory z těchto příkladů se budeme setkávat i později.

8.1.4. Příklad. Definujme funkci ϱ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}, \varrho)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x - y| \in [0, \infty)$. Stačí tedy ověřit platnost podmínek (a)–(c) z Definice 8.1.1. Podmínky (a) a (b) jsou však zřejmě splněny a podmínka (c) plyne z Důsledku 1.6.12(b). ♣

8.1.5. Úmluva. V dalším textu budeme na metrickém prostoru $\mathbb{R}$ vždy uvažovat metriku ϱ definovanou v Příkladu 8.1.4, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

Občas budeme (nejen v této kapitole) využívat následující užitečnou nerovnost.

8.1.6. Věta (Cauchyova nerovnost). Necht $n \in \mathbb{N}$ a necht $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right). \quad (8.1)$$

Důkaz. Pokud jsou všechna čísla $a_1, \dots, a_n$ rovna nule, pak v (8.1) nastává rovnost. Předpokládejme nyní, že alespoň jedno z čísel $a_1, \dots, a_n$ je různé od nuly. Uvažujme výraz

$$\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2, \quad (8.2)$$

který lze přepsat na tvar

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Koeficient u x^2 je nenulový a výraz (8.2) je nezáporný pro libovolné x reálné, takže rovnice

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$$

má nejvýše jeden reálný kořen. Diskriminant této rovnice je tedy menší nebo roven nule. Odtud plyne, že

$$4\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0,$$

odkud snadno plyne (8.1). ■

8.1.7. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_2 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_2(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 8.1.1 jsou zřejmě splněny. Ověříme podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Označme $a_i = x_i - y_i$ a $b_i = y_i - z_i$, $i = 1, \dots, n$. Potom z Cauchyovy nerovnosti (Věta 8.1.6) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \varrho_2(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \\ &= \varrho_2(x, y) + \varrho_2(y, z). \end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ je metrický prostor. ♣

8.1.8. Funkci ϱ_2 z Příkladu 8.1.7 nazýváme **eukleidovskou metrikou** na $\mathbb{R}^n$. Symbol ϱ_2 je zvolen z důvodů, které budou zřejmé z dalšího textu. Pro $n = 1$ splývá metrika ϱ_2 na $\mathbb{R}$ s metrikou ϱ zavedenou v Příkladu 8.1.4. Pokud budeme pracovat s prostorem $\mathbb{R}^n$, budeme na něm vždy uvažovat metricku ϱ_2 , nebude-li výslovně řečeno jinak.

8.1.9. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_1 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad (8.3)$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_1(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 8.1.1 jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom z Důsledku 1.6.12(b) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \varrho_1(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &= \varrho_1(x, y) + \varrho_1(y, z). \end{aligned}$$

Tím je ověřena platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ je metrický prostor. ♣

8.1.10. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_∞ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\}, \quad (8.4)$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_\infty(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 8.1.1 jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že

$$\varrho_\infty(x, z) = \max\{|x_i - z_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = |x_j - z_j|.$$

Podle Důsledku 1.6.12(b) pak máme

$$|x_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|.$$

Protože

$$|x_j - y_j| \leq \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \varrho_\infty(x, y)$$

a

$$|y_j - z_j| \leq \max\{|y_i - z_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \varrho_\infty(y, z),$$

dostáváme celkem

$$\varrho_\infty(x, z) \leq \varrho_\infty(x, y) + \varrho_\infty(y, z).$$

Tím jsme ověřili platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ je metrický prostor. ♣

Před formulací dalšího příkladu připomeňme, že symbol $\mathbb{C}$ značí množinu všech komplexních čísel.

8.1.11. Příklad (Gaussova rovina). Definujme funkci $\varrho: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ předpisem $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Dokažte, že $(\mathbb{C}, \varrho)$ je metrický prostor.

Řešení. Každé komplexní číslo je jednoznačně určeno dvěma reálnými složkami – reálnou a imaginární. Funkci ϱ pak z těchto složek počítáme podle stejného vzorce, kterým počítáme vzdálenost ϱ_2 dvou bodů v $\mathbb{R}^2$ pomocí jejich souřadnic. Podle Příkladu 8.1.7 je tedy $(\mathbb{C}, \varrho)$ metrický prostor. ♣

8.1.12. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme symbolem $\mathcal{C}([a, b])$ množinu všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$. Definujme funkci ϱ_{sup} na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ předpisem

$$\varrho_{\text{sup}}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{sup} nazýváme **supremovou metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.

Řešení. Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Díky spojitosti funkce absolutní hodnota, větě o spojitosti a aritmetických operacích (Věta 4.2.4) a větě o spojitosti složené funkce (Věta ??) platí $|f - g| \in \mathcal{C}([a, b])$. Podle věty o existenci extrémů (Věta 4.3.11) nabývá funkce $|f - g|$ na $[a, b]$ svého maxima, takže funkce ϱ_{sup} je na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$

dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\sup}(f, g) \in [0, \infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Podmínky (a) a (b) z Definice 8.1.1 jsou zřejmě splněny. Necht $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{y \in [a, b]} |f(y) - g(y)| + \sup_{y \in [a, b]} |g(y) - h(y)| \\ &= \varrho_{\sup}(f, g) + \varrho_{\sup}(g, h). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že číslo $\varrho_{\sup}(f, g) + \varrho_{\sup}(g, h)$ je horní zavorou množiny

$$\{|f(x) - h(x)|; x \in [a, b]\},$$

a tedy podle definice suprema platí

$$\varrho_{\sup}(f, h) \leq \varrho_{\sup}(f, g) + \varrho_{\sup}(g, h).$$

Tím je ověřena podmínka (c) z Definice 8.1.1. Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\sup})$ je metrický prostor. ♣

8.1.13. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Definujme funkci ϱ_{int} na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ předpisem

$$\varrho_{\text{int}}(f, g) = (R) \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{int} nazýváme **integrální metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.

K řešení příkladu budeme potřebovat následující lemma.

8.1.14. Lemma. Necht $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a $h \in \mathcal{C}([a, b])$. Necht existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $h(x_0) > 0$. Potom $\int_a^b |h(x)| dx > 0$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že x_0 je vnitřním bodem $[a, b]$. Díky spojitosti funkce h nalezneme $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(x_0)$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Potom

$$\begin{aligned} \int_a^b |h(x)| dx &= \int_a^{x_0-\delta} |h(x)| dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)| dx + \int_{x_0+\delta}^b |h(x)| dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)| dx \geq \frac{1}{2}h(x_0) \cdot 2\delta = \delta h(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že $x_0 = a$. Potom díky spojitosti funkce h nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\delta < b - a$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(a)$ pro každé $x \in [a, a + \delta)$. Potom

$$\int_a^b |h(x)| dx \geq \int_a^{a+\delta} |h(x)| dx \geq \frac{1}{2}h(a) \cdot \delta > 0.$$

V případě $x_0 = b$ postupujeme obdobně. ■

Řešení Příkladu 8.1.13. Podle Věty ?? je funkce ϱ_{int} dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\text{int}}(f, g) \in [0, \infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Jestliže $f = g$, potom zřejmě $\varrho_{\text{int}}(f, g) = 0$. Jestliže naopak $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ a platí $\varrho_{\text{int}}(f, g) = 0$, pak podle Lemmatu 8.1.14 je $f(x) - g(x) = 0$ pro každé $x \in [a, b]$, tedy $f = g$. Tím je ověřena podmínka (a) z Definice 8.1.1. Podmínka (b) je zřejmě splněna. Ověříme platnost podmínky (c). Necht $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom pomocí Důsledku 1.6.12(b) a linearitu Riemannova integrálu (Věta ??) dostáváme

$$\begin{aligned}\varrho_{\text{int}}(f, h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)| dx \\ &\leq \int_a^b (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - h(x)| dx \\ &= \varrho_{\text{int}}(f, g) + \varrho_{\text{int}}(g, h).\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ je metrický prostor. ♣

8.1.15. Příklad. Necht P je libovolná množina. Definujme funkci $\varrho_{\text{diskr}}: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dokažte, že potom $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{diskr} nazýváme **diskrétní metrikou** na P a $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ **diskrétním metrickým prostorem**.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a) a (b) z Definice 8.1.1 jsou zřejmě splněny. Necht $x, y, z \in P$. Jestliže $x = z$, potom $\varrho_{\text{diskr}}(x, z) = 0$, a tedy nerovnost v (c) je zřejmě splněna. Jestliže $x \neq z$, potom $x \neq y$ nebo $z \neq y$. Odtud plyne, že

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) + \varrho_{\text{diskr}}(y, z) \geq 1 = \varrho_{\text{diskr}}(x, z).$$

Podmínka (c) je tedy splněna. Dokázali jsme, že $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je metrický prostor. ♣

8.1.16. Příklad. Necht P je množina všech posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, tedy $P = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, neboli

$$P = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}; \forall n \in \mathbb{N}: x_n \in \{0, 1\}\}.$$

Pro posloupnosti $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ z P definujme

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y, \\ \frac{1}{k}, & \text{pokud } x \neq y, \text{ kde } k = \min\{m \in \mathbb{N}; x_m \neq y_m\}. \end{cases}$$

Dokažte, že (P, ϱ) je metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ je zřejmě hodnota $\varrho(x, y)$ dobře definována a platí $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Jsou také zřejmě splněny vlastnosti (a), (b) z Definice 8.1.1. Necht $x, y, z \in P$. Ověříme platnost trojúhelníkové nerovnosti $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. Jestliže $x = z$, potom nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $x \neq z$. Potom existuje nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq z_k$. Odtud plyne, že $x_k \neq y_k$ nebo $z_k \neq y_k$, a tedy $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \frac{1}{k}$. Máme tak $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$. Ověřili jsme, že (P, ϱ) je metrický prostor. ♣

Normované lineární prostory. Výčet příkladů metrických prostorů nyní rozšíříme o normované lineární prostory.

8.1.17 (vektorový prostor). Symbol $\mathbb{F}$ bude značit množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$. Pro porozumění následující definici je třeba znát pojem *vektorového prostoru nad $\mathbb{F}$* . Tento pojem jakož i definice dalších důležitých pojmů lineární algebry a související základní výsledky je možné nalézt například v [4]. Vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ chápeme jako trojici $(X, +, \cdot)$, kde X je množina, $+$ je operace sčítání na X a $\cdot$ je operace násobení prvků X prvky z $\mathbb{F}$. Většinou budeme ale používat kratší termín „vektorový prostor X “ místo přesnějšího „vektorový prostor $(X, +, \cdot)$ “. Nulový prvek budeme značit symbolem 0.

8.1.18. Definice. Necht X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme **normou** na X , jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

- (a) $\forall x \in X: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (b) $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- (c) $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ pak nazýváme **normovaným lineárním prostorem** nad tělesem $\mathbb{F}$. Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, hovoříme o **reálném** normovaném lineárním prostoru, pokud $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, hovoříme o **komplexním** normovaném lineárním prostoru.

8.1.19. Věta. Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Definujme zobrazení $\varrho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ předpisem $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Potom ϱ je metrika na X .

Důkaz. Necht $x, y \in X$. Potom zřejmě $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Ověříme podmínky (a)–(c) z Definice 8.1.1. Rovnost $\varrho(x, y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x - y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = 0$, neboli $x = y$. Použijeme-li podmínku (b) z Definice 8.1.18 pro speciální volbu $\lambda = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned}\varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \cdot \|y - x\| \\ &= \|y - x\| = \varrho(y, x),\end{aligned}$$

tedy podmínka (b) z Definice 8.1.1 je splněna. Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky podmínce (c) z Definice 8.1.18

$$\begin{aligned}\varrho(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(y, z).\end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy i podmínku (c) z Definice 8.1.1. Tím je důkaz dokončen. ■

8.1.20 (normovaný lineární prostor jako metrický prostor). V souladu s Větou 8.1.19 budeme každý normovaný lineární prostor považovat také za prostor metrický s metrikou definovanou pomocí normy způsobem uvedeným v tvrzení Věty 8.1.19. Tak dostáváme důležitou třídu metrických prostorů.

Uvedme několik příkladů reálných normovaných lineárních prostorů.

8.1.21. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Sčítání prvků z $\mathbb{R}^n$ je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z $\mathbb{R}^n$ reálnými čísly. Pro $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, $y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$ a $\alpha x = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_n]$. Definujme funkci $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ je reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Zřejmě platí $\|x\| \in [0, \infty)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Jestliže $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, potom $x_i = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\|x\| = 0$. Jestliže naopak $x \in \mathbb{R}^n$ a $\|x\| = 0$, potom $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, takže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $x_i^2 = 0$. Odtud již snadno plyne $x = 0$. Podmínka (a) z Definice 8.1.18 je tedy splněna.

Necht $x \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

a tedy podmínka (b) z Definice 8.1.18 je splněna.

Necht konečně $x, y \in \mathbb{R}^n$. Potom pomocí výpočtu v řešení Příkladu 8.1.7 dostaneme $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ověřili jsme platnost podmínky (c) z Definice 8.1.18. Funkce $\|\cdot\|$ je tedy norma na $\mathbb{R}^n$. ♣

8.1.22. Definice. Funkci $\|\cdot\|$ z Příkladu 8.1.21 nazýváme **eukleidovskou normou** na $\mathbb{R}^n$.

8.1.23. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu $\mathcal{C}([a, b])$ opatříme obvyklým sčítáním funkcí a obvyklým násobením funkce reálným číslem. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\sup}$ na $\mathcal{C}([a, b])$ předpisem $\|f\|_{\sup} = \sup_{[a, b]} |f|$. Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\sup})$ je reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Je snadné ověřit, že množina $\mathcal{C}([a, b])$ s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor. Poznamenejme jen, že je třeba využít Větu 4.2.4, ze které plyne, že součet spojitých funkcí je spojitá funkce a násobek spojité funkce je také spojitá funkce. Podle Věty 4.3.11 je $\|f\|_{\sup} \in [0, \infty)$ pro každé $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Vlastnosti

(a), (b) z Definice 8.1.18 jsou zřejmě splněny. Pro $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ díky trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.6.11) a Větě 1.6.21(a) platí

$$\begin{aligned}\|f + g\|_{\sup} &= \sup\{|f(x) + g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\} + \sup\{|g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &= \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}.\end{aligned}$$

Tím je ověřena vlastnost (c) z Definice 8.1.18, a tedy $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|)$ je reálný normovaný lineární prostor. ♣

8.1.24. Příklad (prostor ℓ_∞). Definujme ℓ_∞ jako množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Sčítání prvků z ℓ_∞ je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$, $y = \{y_n\} \in \ell_\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$ položme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že pak dvojice $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Operace sčítání prvků z ℓ_∞ i násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly jsou dobře definovány, neboť součet dvou omezených posloupností je opět omezená posloupnost a násobek omezené posloupnosti je také omezená posloupnost. Není těžké ověřit, že ℓ_∞ s uvedenými operacemi tvoří reálný vektorový prostor. Poznamenejme jen, že nulovým vektorem je posloupnost, jejíž všechny členy jsou rovny 0.

Ověříme, že zobrazení $x \mapsto \|x\|_\infty$ je norma na ℓ_∞ . Pokud $x = 0 \in \ell_\infty$, pak snadný výpočet dává $\|x\|_\infty = 0$. Pokud pro $x \in \ell_\infty$ platí $\|x\|_\infty = 0$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ musí platit $|x_n| = 0$, a tedy $x = 0$. Máme-li $x \in \ell_\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup\{|\alpha x_n|; n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \cdot \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty.$$

Pro $x, y \in \ell_\infty$ máme díky trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.6.11) a Větě 1.6.21(a)

$$\begin{aligned}\|x + y\|_\infty &= \sup\{|x_n + y_n|; n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|x_n| + |y_n|; n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n|; n \in \mathbb{N}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.\end{aligned}$$

♣

8.1.25. Příklad (prostor c_0). Definujme c_0 jako množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $\lim x_n = 0$. Sčítání prvků z c_0 je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z c_0 reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in c_0$, $y = \{y_n\} \in c_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\} \in c_0$ položme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že pak dvojice $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Pokud $x = \{x_n\} \in c_0$, $y = \{y_n\} \in c_0$, pak $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = 0 + 0 = 0$, a tedy $x + y \in c_0$. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\lim \alpha x_n = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy opět $\alpha x \in c_0$. Poněvadž každý prvek z c_0 leží v ℓ_∞ , (Věta 2.2.25) tvoří c_0 vektorový podprostor ℓ_∞ . Zobrazení $x \mapsto \|x\|_\infty$ je pak normou na c_0 podle Příkladu 8.1.24. ♣

8.1.26.

Podprostor, otevřená koule a diametr.

8.1.27. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojice $(M, \varrho|_{M \times M})$ zřejmě tvoří opět metrický prostor, neboť podmínky (a)–(c) z Definice 8.1.1 jsou splněny pro všechna $x, y, z \in P$, a tedy i pro všechna $x, y, z \in M$. Z této úvahy plyne korektnost následující definice.

8.1.28. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojici $(M, \varrho|_{M \times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (P, ϱ) . Metriku $\varrho|_{M \times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (P, ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ .

8.1.29. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Potom množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

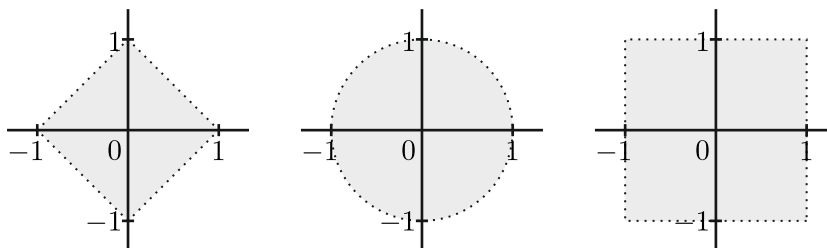
$$B(x, r) = \{y \in P; \varrho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem x a poloměrem r** .

8.1.30. Příklad. Uvažujme metrický prostor $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou. Necht $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Dokažte, že $B(x, r) = (x - r, x + r)$.

Řešení. Tvrzení plyne z definice eukleidovské metriky na $\mathbb{R}$ elementárním výpočtem. ♣

8.1.31 (geometrie koulí v $\mathbb{R}^2$). Na následujících obrázcích jsou znázorněny otevřené koule v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku a poloměrem 1 postupně pro metriky ϱ_1 , ϱ_2 a ϱ_∞ po řadě z Příkladů 8.1.9, 8.1.7 a 8.1.10.



8.1.32. Příklad. Necht $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{pokud } r \leq 1, \\ P, & \text{pokud } r > 1. \end{cases}$$

Řešení. Tvrzení plyne bezprostředně z definice diskrétní metriky. ♣

8.1.33. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Potom **vzdálenost bodu x od množiny A** definujeme předpisem

$$\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A) = \inf\{\varrho(x, y); y \in A\}.$$

Namísto symbolu $\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A)$ lze užít také symboly $\text{dist}_\varrho(x, A)$, $\varrho(x, A)$ nebo $\text{dist}(x, A)$, je-li z kontextu jasné, s jakým metrickým prostorem pracujeme.

Speciálně pro každé $x \in P$ platí $\text{dist}(x, \emptyset) = \infty$.

8.1.34. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A, B \subset P$, $A \subset B$, a $x \in P$. Dokažte, že potom platí $\text{dist}(x, B) \leq \text{dist}(x, A)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $A \subset B$, platí

$$\{\varrho(x, y); y \in A\} \subset \{\varrho(x, y); y \in B\}.$$

Tudíž

$$\text{dist}(x, B) = \inf\{\varrho(x, y); y \in B\} \leq \inf\{\varrho(x, y); y \in A\} = \text{dist}(x, A).$$

♣

8.1.35. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. **Diametr prostoru P** definujeme předpisem

$$\text{diam } P = \sup\{\varrho(x, y); x, y \in P\},$$

pokud je P neprázdný, a klademe $\text{diam } \emptyset = 0$. **Diametrem množiny $A \subset P$** rozumíme diametr metrického prostoru (A, ϱ) .

8.1.36. Definice. Řekneme, že metrický prostor P je **omezený**, jestliže platí $\text{diam } P < \infty$. Řekneme, že podmnožina A prostoru P je **omezená**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) omezený.

8.1.37. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li množina P prázdná nebo jednobodová, pak platí $\text{diam } P = 0$. Jestliže má množina P alespoň dva různé body, pak z podmínky (a) v Definici 8.1.1 plyne, že $\text{diam } P > 0$.

8.1.38. Příklad. Necht P je množina. Dokažte, že diskrétní metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je omezený.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \leq 1$, a tedy $\text{diam } P \leq 1$. Tudíž je $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ omezený. ♣

8.1.39. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Necht $A \subset B \subset P$. Potom $\text{diam } A \leq \text{diam } B$.
- (b) Necht $A \subset P$ a $P \neq \emptyset$. Pak je množina $A \subset P$ omezená právě tehdy, když existují $r > 0$ a $x \in P$ taková, že $A \subset B(x, r)$.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z definice suprema a diametru a z inkluze

$$\{\varrho(x, y); x, y \in A\} \subset \{\varrho(x, y); x, y \in B\}.$$

(b) $\Rightarrow$ Pokud je A prázdná, pak zvolíme $x \in P$ a $r > 0$ libovolně. Pokud je A neprázdná zvolíme $x \in A$ a $r \in (\text{diam } A, \infty)$. Pro každé $y \in A$ pak platí $\varrho(x, y) \leq \text{diam } A < r$. Tím jsme ověřili inkluzi $A \subset B(x, r)$.

$\Leftarrow$ Pokud platí $A \subset B(x, r)$ pro jistá $x \in P$ a $r > 0$, pak použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro libovolné $u, v \in A$ nerovnosti

$$\varrho(u, v) \leq \varrho(u, x) + \varrho(x, v) \leq r + r = 2r.$$

Odtud plyne $\text{diam } A \leq 2r < \infty$. Množina A je tedy omezená. $\clubsuit$

8.2. Konvergence v metrických prostorech

Konvergenci posloupností reálných čísel jsme se podrobně zabývali v Kapi-
tole 2. Nyní pojem konvergence zobecníme pro posloupnosti prvků metrického
prostoru. To nám umožní zkoumat konvergenci posloupností, jejichž členy jsou
komplikovanější objekty než reálná čísla, například vektory, funkce, matice, mno-
žiny a další.

8.2.1. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$
prvků P **konverguje** k prvku $x \in P$ v prostoru (P, ϱ) , jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ v (P, ϱ) . **Konvergentní posloup-
ností** v (P, ϱ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (P, ϱ) .

8.2.2. Necht $P = \mathbb{R}$. Pak výše uvedený pojem konvergence splývá s pojmem kon-
vergence posloupnosti reálných čísel.

8.2.3. Definice. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru (P, ϱ) . Jestli-
že $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je
podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$, případně **vybranou posloupností**, z posloup-
nosti $\{x_n\}$.

8.2.4. Věta (vlastnosti konvergence). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je po-
sloupnost prvků P .

- (a) Pak má posloupnost $\{x_n\}$ v (P, ϱ) nejvýše jednu limitu.
- (b) Jestliže existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ taková, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
 $n \geq n_0$, potom je x limitou posloupnosti $\{x_n\}$.
- (c) Necht $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $x \in P$
je limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (P, ϱ) , pak x je také limitou posloupnosti
 $\{x_{n_k}\}$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že existují prvky $x, y \in P$, které jsou limitami posloup-
nosti $\{x_n\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro
každé $n \geq n_0$ a $\varrho(y, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_1$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom
platí

$$0 \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_2}) + \varrho(x_{n_2}, y) < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$.

(b) Pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) = 0$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$, takže prvek x je limitou posloupnosti $\{x_n\}$.

(c) Protože posloupnost reálných čísel $\{\varrho(x_{n_k}, x)\}$ je vybraná z posloupnosti $\{\varrho(x_n, x)\}$, plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti reálných čísel (Věta 2.2.30), že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_k}, x) = 0$, a tedy x je limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$. ■

8.2.5. Označení. Pokud je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní v metrickém prostoru (P, ϱ) , pak je podle Věty 8.2.4(a) její limita určena jednoznačně a budeme ji značit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nebo jen $\lim x_n$. Pokud $\lim x_n = x$, pak také píšeme $x_n \xrightarrow{\varrho} x, n \rightarrow \infty$, případně $x_n \xrightarrow{\varrho} x$ nebo pouze $x_n \rightarrow x$.

8.2.6. Příklad. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků neprázdné množiny P . Dokažte, že $\{x_n\}$ je konvergentní v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ taková, že $x_n = x$ pro každé $n \geq n_0$.

Řešení. $\Rightarrow$ Necht $x_n \rightarrow x$ pro nějaký prvek $x \in P$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$, a tedy nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) < 1$. Z definice diskrétní metriky plyne, že pro každé takové n platí $x_n = x$.

$\Leftarrow$ Tato implikace platí v každém metrickém prostoru, jak vyplývá z Věty 8.2.4(b). ♣

V následujícím příkladu ukážeme, že konvergence ve vícerozměrném eukleidovském prostoru splývá s konvergencí „po složkách“. Souřadnice prvku $z \in \mathbb{R}^n$ budeme v následujícím příkladu i později označovat $z_1, z_2, \dots, z_n$.

8.2.7. Příklad. Necht $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že potom platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = y$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = y_i$.

Řešení. $\Rightarrow$ Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|x_i^m - y_i| \leq \varrho_2(x^m, y)$. Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = y_i$. Potom ze spojitosti odmocniny (Příklad 4.2.21), věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34) a Heineovy věty (Věta 4.2.16) dostáváme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho(x^m, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - y_i)^2} = 0,$$

a tedy $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = y$. ♣

8.2.8. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\varrho_1(x, y) \leq \sqrt{n} \varrho_2(x, y) \leq n \varrho_\infty(x, y) \leq n \varrho_1(x, y). \quad (8.5)$$

Řešení. Z Cauchyovy nerovnosti (Věta 8.1.6) odvodíme, že

$$\begin{aligned}\varrho_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i - y_i| \\ &\leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)} \\ &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{n} \varrho_2(x, y).\end{aligned}$$

Dále odhadneme shora výrazy $|x_i - y_i|$, $i = 1, \dots, m$, jejich maximem, a dostaneme

$$\begin{aligned}\varrho_2(x, y) &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\})^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \sqrt{n} \varrho_\infty(x, y).\end{aligned}$$

Nerovnost $\varrho_\infty(x, y) \leq \varrho_1(x, y)$ zřejmě platí. Dokazované tvrzení pak plyne z právě odvozených nerovností. ♣

8.2.9. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$, $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že následující tři výroky jsou ekvivalentní.

- (i) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_1} y$.
- (ii) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_2} y$.
- (iii) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_\infty} y$.

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že $x^m \xrightarrow{\varrho_1} y$. Potom $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_1(x^m, y) = 0$. Z (8.5) plyne, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \leq \sqrt{n} \varrho_1(x^m, y)$. Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \geq 0$, vyplývá z věty o dvou strážnících, že také $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_2(x^m, y) = 0$, a tedy platí (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Předpokládejme nyní, že platí $x^m \xrightarrow{\varrho_2} y$. Pak opět z (8.5) dostaneme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_\infty(x^m, y) \leq \sqrt{n} \varrho_2(x^m, y)$, a tedy $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_\infty(x^m, y) = 0$. Tím je dokázáno tvrzení (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Konečně předpokládáme-li, že platí $x^m \xrightarrow{\varrho_\infty} y$, pak tvrzení (i) vyplývá obdobným způsobem jako v předcházejících případech z nerovnosti $\varrho_1(x^m, y) \leq n \varrho_\infty(x^m, y)$ platné pro každé $m \in \mathbb{N}$. ♣

8.3. Topologické pojmy v metrických prostorech

Termíny *topologie* a *topologický* budou vysvětleny v závěru příštího oddílu. Nejprve zavedeme dva důležité typy podmnožin metrických prostorů (uzavřené a otevřené množiny), tři množinové operace v metrických prostorech (vnitřek, hranice a uzávěr) a budeme zkoumat jejich vlastnosti. Užitečnost těchto pojmů se projeví v dalších oddílech a kapitolách.

Uzavřené a otevřené množiny.

8.3.1. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Řekneme, že množina M je **uzavřená** v (P, ϱ) , jestliže pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny M je limita této posloupnosti prvkem M .

8.3.2. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- (a) Dokažte, že $[a, b]$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$.
- (b) Dokažte, že (a, b) není uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků intervalu $[a, b]$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Podle 2.4.18 platí $H(\{x_n\}) = \{x\}$. Podle Příkladu 2.4.22 tudíž platí $x \in [a, b]$. Tedy $[a, b]$ je uzavřená množina.

(b) Položme $x_n = a + \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{x_n\}$ posloupnost prvků intervalu $(a, b]$ splňující $x_n \rightarrow a$. Protože $a \notin (a, b]$, plyne odtud, že $(a, b]$ není uzavřená množina. ♣

8.3.3. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$ je konečná množina. Dokažte, že M je uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Předpokládejme, že $x \notin M$. Položme $d = \min\{\varrho(x, y); y \in M\}$. Protože M je konečná, platí $d > 0$. Dále zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_n, x) \geq d$. To je ale spor s tím, že $x_n \rightarrow x$. Odtud plyne, že $x \in M$, a tedy je množina M uzavřená.

Jiné řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Množina M je konečná, a proto existuje $z \in M$ takové, že množina $\{n \in \mathbb{N}; x_n = z\}$ je nekonečná. Existuje tedy vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ taková, že $x_{n_k} = z$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom díky Větě 8.2.4(b) máme $\lim x_{n_k} = z$ a podle Věty 8.2.4(c) máme $\lim x_{n_k} = x$. Z Věty 8.2.4(a) pak plyne $x = z$, a tedy $x \in M$. ♣

8.3.4. Příklad. Dokažte, že v diskretním metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je každá množina uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $M \subset P$, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M , $x \in P$ a platí $x_n \rightarrow x$. Podle Příkladu 8.2.6 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $y \in P$ taková, že $x_n = y$ pro každé $n \geq n_0$. Odtud plyne $y \in M$. Z Věty 8.2.4(b) plyne $x_n \rightarrow y$, a tedy z Věty 8.2.4(a) vyplývá $x = y$. Tedy $x \in M$, takže M je uzavřená. ♣

8.3.5. Věta (vlastnosti uzavřených množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor.

- (a) Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené množiny v (P, ϱ) .
- (b) Necht $\mathcal{F}$ je neprázdný systém uzavřených množin. Potom je množina $\bigcap \mathcal{F}$ uzavřená v (P, ϱ) .
- (c) Necht $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $F_1, \dots, F_m$ jsou uzavřené. Potom je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená v (P, ϱ) .

Důkaz. (a) Prázdná množina neobsahuje žádnou posloupnost, takže implikace v definici uzavřené množiny je splněna. Uzavřenost množiny P je zřejmá.

(b) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcap \mathcal{F}$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Zvolme $F \in \mathcal{F}$. Potom je $\{x_n\}$ posloupnost prvků F . Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Protože F byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Tedy $\bigcap \mathcal{F}$ je uzavřená množina.

(c) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcup_{i=1}^m F_i$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Protože množin $F_1, \dots, F_m$ je konečně mnoho, nalezneme $j \in \{1, \dots, m\}$ takové, že množina $\{n \in \mathbb{N}; x_n \in F_j\}$ je nekonečná. Existuje tedy podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$, jejíž prvky jsou v F_j . Podle Věty 8.2.4(c) platí $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Protože F_j je uzavřená množina, platí $x \in F_j$, a tedy tím spíše $x \in \bigcup_{i=1}^m F_i$. Odtud plyne, že $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina. ■

8.3.6. V tvrzení (c) Věty 8.3.5 je důležité, že systém množin, které sjednocujeme, je konečný. Bez tohoto předpokladu obdobné tvrzení neplatí. Uvažujme množiny $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$. Z Příkladu 8.3.2 tedy plyne, že každá z množin F_n je uzavřená, ale množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$ není uzavřená.

8.3.7. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem** množiny M , jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem** množiny M a označujeme symbolem $\text{Int } M$ podle latinského slova interior (vnitřek).

Řekneme, že množina M je **otevřená** v (P, ϱ) , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

8.3.8. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je každý otevřený interval otevřená množina.

Řešení. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $x \in (a, b)$. Položme $r = \min\{x - a, b - x, 1\}$, potom zřejmě platí $B(x, r) = (x - r, x + r) \subset (a, b)$, a tedy x je vnitřním bodem (a, b) . Odtud plyne, že (a, b) je otevřená množina. ♣

8.3.9. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $r_0 > 0$. Dokažte, že potom je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina.

Řešení. Zvolme $x \in B(x_0, r_0)$. Položme $r = r_0 - \varrho(x_0, x)$. Potom $r > 0$. Pro každé $y \in B(x, r)$ navíc platí

$$\varrho(x_0, y) \leq \varrho(x_0, x) + \varrho(x, y) < \varrho(x_0, x) + r = r_0.$$

Tedy $y \in B(x_0, r_0)$. Odtud plyne $B(x, r) \subset B(x_0, r_0)$. Každý bod množiny $B(x_0, r_0)$ je tedy jejím vnitřním bodem, a proto je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina. ♣

8.3.10. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ není interval $(0, 1]$ otevřenou množinou a že platí $\text{Int}(0, 1] = (0, 1)$.

Řešení. Necht $r > 0$. Potom $B(1, r) = (1 - r, 1 + r) \not\subset (0, 1]$, takže bod $x = 1$ není vnitřním bodem intervalu $(0, 1]$. Interval $(0, 1]$ tedy není otevřenou množinou. Z Příkladu 8.3.8 vyplývá, že každý bod $x \in (0, 1)$ je vnitřním bodem intervalu $(0, 1)$, a tedy i vnitřním bodem intervalu $(0, 1]$. Odtud plyne, že $\text{Int}(0, 1] = (0, 1)$. ♣

8.3.11. Věta (vlastnosti otevřených množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor.

- (a) Prázdná množina a P jsou otevřené množiny v (P, ϱ) .
- (b) Necht $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin v (P, ϱ) . Potom je množina $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená v (P, ϱ) .
- (c) Necht $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $G_1, \dots, G_m$ jsou otevřené v (P, ϱ) . Potom je množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená v (P, ϱ) .

Důkaz. (a) Tvrzení plyne bezprostředně z definice otevřené množiny.

(b) Předpokládejme, že $x \in \bigcup \mathcal{G}$. Potom nalezneme množinu $G \in \mathcal{G}$ takovou, že $x \in G$. Protože G je otevřená množina, nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{G}$. Odtud plyne, že $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina.

(c) Necht $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je množina G_i otevřená, tedy nalezneme $r_i > 0$ takové, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i; i \in \{1, \dots, m\}\}$. Potom zřejmě platí $B(x, r) \subset B(x, r_i)$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, a tedy $B(x, r) \subset G_i$, takže $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je tudíž otevřená. ■

8.3.12. V tvrzení Věty 8.3.11(c) je důležité, že počet množin, které pronikáme, je konečný. Pro nekonečný systém otevřených množin obdobné tvrzení neplatí, tj. průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřenou množinou. Příkladem je prostor $\mathbb{R}$, kde pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $G_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$. Potom je podle Příkladu 8.3.8 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená, ale $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 1]$, což není otevřená množina, jak víme z Příkladu 8.3.10.

8.3.13. Věta (vztah otevřených a uzavřených množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom množina M je otevřená právě tehdy, když $P \setminus M$ je uzavřená.

Důkaz. $\Rightarrow$ Necht M je otevřená množina, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P \setminus M$, $x \in P$ a platí $x_n \rightarrow x$. Předpokládejme, že $x \in M$. Potom díky otevřenosti M nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Nalezneme dále $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x_{n_0}, x) < r$. Potom $x_{n_0} \in (P \setminus M) \cap B(x, r)$, což je spor. Tedy $x \notin M$. To znamená, že $x \in P \setminus M$, a tedy $P \setminus M$ je uzavřená množina.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že M není otevřená množina. Pak nalezneme $x \in M$ takové, že pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Speciálně pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze nalézt $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M)$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak leží celá v množině $P \setminus M$ a zřejmě splňuje $x_n \rightarrow x$. Protože $x \notin P \setminus M$, plyne odtud, že $P \setminus M$ není uzavřená. ■

8.3.14. Příklad. Dokažte, že v diskretním metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je každá množina otevřená.

Řešení. Zvolme $M \subset P$. Z Příkladu 8.3.4 vyplývá, že $P \setminus M$ je uzavřená v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$. Podle Věty 8.3.13 je tedy množina M otevřená v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$. ♣

8.3.15. Věta (charakterizace vnitřku). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom $\text{Int } M$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v M .

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in \text{Int } M$. Potom nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Dokážeme, že $B(x, r) \subset \text{Int } M$. Zvolme $y \in B(x, r)$. Označme $s = r - \varrho(x, y)$. Potom $s > 0$. Dále platí $B(y, s) \subset B(x, r)$, neboť pro každé $z \in B(y, s)$ máme

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \varrho(x, y) + s = r.$$

Tedy $B(y, s) \subset M$, takže $y \in \text{Int } M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset \text{Int } M$, a tedy $\text{Int } M$ je otevřená.

Nyní dokážeme, že $\text{Int } M$ je největší otevřená množina obsažená v M . Necht $G \subset M$ je otevřená množina. Potom pro každé $x \in G$ nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Platí tedy také, že $B(x, r) \subset M$. To znamená, že x je vnitřním bodem množiny M , a tedy $x \in \text{Int } M$. Platí tudíž $G \subset \text{Int } M$. ■

8.3.16. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom

$$\text{Int } M = \bigcup \{B(x, r); x \in P, r > 0, B(x, r) \subset M\}.$$

Důkaz. Označme

$$G = \bigcup \{B(x, r); x \in P, r > 0, B(x, r) \subset M\}.$$

Předpokládejme nejprve, že $x \in \text{Int } M$. Potom nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset G$, a tedy speciálně $x \in G$. Tím je dokázána inkluze $\text{Int } M \subset G$.

Nyní předpokládejme, že $y \in G$. Pak nalezneme $x \in P$ a $r > 0$ taková, že $B(x, r) \subset M$ a $y \in B(x, r)$. Podle Příkladu 8.3.9 je množina $B(x, r)$ otevřená, a tedy podle Věty 8.3.15 $B(x, r) \subset \text{Int } M$. Tím je dokázána inkluze $G \subset \text{Int } M$, a tedy množinová rovnost $G = \text{Int } M$. ■

8.3.17. Věta (otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$). Množina $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená právě tehdy, když G je spočetným disjunktním sjednocením otevřených intervalů.

Důkaz. $\Rightarrow$ Je-li G prázdná, pak tvrzení platí, neboť stačí uvažovat prázdný systém intervalů. Předpokládejme nyní, že $G \neq \emptyset$. Necht $y \in G$. Potom definujeme prvky $a_y, b_y \in \mathbb{R}^*$ předpisem

$$a_y = \inf\{x \in \mathbb{R}; [x, y] \subset G\}, \quad b_y = \sup\{z \in \mathbb{R}; [y, z] \subset G\}.$$

Dokážeme, že $a_y, b_y \notin G$. Předpokládejme pro spor, že $a_y \in G$. Potom nalezneme $r > 0$ takové, že $B(a_y, r) \subset G$, tedy $(a_y - r, a_y + r) \subset G$. Pro libovolné $s \in (0, r)$ pak platí $[a_y - s, y] \subset G$, to je ale spor s definicí a_y . Odtud vyplývá, že $a_y \notin G$. Obdobně lze dokázat, že $b_y \notin G$. Povšimněme si, že $a_y < y < b_y$.

Dále dokážeme, že $(a_y, b_y) \subset G$. Předpokládejme, že $z \in (a_y, b_y)$. Potom buď $z \in (a_y, y]$ nebo $z \in [y, b_y)$. V prvním případě nalezneme podle definice a_y prvek $x \in (a_y, z)$ takový, že $[x, y] \subset G$. Odtud plyne $z \in G$. Ve druhém případě lze odvodit platnost $z \in G$ obdobně.

Položme $\mathcal{J} = \{(a_y, b_y); y \in G\}$. Potom platí $\bigcup \mathcal{J} \subset G$. Opačná inkluze $G \subset \bigcup \mathcal{J}$ je zřejmá, neboť pro každé $y \in G$ platí $y \in (a_y, b_y) \in \mathcal{J}$. Tedy $G = \bigcup \mathcal{J}$.

Zvolme $y, z \in G$. Dokážeme, že potom buď $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$ nebo $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Předpokládejme, že $(a_y, b_y) \neq (a_z, b_z)$. Jestliže $a_y = a_z$, potom $b_y \neq b_z$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_y > b_z$. Potom ale $b_z \in (a_y, b_y)$, a tedy $b_z \in G$, což je spor. Jestliže $a_y \neq a_z$, potom bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_y < a_z$. Protože $a_z \notin G$, platí $a_z \notin (a_y, b_y)$. Takže $b_y \leq a_z$, a tedy $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Systém $\mathcal{J}$ je tedy disjunktivní. Z Příkladu 1.6.33 pak plyne, že systém $\mathcal{J}$ je spočetný.

← Tato implikace plyne z Příkladu 8.3.8 a Věty 8.3.11(b). ■

Hranice a uzávěr množiny. Pojem hranice geometrického objektu v rovině či prostoru jsme zvyklí běžně používat intuitivním způsobem. V následující definici zavedeme tento pojem přesně v libovolném metrickém prostoru.

8.3.18. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem** množiny M , jestliže pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí** množiny M a značíme ji ∂M .

8.3.19. Hraniční bod množiny v metrickém prostoru může a nemusí být prvkem této množiny. Přímo z definice vyplývá, že hranice libovolné množiny M v metrickém prostoru (P, ϱ) je rovna hranici množiny $P \setminus M$.

8.3.20. Příklad. Necht P je množina a $M \subset P$. Dokažte, že v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ platí $\partial M = \emptyset$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in P$. Potom pro $r \in (0, 1]$ podle Příkladu 8.1.32 platí $B(x, r) = \{x\}$. Zvolme $x \in M$, pak $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Je-li naopak $x \in P \setminus M$, pak $B(x, r) \cap M = \emptyset$. V obou případech x není hraničním bodem M . Vzhledem k tomu, že x bylo zvoleno libovolně, je $\partial M = \emptyset$. ♣

8.3.21. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je hranicí intervalu $(0, 1)$ množina $\{0, 1\}$.

Řešení. Označme $M = (0, 1)$. Zvolme $r > 0$. Potom $B(0, r) = (-r, r)$, a tedy

$$\begin{aligned} B(0, r) \cap M &\supset B(0, \min\{r, 1\}) \cap M = (0, r) \neq \emptyset \quad \text{a} \\ B(0, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) &\supset B(0, \min\{r, 1\}) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = (-r, 0] \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $0 \in \partial M$. Podobně lze dokázat, že $1 \in \partial M$.

Je-li $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, pak nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap M = \emptyset$, a tedy $x \notin \partial M$. Je-li $x \in (0, 1)$, pak nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = \emptyset$, a tedy opět $x \notin \partial M$. Odtud již vyplývá platnost dokazovaného tvrzení. ♣

8.3.22. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ platí $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ a $\partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Podle Věty 1.6.32 nalezneme $y \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{R}$ splňující $y \in B(x, r) \cap \mathbb{Q}$ a $z \in B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Odtud plyne, že $x \in \partial \mathbb{Q}$ a také $x \in \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. ♣

8.3.23. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Označme $\overline{M} = M \cup \partial M$. Potom množinu $\overline{M}$ nazýváme **uzávěrem** množiny M v prostoru (P, ϱ) .

8.3.24. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom zřejmě platí $M \subset \overline{M}$.

8.3.25. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom M je uzavřená právě tehdy, když $\partial M \subset M$, neboli $M = \overline{M}$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že M je uzavřená množina a $x \in \partial M$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M$. Zřejmě platí $x_n \rightarrow x$. Z uzavřenosti M pak plyne, že $x \in M$.

$\Leftarrow$ Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \rightarrow x$, kde $x \in P$. Jestliže $x \in \partial M$, potom dle předpokladu platí $x \in M$. Předpokládejme, že $x \notin \partial M$. Potom nalezneme $r > 0$ takové, že buď $B(x, r) \cap M = \emptyset$ nebo $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. První možnost nemůže nastat, protože $x_n \rightarrow x$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \in M$. Tudíž platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Speciálně tedy $x \in M$. Odtud plyne, že M je uzavřená. Tím je tvrzení dokázáno. ■

8.3.26. Příklad. Dokažte, že platí $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.

Řešení. Podle Příkladu 8.3.21 platí $\partial(0, 1) = \{0, 1\}$. Odtud plyne, že $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$. ♣

8.3.27. Příklad. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$ a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Řešení. Z Příkladu 8.3.22 víme, že $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, takže $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tudíž $\mathbb{Q} \neq \overline{\mathbb{Q}}$, a tedy množina $\mathbb{Q}$ není uzavřená v $\mathbb{R}$.

Zvolme $x \in \mathbb{Q}$ a $r > 0$. Potom podle Věty 1.6.32 nalezneme $y \in B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Tedy $B(x, r)$ není podmnožinou $\mathbb{Q}$, takže x není vnitřním bodem množiny $\mathbb{Q}$. Žádný bod $\mathbb{Q}$ tedy není vnitřním bodem množiny $\mathbb{Q}$, a tedy $\mathbb{Q}$ není otevřená v $\mathbb{R}$ a $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$. ♣

8.3.28. Věta (vlastnosti uzávěru). Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí:

- (a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ a $\overline{P} = P$,
- (b) jestliže $A \subset B$, potom $\overline{A} \subset \overline{B}$,

- (c) $\overline{A} = \{x \in P; \text{dist}(x, A) = 0\}$,
- (d) množina $\overline{A}$ je uzavřená,
- (e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- (f) $\text{diam } A = \text{diam } \overline{A}$,
- (g) $\overline{A}$ je nejmenší (vzhledem k inkluzi) uzavřená množina obsahující A .

Důkaz. (a) Zřejmě platí $\partial\emptyset = \emptyset$ a $\partial P = \emptyset$. Tvrzení pak okamžitě plynou z definice uzávěru.

(b) Předpokládejme, že $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in B$, pak $x \in \overline{B}$. Jestliže $x \in \overline{A} \setminus B$, potom speciálně $x \in \overline{A} \setminus A$, a tedy $x \in \partial A$. Zvolme $r > 0$. Potom $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$, neboť $A \subset B$. Z toho, že $x \notin B$, dále zřejmě plyne, že $B(x, r) \cap (P \setminus B) \neq \emptyset$. Tedy $x \in \partial B$. Protože $\partial B \subset \overline{B}$, dostáváme $x \in \overline{B}$.

(c) Označme $M = \{x \in P; \text{dist}(x, A) = 0\}$. Zřejmě platí $A \subset M$. Předpokládejme, že $x \in \partial A$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\text{dist}(x, A) < \frac{1}{n}$, a tedy $\text{dist}(x, A) = 0$, neboli $x \in M$. Máme tedy $\partial A \subset M$. Tím jsem ověřili inkluzi $\overline{A} \subset M$.

Dokážeme nyní opačnou inkluzi. Předpokládejme, že $x \in P \setminus \overline{A}$. Pak $x \notin \partial A$. Poněvadž $x \in P \setminus A$, musí podle definice hranice existovat $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Pak platí $\text{dist}(x, A) \geq r > 0$, a tedy $x \notin M$. Tím je inkluze $M \subset \overline{A}$ dokázána.

(d) Předpokládejme, že $x \in P \setminus \overline{A}$. Potom podle (c) platí $\text{dist}(x, A) > 0$. Zvolme $r \in (0, \text{dist}(x, A))$. Potom $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Bod x je tedy vnitřním bodem $P \setminus \overline{A}$. Odtud plyne, že množina $P \setminus \overline{A}$ je otevřená, a tedy je $\overline{A}$ uzavřená (Věta 8.3.13).

(e) Protože $A \subset A \cup B$, plyne z (b), že $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Obdobně dostaneme $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, a tedy $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Víme, že $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, a tedy podle (b) platí $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Podle (d) a Věty 8.3.5(c) je $\overline{A \cup B}$ uzavřená množina, tedy $\overline{A \cup B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Odtud plyne, že $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(f) Pokud $A = \emptyset$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$ a $x, y \in \overline{A}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (c) nalezneme $x', y' \in A$ taková, že $\varrho(x, x') < \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \varepsilon$. Potom

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 2\varepsilon + \text{diam } A.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\text{diam } \overline{A} \leq \text{diam } A$. Opačná nerovnost plyne z 8.3.24 a Příkladu 8.1.39(a).

(g) Předpokládejme, že F je uzavřená množina splňující $A \subset F$. Podle tvrzení (b) potom platí $\overline{A} \subset \overline{F}$. Protože F je uzavřená množina, platí $\overline{F} = F$, takže $\overline{A} \subset F$. Podle tvrzení (d) je množina $\overline{A}$ uzavřená a navíc zřejmě platí $A \subset \overline{A}$. ■

8.3.29. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$, $0 < r < s$. Potom $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B(x, s)}$.

Řešení. Předpokládejme, že $y \in \overline{B(x, r)}$. Potom podle Věty 8.3.28(c) existuje $z \in B(x, r)$ splňující $\varrho(z, y) < s - r$. Potom máme

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < r + s - r = s.$$

Platí tedy $y \in B(x, s)$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

8.3.30 (relativita topologických pojmů). Vlastnosti, které v teorii metrických prostorů vypovídáme o množinách (např. otevřenost, uzavřenost), závisí na metrickém prostoru, vzhledem ke kterému tyto vlastnosti uvažujeme. Máme-li například metrický prostor (P, ϱ) a $A \subset Q \subset P$, pak je třeba brát v potaz, zda tvrzení o množině A vztahujeme k metrickému prostoru (P, ϱ) nebo (Q, ϱ) . Pokud hrozí nedorozumění, pak je třeba uvést, v kterém metrickém prostoru pracujeme. Například je-li (P, ϱ) metrický prostor a $A \subset P$, pak uzávěr množiny A v prostoru (P, ϱ) můžeme pro upřesnění označit $\overline{A}^{(P, \varrho)}$ nebo jen $\overline{A}^P$.

Následující věta ukazuje vztah mezi uzávěrem množiny A v prostoru (P, ϱ) a v prostoru (Q, ϱ) . Vztah otevřených (respektive uzavřených) množin v (P, ϱ) a otevřených (respektive uzavřených) množin v (Q, ϱ) je zachycen ve Větě 8.3.32.

8.3.31. Věta (relativní uzávěr). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset Q \subset P$. Potom platí $\overline{A}^Q = \overline{A}^P \cap Q (= \overline{A} \cap Q)$.

Důkaz. Inkluze $\subset$. Předpokládejme, že $x \in \overline{A}^Q$. Potom $x \in Q$ a $\text{dist}_{(Q, \varrho)}(x, A) = 0$. Poněvadž $\text{dist}_{(Q, \varrho)}(x, A) = \text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A)$, máme $\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A) = 0$. Potom tedy platí $x \in \overline{A}^P$.

Inkluze $\supset$. Předpokládejme, že $x \in \overline{A} \cap Q$. Bod x je prvkem Q , a tedy platí $\text{dist}_{(Q, \varrho)}(x, A) = \text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A)$. Poněvadž $x \in \overline{A}$, máme $\text{dist}_{(Q, \varrho)}(x, A) = \text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A) = 0$, a tedy $x \in \overline{A}^Q$. ■

8.3.32. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset Q \subset P$. Potom A je otevřená (respektive uzavřená) v (Q, ϱ) právě tehdy, když existuje množina $B \subset P$ otevřená (respektive uzavřená) v (P, ϱ) splňující $A = B \cap Q$.

Důkaz. Příklad otevřených množin. $\Rightarrow$ Necht A je otevřená množina v prostoru (Q, ϱ) . Podle Věty 8.3.16 je

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r); x \in Q, r > 0, B_Q(x, r) \subset A\},$$

kde $B_Q(x, r) = \{y \in Q; \varrho(x, y) < r\}$, neboli $B_Q(x, r)$ je koule o středu x a poloměru r v prostoru (Q, ϱ) . Označme

$$B = \bigcup \{B(x, r); x \in Q, r > 0, B_Q(x, r) \subset A\}.$$

Podle Věty 8.3.11(b) je B otevřená množina v prostoru (P, ϱ) . Navíc zřejmě platí $A = B \cap Q$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že B je otevřená množina v (P, ϱ) splňující $A = B \cap Q$. Podle Věty 8.3.16 je

$$B = \bigcup \{B(x, r); x \in P, r > 0, B(x, r) \subset B\}.$$

Potom platí

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r); x \in Q, r > 0, B(x, r) \subset B\},$$

tedy

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r); x \in Q, r > 0, B_Q(x, r) \subset A\}.$$

Tedy opět podle Věty 8.3.11(b) je množina A otevřená v prostoru (Q, ϱ) . Tím je dokázáno tvrzení věty pro případ, kdy množina A je otevřená.

Případ uzavřených množin. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $A \subset Q$ je uzavřená v (Q, ϱ) . Potom je množina $Q \setminus A$ otevřená v (Q, ϱ) (Věta 8.3.13). Podle již dokázaného tvrzení existuje otevřená množina H v (P, ϱ) splňující $H \cap Q = Q \setminus A$. Položíme $B = P \setminus H$. Pak je množina B uzavřená v (P, ϱ) podle Věty 8.3.13 a splňuje

$$B \cap Q = (P \setminus H) \cap Q = Q \setminus H = Q \setminus (Q \setminus A) = A,$$

čímž je tato implikace dokázána.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že pro množinu $A \subset Q$ existuje $B \subset P$, která je uzavřená v (P, ϱ) a $A = B \cap Q$. Potom je množina $P \setminus B$ otevřená v (P, ϱ) a $Q \setminus A = (P \setminus B) \cap Q$. Podle již dokázaného tedy máme, že množina $Q \setminus A$ je otevřená v (Q, ϱ) . Podle Věty 8.3.13 je tak A uzavřená v (Q, ϱ) . ■

8.3.33. Příklad. Dokažte, že interval $[0, 1]$ je otevřenou množinou v prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ se zděděnou eukleidovskou metrikou v prostoru $\mathbb{R}$.

Řešení. Označme $P = \mathbb{R}$, $Q = [0, 1] \cup (2, 3)$, $A = [0, 1]$ a $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Potom je B otevřená v P a $A = B \cap Q$. Podle Věty 8.3.32 je pak A otevřená v Q . ♣

Husté množiny.

8.3.34. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **hustá** v (P, ϱ) , jestliže $\overline{A} = P$.

8.3.35. Bude užitečné si uvědomit, že množina $A \subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každé $x \in P$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny A splňující $\lim x_n = x$.

8.3.36. Příklad. Dokažte, že $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom podle Věty 1.6.32 existuje racionální číslo $q \in B(x, \varepsilon)$. To znamená, že $\text{dist}(x, \mathbb{Q}) < \varepsilon$. Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme $\text{dist}(x, \mathbb{Q}) = 0$, a tedy $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Máme tak $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Hustotu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ lze dokázat obdobně, jenom Větu 1.6.32 nahradíme výsledkem z Příkladu 1.8.23. ♣

8.3.37. Lze ukázat, že množina všech polynomů na $[a, b]$, kde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, je hustá v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. Důkaz tohoto zajímavého tvrzení uvedeme až v Kapitole 11 (Věta 11.2.6).

8.3.38. Příklad. Necht P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že A je hustá v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když $A = P$.

Řešení. Pokud $A = P$, pak je A zřejmě hustá v P . Pokud $\overline{A} = P$, pak pro libovolné $x \in P$ platí $\text{dist}(x, A) = 0$. Existuje tedy $y \in A$ takové, že $\varrho_{\text{diskr}}(x, y) < 1$. Potom ale nutně $x = y$ a máme tak $x \in A$. Dokázali jsme tedy, že $A = P$. ♣

8.3.39. Věta (charakterizace hustých množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $A \subset P$ je hustá v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu G v P platí $G \cap A \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Necht $G \subset P$ je neprázdna a otevřená v P . Potom existuje $x \in G$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Poněvadž $\overline{A} = P$, platí podle Věty 8.3.28(c), že $\text{dist}(x, A) = 0$. Potom platí $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $G \cap A \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $x \in P$. Potom je pro každé $r > 0$ množina $B(x, r)$ neprázdna a otevřená. Platí tedy $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. To znamená, že $\text{dist}(x, A) < r$, a tedy musí být $\text{dist}(x, A) = 0$. Platí tedy $x \in \overline{A}$ (Věta 8.3.28(c)). Odvodili jsme $P = \overline{A}$, takže A je hustá v P . ■

8.3.40. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ je hustá a $G \subset P$. Množina $A \cap G$ nemusí být hustá v G , neboť $A \cap G$ může být prázdná a G neprázdna. Pokud ale G je navíc otevřená v P , pak je již $G \cap A$ hustá v G . Odvození není těžké. Zvolme otevřenou neprázdnou množinu $H \subset G$ v G . Podle Věty 8.3.32 existuje množina $\tilde{H}$, která je otevřená v P a splňuje $H = \tilde{H} \cap G$. Vzhledem k otevřenosti množin $\tilde{H}$ a G v P je H otevřená v P . Pak platí $A \cap H = A \cap G \cap H \neq \emptyset$ podle Věty 8.3.39, neboť A je hustá v P . Podle téže věty je pak $A \cap G$ hustá v G .

Řídké množiny.

8.3.41. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **řídká** v (P, ϱ) , jestliže je množina $P \setminus \overline{A}$ hustá v P .

8.3.42. Příklad. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom je jednobodová množina $\{x\}$ řídká v $\mathbb{R}$.
- (b) Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je řídká v $\mathbb{R}$.
- (c) Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Nalezneme $y \in G$ a $r > 0$ taková, že $(y - r, y + r) \subset G$. Zřejmě platí $(y - r, y + r) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, a proto $G \cap (\mathbb{R} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Podle Věty 8.3.39 je $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ hustá. Poněvadž $\mathbb{R} \setminus \{x\} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{x\}}$ podle Příkladu 8.3.3, dostáváme, že množina $\{x\}$ je řídká.

(b) Množina $\mathbb{N}$ je uzavřená v $\mathbb{R}$, protože platí

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$$

a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je tedy otevřená v $\mathbb{R}$ podle Věty 8.3.17. Stačí tedy dokázat, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je hustá. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Potom G obsahuje neprázdný otevřený interval, a je tedy podle ?? nespočetná. Odtud plyne $G \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = G \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$. Podle Věty 8.3.39 je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hustá, což implikuje řídkost množiny $\mathbb{N}$.

(c) Podle Příkladu 8.3.36 je $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$, takže $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$. ♣

8.3.43. Příklad. Necht P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že množina A je řídká v metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když je prázdná.

Řešení. $\Rightarrow$ Množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá, a tedy $P \setminus \overline{A} = P$ podle Příkladu 8.3.38. Máme tedy $\overline{A} = \emptyset$, takže $A = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Tato implikace je zřejmá a platí v každém metrickém prostoru. ♣

8.3.44. Věta (charakterizace řídkých množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Množina A je řídká v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje neprázdna otevřená množina $H \subset G$ taková, že $H \cap A = \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Necht $G \subset P$ je otevřená neprázdna množina. Pak položíme $H = G \cap (P \setminus \overline{A})$. Potom je H otevřená, neboť je průnikem dvou otevřených množin. Zřejmě platí $H \subset G$. Množina H je navíc neprázdna, neboť množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá a podle Věty 8.3.39 má tedy s G neprázdny průnik. Navíc přímo z definice množiny H plyne $H \cap A = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Necht $G \subset P$ je neprázdna otevřená množina v P . Podle předpokladu existuje neprázdna otevřená množina $H \subset G$ splňující $H \cap A = \emptyset$. Množina $P \setminus H$ je uzavřená, obsahuje A , a proto podle Věty 8.3.28(g) platí $\overline{A} \subset P \setminus H$, takže také $H \subset P \setminus \overline{A}$. Tedy $G \cap (P \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$. Podle Věty 8.3.39 je tudíž množina $P \setminus \overline{A}$ hustá v P , což znamená, že A je řídká. ■

8.3.45. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme

$$A = \{f \in \mathcal{C}([a, b]); \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq 1\}.$$

Dokažte, že

- (a) A je řídká v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$,
- (b) A není řídká v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$.

Řešení. (a) Nejprve dokážeme, že A je uzavřená v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. Necht $g \in \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že $|g(c)| > 1$. Předpokládejme, že $c \neq b$. Ze spojitosti funkce g pak plyne, že existuje $d \in (c, b)$ takové, že pro

každé $x \in (c, d)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$. Potom pro každou funkci $f \in A$ a pro každé $x \in (c, d)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\geq ||f(x)| - |g(x)|| = |g(x)| - |f(x)| \\ &\geq \frac{|g(c)| + 1}{2} - 1 = \frac{|g(c)| - 1}{2}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \geq \int_c^d |f(x) - g(x)| \, dx \\ &\geq \int_c^d \frac{|g(c)| - 1}{2} \, dx = (d - c) \frac{|g(c)| - 1}{2}. \end{aligned}$$

To znamená, že $\varrho_{\text{int}}(g, A) \geq (d - c) \frac{|g(c)| - 1}{2} > 0$, a tedy podle Věty 8.3.28(c) platí $g \notin \overline{A}$. Z toho plyne, že $\overline{A} = A$, a tedy A je uzavřená v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. V případě, že $c = b$, nalezneme $d \in (a, c)$ takové, že pro každé $x \in (d, c)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$ a dále postupujeme obdobně, přičemž místo intervalu (c, d) pracujeme s intervalem (d, c) .

Díky uzavřenosti A platí $\mathcal{C}([a, b]) \setminus A = \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$. K důkazu řídkosti množiny A v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ tedy stačí dokázat, že

$$\overline{\mathcal{C}([a, b]) \setminus A} = \mathcal{C}([a, b]).$$

Zvolme $h \in \mathcal{C}([a, b])$. Necht $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{n_0} < b - a$. Pro $n \geq n_0$ položíme

$$h_n(x) = \begin{cases} n(h(a + \frac{1}{n}) - 2) \cdot (x - a) + 2, & \text{pro } x \in [a, a + \frac{1}{n}), \\ h(x), & \text{pro } x \in (a + \frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Potom $h_n \in \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$, neboť h_n je zřejmě spojitá na $[a, b]$ a $h_n(a) = 2$. Označme $M = \sup_{[a, b]} |h|$. Vzhledem ke spojitosti funkce h je M konečné číslo. Pak platí

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) &= \int_a^b |h_n(x) - h(x)| \, dx \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (|h_n(x)| + |h(x)|) \, dx \\ &\leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (n(|h(a + \frac{1}{n})| + 2) \cdot \frac{1}{n} + 2 + M) \, dx \\ &\leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (2M + 4) \, dx = \frac{2M + 4}{n}. \end{aligned}$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M+4}{n} = 0$, plyne odtud, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) = 0$, a tedy $h_n \xrightarrow{\varrho_{\text{int}}} h$. To znamená, že $h \in \overline{\mathcal{C}([a, b]) \setminus A}$, a tedy $\mathcal{C}([a, b]) \setminus A$ je hustá v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$, takže A je v tomto prostoru řídká.

(b) Označme f nulovou funkci na intervalu $[a, b]$. Potom otevřená koule $B(f, 1)$ tvoří otevřenou neprázdnou množinu v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$, která je obsažena v A . Podle Věty 8.3.44 pak A není řídká v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. ♣

8.3.46. Věta (vlastnosti řídkých množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$.

- (a) Je-li A řídká v P a $B \subset A$, pak také B je řídká v P .
- (b) Jsou-li množiny A a B řídké v P , pak také $A \cup B$ je řídká v P .
- (c) Množina A je řídká v P právě tehdy, když $\overline{A}$ je řídká v P .

Důkaz. (a) Podle Věty 8.3.28(b) platí $\overline{B} \subset \overline{A}$, a tedy $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B}$. Množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá, a tedy podle Věty 8.3.39 je hustá i množina $P \setminus \overline{B}$. To znamená, že množina B je řídká v P .

(b) Podle Věty 8.3.28(c) a De Morganových pravidel (Věta 1.3.11) platí

$$P \setminus \overline{A \cup B} = P \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B}). \quad (8.6)$$

Protože množiny A a B jsou řídké v (P, ϱ) , jsou obě množiny $P \setminus \overline{A}$ a $P \setminus \overline{B}$ v tomto prostoru husté. Navíc jsou podle Věty 8.3.13 obě otevřené. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$. Potom je množina $G \cap (P \setminus \overline{A})$ otevřená a díky hustotě $P \setminus \overline{A}$ je také neprázdná. Množina $P \setminus \overline{B}$ je hustá, a proto je množina $G \cap (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ neprázdná. Množina $(P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ je tedy hustá. Z (8.6) plyne, že množina $P \setminus \overline{A \cup B}$ je hustá v P , a tedy $A \cup B$ je řídká v P .

(c) Z Věty 8.3.28(d) vyplývá, že $\overline{P \setminus \overline{A}} = P \setminus \overline{A}$. Odtud již tvrzení snadno plyne. ■

8.3.47. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $G \subset P$ je otevřená hustá množina v P . Potom je množina $P \setminus G$ řídká v P .

Důkaz. Podle Věty 8.3.13 je množina $P \setminus G$ uzavřená v P , a tedy $\overline{P \setminus G} = P \setminus G$. Protože G je hustá v P , dostáváme

$$\overline{P \setminus \overline{P \setminus G}} = \overline{P \setminus (P \setminus G)} = \overline{G} = P.$$

Množina $P \setminus G$ je tedy řídká v P . ■

Hromadné body.

8.3.48. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $a \in P$. Řekneme, že a je **hromadným bodem množiny** M , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$M \cap (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme **derivací množiny** M a značíme ji symbolem M' . Řekneme, že a je **izolovaným bodem množiny** M , jestliže $a \in M \setminus M'$.

8.3.49. Příklad. Uvažujte metrický prostor $\mathbb{R}$ a množinu $M = (0, 1)$. Dokažte, že $M' = [0, 1]$.

Řešení. Zvolme $x \in [0, 1]$ a $r > 0$. Pak není těžké si rozmyslet, že platí

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset.$$

Odtud plyne inkluze $[0, 1] \subset M'$.

Nyní zvolme $x \notin [0, 1]$. Položme $r = \min\{|x|, |x - 1|\}$. Potom $r > 0$ a zřejmě platí $B(x, r) \cap M = \emptyset$. Odtud plyne inkluze $M' \subset [0, 1]$, a tedy celkem $M' = [0, 1]$. ♣

8.3.50. Příklad. Necht $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = \{0\}$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Položme $y = \frac{1}{n}$. Potom $y \neq 0$ a $y \in B(0, \varepsilon) \cap M$. Tedy $0 \in M'$.

Nyní zvolme $x \neq 0$. Položme

$$\varepsilon = \begin{cases} |x|, & \text{je-li } x \in (-\infty, 0), \\ \min\{|x - \frac{1}{n}|, |x - \frac{1}{n+1}|\}, & \text{je-li } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{n(n+1)}, & \text{je-li } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ |x - 1|, & \text{je-li } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Ve všech případech potom platí $\varepsilon > 0$ a $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$. Tedy $x \notin M'$. Odtud plyne, že $M' = \{0\}$. ♣

8.3.51. Příklad. Necht $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je prostá omezená posloupnost reálných čísel a $M = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = H(\{a_n\})$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in H(\{a_n\})$ a $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|a_{n_k} - x| < \varepsilon$. Z toho, že posloupnost $\{a_n\}$ je prostá, plyne, že existuje $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, takové, že $a_{n_k} \neq x$. Pak $a_{n_k} \in (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M$. Odtud plyne $x \in M'$. Tím je dokázána inkluze $H(\{a_n\}) \subset M'$.

Nyní předpokládejme, že $x \in M'$. Budeme konstruovat vybranou posloupnost s limitou rovnou x . Podle definice hromadného bodu pro každé $\varepsilon > 0$ platí $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$. Lze tedy nalézt $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(x, 1) \setminus \{x\}$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ již máme určena přirozená čísla $n_1 < \dots < n_k$ splňující $a_{n_j} \in B(x, \frac{1}{j}) \setminus \{x\}$ pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$. Množina $A = \{a_j; j \leq n_k\}$ je konečná, a proto existuje $\varepsilon \in (0, \frac{1}{k+1})$ takové, že $A \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pak lze nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_{k+1}} \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$. Díky volbě ε máme $n_{k+1} > n_k$. Podle principu matematické indukce dostaneme touto konstrukcí rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, pro kterou navíc zřejmě platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. Odtud plyne, že $x \in H(\{a_n\})$, a tedy $M' \subset H(\{a_n\})$. Tím je rovnost $M' = H(\{a_n\})$ dokázána. ♣

8.3.52. Příklad. Necht $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že $P' = \emptyset$.

Řešení. Pro každé $x \in P$ zřejmě platí $B(x, 1) = \{x\}$, a tedy $B(x, 1) \setminus \{x\} = \emptyset$. Tudíž $x \notin P'$. Protože x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $P' = \emptyset$. ♣

8.4. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory

V Kapitole 4 jsme definovali pojmy limita a spojitost reálné funkce. V tomto oddílu zavedeme tyto pojmy i pro zobrazení mezi metrickými prostory.

Spojitost zobrazení.

8.4.1. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že zobrazení f je

(a) **spojité v bodě a vzhledem k množině M** , jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon), \quad (8.7)$$

(b) **spojité v bodě a** , jestliže je spojitě v a vzhledem k P ,

(c) **spojité na množině M** , jestliže je spojitě v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M ,

(d) **spojité**, jestliže je spojitě na P .

8.4.2 (komentář k Definici 8.4.1). (a) Pokud je zobrazení f spojitě v bodě a vzhledem k M , pak existuje $\eta > 0$ takové, že $B(a, \eta) \cap M \subset \mathcal{D}(f)$.

(b) Výrok (8.7) můžeme ekvivalentně zapsat takto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap M: f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

(c) Spojitost zobrazení f z P do Q závisí nejenom na tom, jak je f definováno, ale také na tom, jaké metriky uvažujeme na množinách P a Q .

(d) Je-li $P = Q = M = \mathbb{R}$, pak výše uvedená definice spojitosti souhlasí s definicí spojitosti reálné funkce jedné reálné proměnné.

8.4.3. Příklad. Necht $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, a $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem $\pi_i(x) = x_i$. Dokažte, že π_i je spojitě.

Řešení. Zvolme $a \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Potom pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |\pi_i(x) - \pi_i(a)| &= |x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} \\ &= \varrho_2(x, a) < \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy π_i je spojitě v a . Bod $a \in \mathbb{R}^n$ byl zvolen libovolně, a proto je π_i spojitě na $\mathbb{R}^n$. ♣

8.4.4. Příklad. Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Dokažte, že $x \mapsto \|x\|$ je spojitě zobrazení z X do $\mathbb{R}$.

Řešení. Podle vlastností z Definice 8.1.18 platí pro každé $x, y \in X$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \text{a} \quad \|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|. \quad (8.8)$$

Díky (8.8) platí pro každé $x, y \in X$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \quad (8.9)$$

Nyní zvolme $x_0 \in X$. Ověříme definici spojitosti v bodě x_0 . Pro $\varepsilon > 0$ položíme $\delta = \varepsilon$. Pro každé $x \in B(x_0, \delta)$ platí podle (8.9)

$$|\|x_0\| - \|x\|| \leq \|x_0 - x\| < \delta = \varepsilon.$$

Tím je důkaz proveden. ♣

Spojitosť zobrazení mezi metrickými prostory závisí zásadním způsobem na zvolených metrikách. Následující příklad tento fakt ilustruje.

8.4.5. Příklad. Necht $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Dokažte, že f je spojitý.

Řešení. Předpokládejme, že $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položíme $\delta = 1$. Potom platí $B_{\varrho_{\text{diskr}}}(a, \delta) = \{a\}$. Odtud plyne, že pro každé $x \in B_{\varrho_{\text{diskr}}}(a, \delta)$ platí $f(x) = f(a)$, a tedy $f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. To znamená, že f je spojitý v a . Poněvadž a bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že f je spojitý zobrazení. ♣

8.4.6. Věta (charakterizace spojitosti). Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní.

- (i) Zobrazení f je spojitý na P .
- (ii) Pro každou množinu G otevřenou v Q je množina $f^{-1}(G)$ otevřená v P .
- (iii) Pro každou množinu F uzavřenou v Q je množina $f^{-1}(F)$ uzavřená v P .

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že G je otevřená množina v Q a $x \in f^{-1}(G)$. Potom $f(x) \in G$. Protože G je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subset G$. Díky spojitosti zobrazení f nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f(B_\varrho(x, \delta)) \subset B_\sigma(f(x), \varepsilon)$. To znamená, že

$$B_\varrho(x, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G).$$

Bod x je tedy vnitřním bodem množiny $f^{-1}(G)$. Odtud plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená množina v P .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Necht $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Množina $f^{-1}(B_\sigma(f(a), \varepsilon))$ obsahuje prvek a a podle předpokladu je otevřená. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že $B_\varrho(a, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(a), \varepsilon))$, neboli $f(B_\varrho(a, \delta)) \subset B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. Odtud plyne, že f je spojitý v a . Bod a byl zvolen libovolně v P , a proto je f spojitý.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Necht F je uzavřená množina v Q . Potom $Q \setminus F$ je otevřená množina v Q , a tedy, podle (ii), je množina $f^{-1}(Q \setminus F)$ otevřená v P . Z Příkladu 1.8.20(d) plyne, že

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= f^{-1}(Q \setminus (Q \setminus F)) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(Q \setminus F) \\ &= P \setminus f^{-1}(Q \setminus F). \end{aligned}$$

Množina $f^{-1}(F)$ je tedy uzavřená v P .

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Necht G je otevřená množina v Q . Potom $Q \setminus G$ je uzavřená množina v Q , a tedy, podle (iii), je množina $f^{-1}(Q \setminus G)$ uzavřená v P . Množina $f^{-1}(G) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus G)$ je tudíž otevřená v P . ■

Limita zobrazení.

8.4.7. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Řekneme, že zobrazení f **má v bodě a limitu b vzhledem k množině A** , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon).$$

Jestliže $A = P$, pak říkáme, že f **má v bodě a limitu b** .

8.4.8. Věta (jednoznačnost limity). Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \rightarrow Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Potom f má v bodě a nejvýše jednu limitu vzhledem k množině A .

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $b_1, b_2 \in Q$, $b_1 \neq b_2$, jsou limitami zobrazení f vzhledem k množině A . Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}\sigma(b_1, b_2)$. Potom je $\varepsilon > 0$ a existuje k němu $\delta_1 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta_1 \Rightarrow \sigma(f(x), b_1) < \varepsilon).$$

Dále existuje $\delta_2 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta_2 \Rightarrow \sigma(f(x), b_2) < \varepsilon).$$

Díky tomu, že $a \in A'$, nalezneme $x \in A$ takové, že $0 < \varrho(x, a) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom platí

$$\sigma(b_1, b_2) \leq \sigma(b_1, f(x)) + \sigma(f(x), b_2) < 2\varepsilon < \sigma(b_1, b_2),$$

což je spor. ■

8.4.9. Limitu vzhledem k množině A počítáme pouze v bodech, které jsou hromadnými body množiny A . Pokud totiž a není hromadným bodem A , pak v jistém okolí bodu a již kromě bodu a nejsou žádné body z A a proměnná funkce f se nemůže blížit k bodu a v rámci množiny $A \setminus \{a\}$. V takovém bodě a by sice definice limity formálně dávala smysl, ale nebyla by určena jednoznačně.

8.4.10. Označení. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$ a $a \in A'$. Pokud existuje limita zobrazení f v bodě a vzhledem k množině A , označujeme tuto limitu symbolem $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$. Je-li $A = P$, píšeme jen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Věty Heineova typu.

8.4.11. Věta (Heine). Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = b$.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon).$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $x_n \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $f(x_n) \in B(b, \varepsilon)$. Tím jsme ověřili, že $\lim f(x_n) = b$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme nepřímý důkaz, tj. odvodíme $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Předpokládejme tedy, že neplatí (i). Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall \delta > 0 \exists x \in A: 0 < \varrho(x, a) < \delta \wedge f(x) \notin B(b, \varepsilon). \quad (8.10)$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta = \frac{1}{n}$. K tomuto δ nalezneme podle (8.10) prvek x_n splňující $x_n \in (B(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}) \cap A$ a $f(x_n) \notin B(b, \varepsilon)$. Potom posloupnost $\{x_n\}$ splňuje $\lim x_n = a$ a $x_n \in A \setminus \{a\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale není pravda, že $\lim f(x_n) = b$. Podmínka (ii) tedy není splněna. ■

8.4.12. Věta. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \rightarrow Q$ a $a \in P$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) Zobrazení f je spojitě v bodě a .
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu pomocí (i) nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P$ splňující $\varrho(y, a) < \delta$ platí $\sigma(f(y), f(a)) < \varepsilon$. K našemu δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, a) < \delta$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí $\sigma(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Tím je dokázáno, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme opět nepřímý důkaz. Předpokládejme, že (i) neplatí. To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $y \in B(a, \delta)$ splňující $\sigma(f(y), f(a)) \geq \varepsilon$. Díky tomuto tvrzení nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$ splňující $\sigma(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak splňuje $\lim x_n = a$, ale neplatí $\lim f(x_n) = f(a)$. Neplatí tedy (ii). ■

Z předchozí věty plyne okamžitě následující výsledek.

8.4.13. Věta. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) Zobrazení f je spojitě.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků P a $x \in P$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

8.4.14. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Předpokládejme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = \beta \in \mathbb{R}.$$

Potom

- (a) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta$,
- (c) jestliže $\beta \neq 0$, pak $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim x_n = a$. Potom podle Věty 8.4.11 dostaneme $\lim f(x_n) = \alpha$ a $\lim g(x_n) = \beta$. Podle Věty 2.2.34(a) odvodíme $\lim(f(x_n) + g(x_n)) = \alpha + \beta$. Podle Věty 8.4.11 pak dostáváme $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$.

(b), (c) Postupujeme obdobně jako v (a), pouze Větu 2.2.34(a) nahradíme Větou 2.2.34(b),(c). ■

8.4.15. Věta (vztah mezi limitou a spojitostí v bodě). Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$ a $a \in A \cap A' \cap D(f)$. Potom je f spojitě v a vzhledem k A právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a)$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Bod a patří do množiny A' , takže v něm můžeme počítat limitu vzhledem k A . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle definice spojitosti nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Potom tím spíše platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Tím jsme ověřili, že platí $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a)$.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle definice limity nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Poněvadž $a \in A$ a $\sigma(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon$ máme

$$\forall x \in A: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Tím je ověřena spojitost zobrazení f v bodě a . ■

Spojitosť a limita složeného zobrazení.

8.4.16. Věta (spojitosť složeného zobrazení v bodě). Necht (X, ϱ) , (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$. Necht $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ a platí:

- (a) existuje $\eta > 0$ takové, že $f(B_\varrho(a, \eta) \cap A) \subset B$,
- (b) f je spojitě v bodě a vzhledem k A ,
- (c) g je spojitě v bodě $f(a)$ vzhledem k B .

Potom zobrazení $g \circ f$ je spojitě v bodě a vzhledem k A .

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (c) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B_\sigma(f(a), \psi) \cap B: g(y) \in B_\tau(g(f(a)), \varepsilon). \quad (8.11)$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$\forall x \in B_\varrho(a, \zeta) \cap A: f(x) \in B_\sigma(f(a), \psi). \quad (8.12)$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \zeta\}$. Potom podle (a) platí

$$\forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap A: f(x) \in B.$$

Odtud a díky (8.11) a (8.12) obdržíme

$$\forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap A: g(f(x)) \in B_\tau(g(f(a)), \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť jsme k ε našli příslušné δ . ■

8.4.17. Věta (spojitost složeného zobrazení). Necht (X, ϱ) , (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $f: X \rightarrow Y$ je spojitý a $g: Y \rightarrow Z$ je spojitý. Potom je zobrazení $g \circ f: X \rightarrow Z$ spojitý.

Důkaz. Necht $G \subset Z$ je otevřená množina v prostoru (Z, τ) . Zobrazení g je spojitý, a tedy podle věty o charakterizaci spojitého zobrazení (Věta 8.4.6, (i) $\Rightarrow$ (ii)), je $g^{-1}(G)$ otevřená množina v prostoru (Y, σ) . Zobrazení f je spojitý, takže podle téže věty je množina $f^{-1}(g^{-1}(G))$ otevřená v prostoru (X, ϱ) . Protože $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$, plyne odtud pomocí Věty 8.4.6, (ii) $\Rightarrow$ (i), že zobrazení $g \circ f: X \rightarrow Z$ je spojitý. ■

8.4.18. Věta (limita složeného zobrazení). Necht (X, ϱ) , (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z . Necht $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $b \in B$, $c \in Z$ a platí

- (a) existuje $\lambda > 0$ takové, že $f(A \cap (B(a, \lambda) \setminus \{a\})) \subset B$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = b$,
- (c) $\lim_{y \rightarrow b, y \in B} g(y) = c$.

Necht je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- (P) existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$,
- (S) zobrazení g je spojitý v bodě b vzhledem k množině B .

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (g \circ f)(x) = c.$$

Důkaz. *Variantu s podmínkou (P).* Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (c) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B: (0 < \sigma(y, b) < \psi \Rightarrow \tau(g(y), c) < \varepsilon). \quad (8.13)$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \zeta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \psi). \quad (8.14)$$

Vezmeme λ z podmínky (a) a η z podmínky (P). Položíme $\delta = \min\{\lambda, \eta, \zeta\}$. Potom podle (a), (P) a (8.14) platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow (f(x) \in B \wedge 0 < \sigma(f(x), b) < \psi)).$$

Odtud a díky (8.13) obdržíme

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \tau(g(f(x)), c) < \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť jsme k ε našli příslušné δ .

Variantu s podmínkou (S). Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (S) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B: (\sigma(y, b) < \psi \Rightarrow \tau(g(y), g(b)) < \varepsilon). \quad (8.15)$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \zeta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \psi). \quad (8.16)$$

Vezměme λ z podmínky (a) a položme $\delta = \min\{\lambda, \zeta\}$. Potom podle (a) a (8.16) platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow (f(x) \in B \wedge \sigma(f(x), b) < \psi)).$$

Odtud a díky (8.15) obdržíme

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \tau(g(f(x)), g(b)) < \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť $c = g(b)$ podle (a) a (S), a tak jsme k ε našli příslušné δ . ■

8.4.19. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f: P \rightarrow Q$ je **homeomorfismus** (prostoru P na prostor Q), jestliže je spojitý, bijektivní a zobrazení $f^{-1}: Q \rightarrow P$ je také spojitý. Řekneme, že prostory (P, ϱ) a (Q, σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje homeomorfismus prostoru P na prostor Q .

8.4.20. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ukažte, že interval (a, b) je homeomorfní s $\mathbb{R}$.

Řešení. Definujme zobrazení $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{x-a}{b-a} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Zobrazení $x \mapsto \pi \frac{x-a}{b-a} - \frac{\pi}{2}, x \in (a, b)$, je prosté spojitý zobrazení definované na intervalu (a, b) , jehož obor hodnot je roven $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Odtud a z vlastností funkce tangens plyne, že f je prosté spojitý zobrazení definované na (a, b) , jehož obor hodnot je roven $\mathbb{R}$. Inverzní zobrazení f^{-1} má tvar

$$f^{-1}(y) = \frac{\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}}{\pi}(b-a) + a.$$

Z tohoto vyjádření plyne, že zobrazení f^{-1} je spojitý. Tím jsme ověřili, že f je homeomorfismus prostoru (a, b) na prostor $\mathbb{R}$. ♣

8.4.21. V Příkladu 8.10.57 ukážeme, že čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ není homeomorfní s intervalem $[0, 1]$. Uveďme ještě, že v komplexní analýze, což je partie matematiky věnující se zobrazením z komplexních čísel do komplexních čísel, je používán výsledek, že „sféra bez severního pólu“ je homeomorfní s komplexní rovinou, jinými slovy prostor

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 1\}$$

s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}^3$ je homeomorfní s $\mathbb{C}$. Důkaz není obtížný, ale uvádět jej zde nebudeme.

8.4.22. Poznámka. *Topologický prostor* je dvojice $(X, \mathcal{G})$, kde X je množina a $\mathcal{G}$ je systém podmnožin X , který splňuje následující podmínky:

- (a) Prázdná množina a X patří do $\mathcal{G}$.
- (b) Necht $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$, potom $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{G}$.

(c) Necht $m \in \mathbb{N}$ a $G_1, \dots, G_m \in \mathcal{G}$, potom $\bigcap_{i=1}^m G_i \in \mathcal{G}$.

Množinám z $\mathcal{G}$ pak říkáme *otevřené množiny* v $(X, \mathcal{G})$.

Pokud je (P, ϱ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech otevřených množin v (P, ϱ) , pak je podle Věty 8.3.11 dvojice $(P, \mathcal{G})$ topologický prostor. V tomto smyslu je tedy každý metrický prostor i prostorem topologickým. Existují však topologické prostory, které nelze obdržet z žádného metrického prostoru popsáním způsobem.

Řadu pojmů, které jsme definovali pro metrické prostory, je možné definovat i v prostorech topologických, neboť v definici vystačíme s otevřenými množinami a nepotřebujeme pracovat s metrikou. Mezi takové pojmy patří např. uzavřené množiny, hranice, vnitřek, uzávěr množiny, ale i spojitě zobrazení (vizte Větu 8.4.6), a tedy i homeomorfismus.

Je-li $f: X \rightarrow Y$ homeomorfismus mezi topologickými prostory X a Y , pak zobrazení $A \mapsto f(A)$, kde $A \subset X$, je bijekcí systému otevřených množin v X na systém otevřených množin v Y . Vlastnosti prostoru, které se zachovávají homeomorfismem, se nazývají *topologické*.

8.5. Součin metrických prostorů

8.5.1. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $(P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory. Položme $P = P_1 \times \dots \times P_n$. Na množině P lze zavést novou metriku pomocí metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ různými způsoby, přičemž žádný z nich nemá výsadní postavení. Následující tři metriky jsou často používány a opírají se o definice metrik z Příkladů 8.1.7, 8.1.9 a 8.1.10. Ověření, že funkce $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_\infty$ jsou metriky na P , není o nic obtížnější než ověřování ve zmíněných příkladech.

Metriku $\sigma_1: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \varrho_i(x_i, y_i),$$

kde $x, y \in P$ mají tvar $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$. Metriku σ_1 nazýváme ℓ_1 -**součtem** metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$. Metriku $\sigma_2: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i(x_i, y_i)^2},$$

kde x, y jsou jako výše. Metriku σ_2 nazýváme ℓ_2 -**součtem** metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$. Metriku $\sigma_\infty: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_\infty(x, y) = \max\{\varrho_i(x_i, y_i); i \in \{1, \dots, n\}\},$$

kde x, y jsou jako výše. Metriku σ_∞ nazýváme ℓ_∞ -**součtem** metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$.

8.5.2. Necht $n, m \in \mathbb{N}$. Uvažujme na $\mathbb{R}$ obvyklou eukleidovskou metriku. Potom ℓ_2 -součet n takových metrik na $\mathbb{R}^n$ je roven eukleidovské metrice na $\mathbb{R}^n$. Podobně pokud budeme na prostorech $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ uvažovat eukleidovské metriky, pak jejich

ℓ_2 -součet bude opět eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Obdobná tvrzení platí i pro ℓ_1 -metriku a ℓ_1 -součet metrik, resp. ℓ_∞ -metriku a ℓ_∞ -součet metrik.

Pokud nebude řečeno výslovně jinak, budeme na množině $\mathbb{R}^n$ uvažovat vždy eukleidovskou metriku.

8.5.3. Věta. Necht $n \in \mathbb{N}$, $(P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ a τ je ℓ_2 -součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$.

- (a) Jestliže $G_i \subset P_i$ je otevřená v (P_i, ϱ_i) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, potom je $G = \prod_{i=1}^n G_i$ otevřená v (P, τ) .
- (b) Necht $i \in \{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\pi_i: P \rightarrow P_i$ definované předpisem $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ spojitě na (P, τ) .

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$. Necht $i \in \{1, \dots, n\}$. Díky otevřenosti G_i v (P_i, ϱ_i) nalezneme $r_i > 0$ takové, že $B_{\varrho_i}(x_i, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i; i \in \{1, \dots, n\}\}$. Pro $x' \in B_\tau(x, r)$ platí $\varrho_i(x_i, x'_i) \leq \tau(x, x') < r$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Máme tedy

$$B_\tau(x, r) \subset \prod_{i=1}^n B_{\varrho_i}(x_i, r) \subset \prod_{i=1}^n G_i = G.$$

Každý bod množiny G je tedy jejím vnitřním bodem, a proto je G otevřená v (P, τ) .

(b) Necht $H \subset P_i$ je otevřená množina. Potom platí

$$\pi_i^{-1}(H) = P_1 \times \dots \times P_{i-1} \times H \times P_{i+1} \times \dots \times P_n.$$

Množina $\pi_i^{-1}(H)$ je tedy podle již dokázaného tvrzení (a) otevřená v P , a proto je zobrazení π_i spojitě podle Věty 8.4.6. ■

8.5.4. Věta. Necht $n \in \mathbb{N}$, $(Q, \sigma), (P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ a τ je ℓ_2 -součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$. Zobrazení $f = (f_1, \dots, f_n): Q \rightarrow P$ je spojitě právě tehdy, když je každé zobrazení $f_i: Q \rightarrow P_i$ spojitě, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Necht $i \in \{1, \dots, n\}$. Zvolme $x \in Q$ a dále zvolme $\varepsilon > 0$. Díky spojitosti f v bodě x nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ platí $\tau(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Pak ale platí také $\varrho_i(f_i(x), f_i(y)) \leq \tau(f(x), f(y)) < \varepsilon$, a zobrazení f_i je tedy v bodě x spojitě.

$\Leftarrow$ Necht $x \in Q$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ platí $\varrho_i(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Potom pro každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ pak platí

$$\tau(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varrho_i(f_i(x), f_i(y)))^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Tím je dokázána spojitost zobrazení f v bodě x . ■

8.5.5. Poslední dvě věty platí i v případech, že místo ℓ_2 -součtu metrik budeme uvažovat ℓ_1 -součet nebo ℓ_∞ -součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$.

8.5.6. Poznámka. V tomto oddílu jsme se zabývali součinem *konečně* mnoha metrických prostorů. Je možné uvažovat i součin nekonečné posloupnosti metrických prostorů, ale pak je příslušná teorie složitější a v tomto textu se jí věnovat nebude.

8.6. Kompaktní prostory

Další čtyři oddíly budou věnovány metrickým prostorům, které mají některé speciální vlastnosti. Začneme s kompaktními metrickými prostory.

Definice a základní vlastnosti kompaktních prostorů.

8.6.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti prvků z P lze vybrat konvergentní podposloupnost. Řekneme, že množina $K \subset P$ je **kompaktní** v P , jestliže je metrický prostor (K, ϱ) kompaktní, tedy jestliže z každé posloupnosti prvků z K lze vybrat podposloupnost, která konverguje v P a jejíž limita je prvkem K .

8.6.2. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je konečná. Dokažte, že A je kompaktní.

Řešení. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z A . Potom existuje alespoň jeden prvek $x \in A$, který se v posloupnosti $\{x_n\}$ vyskytuje nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje podposloupnost, jejíž každý člen je roven x . Tato podposloupnost tedy konverguje podle Věty 8.2.4(b) k prvkem x , který náleží do množiny A . ♣

8.6.3. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Dokažte, že interval $[a, b]$ je kompaktní v $\mathbb{R}$.

Řešení. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $[a, b]$. Potom je $\{x_n\}$ omezená. Dle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (Věta 2.4.7) existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x_{n_k} \rightarrow x$. Protože $[a, b]$ je uzavřená množina, platí $x \in [a, b]$. Odtud plyne, že $[a, b]$ je kompaktní množina v $\mathbb{R}$. ♣

8.6.4. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňuje

$$\exists \delta > 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad n \neq m: \varrho(x_n, x_m) \geq \delta.$$

Dokažte, že potom P není kompaktní.

Řešení. Předpokládejme, že P je kompaktní. Potom existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \rightarrow x$. Nalezneme k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom

$$\delta \leq \varrho(x_{k_0}, x_{k_0+1}) \leq \varrho(x_{k_0}, x) + \varrho(x, x_{k_0+1}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

což je spor. Prostor P tedy není kompaktní. ♣

8.6.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je kompaktní právě tehdy, když je P konečná.

Řešení. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že množina P je nekonečná. Potom P obsahuje prostou posloupnost $\{x_n\}$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$, platí $\varrho(x_m, x_n) = 1$. Posloupnost $\{x_n\}$ tedy splňuje podmínku z Příkladu 8.6.4. Podle tohoto příkladu tedy prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ není kompaktní.

$\Leftarrow$ Tato implikace plyne z Příkladu 8.6.2. ♣

8.6.6. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Potom je množina K uzavřená.

Důkaz. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny K taková, že $\lim x_n = y$, kde $y \in P$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in K$ takový, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti plyne, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Z věty o jednoznačnosti limity pak plyne, že $x = y$. Tedy platí $y \in K$. To podle definice znamená, že množina K je uzavřená. ■

8.6.7. Věta (uzavřená podmnožina kompaktu). Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $F \subset P$ je uzavřená. Potom je F kompaktní.

Důkaz. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků F . Potom je $\{x_n\}$ také posloupnost prvků kompaktního prostoru P , takže existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takový, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Množina F je tedy kompaktní v P . ■

8.6.8. Věta (kompaktnost a omezenost). Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz. Předpokládejme, že prostor P není omezený. Potom je P neprázdný. Zvolme $x \in P$. Protože $\text{diam } P = \infty$, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in P$ takový, že $\varrho(x, x_n) \geq n$. Protože P je kompaktní prostor, existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $y \in P$ takový, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Tedy existuje k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(y, x_{n_k}) \leq 1$. Necht $k \geq k_0$ je takové, že $n_k > \varrho(x, y) + 1$. Potom

$$n_k \leq \varrho(x, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + 1 < n_k,$$

což je spor. Prostor P je tedy omezený. ■

Následující věta obsahuje důležitou charakterizaci kompaktních množin v prostoru $\mathbb{R}^n$.

8.6.9. Věta (kompaktnost v $\mathbb{R}^n$). Necht $n \in \mathbb{N}$ a $K \subset \mathbb{R}^n$. Potom K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Důkaz. $\Rightarrow$ Tato implikace plyne z Vět 8.6.6 a 8.6.8.

$\Leftarrow$ Použijeme matematickou indukci podle n . Necht $n = 1$ a $\{x_k\}$ je posloupnost prvků K . Množina K je omezená v $\mathbb{R}$, a tedy existují $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, splňující

$K \subset [a, b]$. Podle Příkladu 8.6.3 je $[a, b]$ kompaktní. Protože K je podle předpokladu uzavřená v $\mathbb{R}$, je uzavřená i v $[a, b]$ (Věta 8.3.32), a je tedy podle Věty 8.6.7 kompaktní v $\mathbb{R}$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí v každém prostoru $\mathbb{R}^d$, kde $d \leq n$. Nechť K je omezená a uzavřená množina v $\mathbb{R}^{n+1}$. Definujme zobrazení $\pi_1: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\pi_2: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisy

$$\pi_1([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [x_1, \dots, x_n], \quad \pi_2([x_1, \dots, x_{n+1}]) = x_{n+1}.$$

Eukleidovské metriky v prostorech $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{n+1}$ označíme pro účely tohoto důkazu po řadě jako ϱ_2^1 , ϱ_2^n a ϱ_2^{n+1} . Pro každé $x, y \in K$ platí

$$\varrho_2^n(\pi_1(x), \pi_1(y)) \leq \varrho_2^{n+1}(x, y) \leq \text{diam } K$$

a

$$\varrho_2^1(\pi_2(x), \pi_2(y)) \leq \varrho_2^{n+1}(x, y) \leq \text{diam } K,$$

takže $\pi_1(K)$ je omezená v $\mathbb{R}^n$ a $\pi_2(K)$ je omezená v $\mathbb{R}$. Podle Věty 8.3.28(f) jsou omezené také množiny $\overline{\pi_1(K)}$ a $\overline{\pi_2(K)}$. Tyto množiny jsou navíc podle Věty 8.3.28(d) uzavřené. Podle indukčního předpokladu jsou pak obě množiny kompaktní.

Nechť $\{x^k\}$ je posloupnost prvků K . Označme $x^k = [a^k, b^k]$, kde $a^k \in \mathbb{R}^n$ a $b^k \in \mathbb{R}$. Díky kompaktnosti množiny $\overline{\pi_1(K)}$ existuje podposloupnost $\{a^{k_j}\}_{j=1}^\infty$ posloupnosti $\{a^k\}$ a prvek $a \in \overline{\pi_1(K)}$ takové, že $\lim_{j \rightarrow \infty} a^{k_j} = a$. Protože $\overline{\pi_2(K)}$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{b^{k_{j_\ell}}\}_{\ell=1}^\infty$ posloupnosti $\{b^{k_j}\}$ a prvek $b \in \overline{\pi_2(K)}$ takové, že $\lim_{\ell \rightarrow \infty} b^{k_{j_\ell}} = b$. Potom díky Příkladu 8.2.7 platí

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} x^{k_{j_\ell}} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} [a^{k_{j_\ell}}, b^{k_{j_\ell}}] = [a, b].$$

Množina K je podle předpokladu uzavřená, a tedy $[a, b] \in K$. Odtud plyne, že K je kompaktní v $\mathbb{R}^{n+1}$. ■

8.6.10. Tvrzení Věty 8.6.9 neplatí pro obecné metrické prostory. Například libovolná nekonečná množina v diskrétním metrickém prostoru je omezená a uzavřená, avšak nikoli kompaktní. Následující příklad popisuje takovou situaci v případě důležitého prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}([0, 1])$ (vizte Příklad 8.1.23).

8.6.11. Příklad. Dokažte, že uzávěr otevřené koule $B(0, 1)$ v prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ je omezená a uzavřená množina, avšak není kompaktní v prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$.

Řešení. Omezenost a uzavřenost. Je snadné ověřit, že $\text{diam } B(0, 1) \leq 2$. Z Věty 8.3.28(f), pak plyne $\text{diam } \overline{B(0, 1)} \leq 2$, a množina $\overline{B(0, 1)}$ je tedy omezená. Podle Věty 8.3.28(d) je také uzavřená.

Negace kompaktnosti. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n-1}x, & x \in [0, \frac{1}{2^n}], \\ \frac{1}{2}, & x \in (\frac{1}{2^n}, 1]. \end{cases}$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Funkce f_n je zřejmě spojitá na $[0, 1]$. Počítejme

$$\begin{aligned}\varrho_{\text{sup}}(f_n, 0) &= \sup\{|f_n(x) - 0|; x \in [0, 1]\} \\ &= \sup\{|f_n(x)|; x \in [0, 1]\} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Platí tedy $f_n \in B(0, 1) \subset \overline{B(0, 1)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Potom $1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}$, a tedy

$$\varrho_{\text{sup}}(f_n, f_m) \geq |f_n(\frac{1}{2^n}) - f_m(\frac{1}{2^n})| = \frac{1}{2} - 2^{m-1-n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Z Příkladu 8.6.4 tedy plyne, že $\overline{B(0, 1)}$ není kompaktní. ♣

8.6.12. Věta (spojitý obraz kompaktu). Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojitý. Potom je $f(P)$ kompaktní v Q .

Důkaz. Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost prvků $f(P)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in P$ takové, že $f(x_n) = y_n$. Protože P je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \rightarrow x$ v P . Protože f je spojitý, plyne z Heineovy věty (Věta 8.4.13), že $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ v Q . Označíme-li $y = f(x)$, pak $y \in f(P)$ a platí $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$. Odtud plyne, že $f(P)$ je kompaktní v Q . ■

8.6.13. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množinu $\mathbb{C}^n$ opatříme metrikou σ , která je ℓ_2 -součtem metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ na $\mathbb{C}$, které jsou všechny rovny metrice ϱ uvedené v Příkladu 8.1.11. Dokažte, že množina $K \subset \mathbb{C}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Řešení. Definujme zobrazení $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ předpisem

$$f(x) = [x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}].$$

Zobrazení f je bijekce a navíc pro každé $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ platí $\rho_2(x, y) = \sigma(f(x), f(y))$, což plyne z následujícího výpočtu. Platí

$$\begin{aligned}\sigma(f(x), f(y)) &= \sqrt{\sum_{j=1}^n |(x_{2j-1} + ix_{2j}) - (y_{2j-1} + iy_{2j})|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^n ((x_{2j-1} - y_{2j-1})^2 + (x_{2j} - y_{2j})^2)} \\ &= \sqrt{\sum_{s=1}^{2n} (x_s - y_s)^2} = \rho_2(x, y).\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne, že zobrazení f je homeomorfismus. Navíc pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^{2n}$ platí, že A je omezená v $\mathbb{R}^{2n}$ právě tehdy, když $f(A) \subset \mathbb{C}^n$ je omezená. Odtud a z Věty 8.6.9 plyne dokazované tvrzení. ♣

Extrémy funkcí.

8.6.14. Definice. Necht P je množina a $f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f **nabývá svého maxima** na P , jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \geq f(y)$ pro každé $y \in P$. Obdobně řekneme, že f **nabývá svého minima** na P , jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \leq f(y)$ pro každé $y \in P$. Bod x nazýváme v prvním případě **bodem maxima** a ve druhém **bodem minima**.

Následující důležitá věta udává postačující podmínku pro existenci extrému.

8.6.15. Věta (extrémy spojité funkce na kompaktu). Necht (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitý. Potom f nabývá na P svého maxima i minima.

Důkaz. Označme $y = \sup f(P)$. Podle Věty 8.6.12 je množina $f(P)$ kompaktní, a tedy podle Vět 8.6.6 a 8.6.8 omezená a uzavřená. Z omezenosti $f(P)$ plyne, že $y \in \mathbb{R}$ a z uzavřenosti $f(P)$ plyne, že $y \in f(P)$. Tedy f nabývá na P svého maxima. Obdobně lze dokázat, že f nabývá na P svého minima. ■

8.6.16. Předpoklad spojitosti zobrazení i předpoklad kompaktnosti ve Větě 8.6.15 jsou důležité. Nespojité zobrazení nemusí nabývat extrémů ani na kompaktní množině. Příkladem je funkce f definovaná na $[0, 1]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = 0, \text{ nebo } x = 1, \\ 2x - 1, & \text{pokud } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Spojité zobrazení na nekompaktní množině rovněž nemusí nabývat svých extrémů. Příkladem je funkce f definovaná na $(0, 1)$ předpisem $f(x) = x$.

Stejnomořná spojitost. Podobně jako jsme zobecnili pojem spojitosti a limity pro zobrazení mezi metrickými prostory, tak můžeme zobecnit i pojem stejnoměrně spojitý funkce (vizte ??-??).

8.6.17. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f: P \rightarrow Q$ je **stejnomořně spojitý**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in P: (\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

8.6.18. Příklad. Necht (P, ϱ) , (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitý. Dokažte, že potom je f spojitý.

Řešení. Předpokládejme, že $x_0 \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrně spojitosti pro ε . Tedy jsou-li $x, y \in P$ body splňující $\varrho(x, y) < \delta$, je $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in P$ a $\varrho(x_0, y) < \delta$, pak máme $\sigma(f(y), f(x_0)) < \varepsilon$. Zobrazení f je proto spojitý v bodě x_0 . Odtud plyne spojitost f . ♣

8.6.19. Věta (spojitost a stejnoměrná spojitost na kompaktu). Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojitý. Potom f je stejnoměrně spojitý.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že f není stejnoměrně spojitá. Potom existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ prvků P splňující $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pro každé n . Z kompaktnosti P plyne, že existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \rightarrow x$. Potom také $y_{n_k} \rightarrow x$, neboť

$$0 \leq \varrho(x, y_{n_k}) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})$$

a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})) = 0.$$

Ze spojitosti f a Heineovy věty tudíž plyne, že $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ a $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x)$. Nalezneme k takové, že $\sigma(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom

$$\varepsilon \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(x)) + \sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Zobrazení f je tedy stejnoměrně spojitá. ■

Homeomorfní zobrazení.

8.6.20. Věta. Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojitá bijekce. Potom f je homeomorfismus.

Důkaz. Zobrazení f je bijekce, a tedy je zobrazení f^{-1} dobře definováno na Q . Předpokládejme, že $F \subset P$ je uzavřená množina. Podle Věty 8.6.7 je F kompaktní v P . Tudíž je podle Věty 8.6.12 také množina $f(F)$ kompaktní, a tedy dle Věty 8.6.6 uzavřená v Q . Podle Věty 8.4.6 je zobrazení f^{-1} spojitá z Q do P . Zobrazení f je tedy homeomorfismus. ■

Totální omezenost. Následující pojem je užitečný sám o sobě. My jej později použijeme k charakterizaci kompaktnosti.

8.6.21. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je ε -sít prostoru P , jestliže $P = \bigcup_{x \in H} B(x, \varepsilon)$. Řekneme, že prostor P je **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε -sít prostoru P . Řekneme, že množina $A \subset P$ je **totálně omezená** v P , jestliže je prostor (A, ϱ) totálně omezený.

8.6.22. Příklad. Dokažte, že každý konečný metrický prostor je totálně omezený.

Řešení. Platnost tvrzení bezprostředně vyplývá z definice totální omezenosti. ♣

8.6.23. Věta. Necht (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz. Z definice totální omezenosti plyne, že existuje konečná 1-sít H prostoru P . Díky konečnosti H máme $\text{diam } H < \infty$. Necht $x, y \in P$. Potom existují $x', y' \in H$ takové, že $\varrho(x, x') < 1$ a $\varrho(y, y') < 1$. Platí tedy

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 1 + \text{diam } H + 1 = \text{diam } H + 2,$$

takže $\text{diam } P \leq \text{diam } H + 2$. Prostor P je tedy omezený. ■

8.6.24. Příklad. Necht $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že P je totálně omezený právě tehdy, když je konečný.

Řešení. $\Rightarrow$ Z totální omezenosti P plyne, že existuje konečná 1-sít $H \subset P$. Z Příkladu 8.1.32 plyne, že pro každé $x \in P$ je $B(x, 1) = \{x\}$. Tedy platí

$$P = \bigcup_{x \in H} B(x, 1) = \bigcup_{x \in H} \{x\} = H.$$

Odtud plyne, že prostor P je konečný.

$\Leftarrow$ Tvrzení plyne z Příkladu 8.6.22. ♣

8.6.25. Z Příkladu 8.6.24 vyplývá, že opačná implikace k implikaci uvedené ve Větě 8.6.23 obecně neplatí, neboť každý nekonečný diskrétní metrický prostor je omezený (vizte Příklad 8.1.38), není však totálně omezený.

8.6.26. Věta. Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P totálně omezený.

Důkaz. Předpokládejme, že P není totálně omezený. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou množinu $C \subset P$ je

$$P \setminus \bigcup_{x \in C} B(x, \delta) \neq \emptyset.$$

Zvolme $x_1 \in P$ libovolně. Dále budeme pokračovat matematickou indukcí. Necht $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že máme zvoleny prvky $x_1, \dots, x_n$. Potom je množina $P \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$ neprázdná. Necht x_{n+1} je její libovolný prvek. Touto konstrukcí získáme posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny P splňující $\varrho(x_n, x_m) \geq \delta$ pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Podle Příkladu 8.6.4 pak prostor P není kompaktní. ■

Charakterizace kompaktnosti. Nyní uvedeme dvě charakterizace kompaktnosti.

8.6.27. Definice. Necht P je metrický prostor a $\mathcal{G}$ je systém jeho podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{G}$ **pokrývá** P , neboli je **pokrytím** P , jestliže $P = \bigcup \mathcal{G}$. Jestliže pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru P sestává z otevřených množin, říkáme, že jde o **otevřené pokrytí**. Jestliže $\mathcal{G}$ obsahuje konečně mnoho množin, říkáme, že jde o **konečné pokrytí**.

8.6.28. Věta. Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru P existuje konečné pokrytí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ prostoru P .

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí prostoru P . Nejprve dokážeme, že platí následující výrok:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in P \exists G \in \mathcal{G}: B(x, \frac{1}{n}) \subset G. \quad (8.17)$$

Předpokládejme, že (8.17) neplatí, potom tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in P \forall G \in \mathcal{G}: B(x, \frac{1}{n}) \not\subset G.$$

Odtud získáváme posloupnost $\{x_n\}$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $G \in \mathcal{G}$ platí $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset G$. Díky kompaktnosti prostoru P můžeme nalézt podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. K prvku x nalezneme množinu $G \in \mathcal{G}$ splňující $x \in G$. Protože G je otevřená, můžeme nalézt $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \subset G$. K tomuto δ nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_k \geq \frac{2}{\delta}$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom pro každé $y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n_k} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

takže

$$B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

což je spor. Tím je dokázána platnost výroku (8.17).

Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že ke každému $x \in P$ lze nalézt množinu $G_x \in \mathcal{G}$ splňující $B(x, \frac{1}{n}) \subset G_x$. Prostor P je kompaktní, a tedy podle Věty 8.6.26 také totálně omezený. To znamená, že v něm existuje konečná $\frac{1}{n}$ -sít H . Položme

$$\mathcal{G}^* = \{G_x; x \in H\}.$$

Potom platí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ obsahuje konečně mnoho množin a

$$P \subset \bigcup_{x \in H} B(x, \frac{1}{n}) \subset \bigcup_{x \in H} G_x.$$

Systém $\mathcal{G}^*$ je tedy konečné otevřené pokrytí prostoru P splňující $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$.

$\Leftarrow$ Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P . Označme $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Předpokládejme, že existuje $y \in P$ takové, že pro všechna $r > 0$ je množina $B(y, r) \cap A$ nekonečná. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $x_{n_1} \in B(y, 1)$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < \dots < n_{k-1}$. Protože $B(y, \frac{1}{k}) \cap A$ je nekonečná množina, existuje $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n_{k-1}$, splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$. Tímto způsobem dostaneme indukci rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom je ale $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$.

Nyní předpokládejme, že pro každé $y \in P$ existuje $r_y > 0$ takové, že $B(y, r_y) \cap A$ je konečná množina. Pro každé $y \in P$ je množina $B(y, r_y)$ otevřená a navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{y \in P} B(y, r_y)$. Systém $\{B(y, r_y)\}_{y \in P}$ tudíž představuje otevřené pokrytí prostoru P , a tedy podle předpokladu existuje konečná množina $F \subset P$ taková, že $P = \bigcup_{y \in F} B(y, r_y)$. Platí

$$A = A \cap P = A \cap \bigcup_{y \in F} B(y, r_y) = \bigcup_{y \in F} (A \cap B(y, r_y)),$$

takže A je konečná množina, neboť je rovna konečnému sjednocení konečných množin. Odtud vyplývá, že se alespoň jeden prvek množiny A vyskytuje v posloupnosti $\{x_n\}$ nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje konstantní, a tedy

konvergentní podposloupnost. V obou případech jsme našli konvergentní podposloupnost libovolně zvolené posloupnosti prvků P , prostor P je tedy kompaktní. ■

8.6.29. Důsledek (Borel¹). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Necht $\mathcal{J}$ je systém neprázdných otevřených intervalů splňujících $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{J}$ takový, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}^*$.

Důkaz. Tvzení bezprostředně vyplývá z Příkladu 8.6.3 a Věty 8.6.28. ■

8.6.30. Věta. Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin P , která pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňuje $F_{n+1} \subset F_n$, platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Necht $\{F_n\}$ je posloupnost splňující příslušné předpoklady. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in F_n$. Protože P je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takový, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splňující $n_k > n$ platí $x_{n_k} \in F_n$, neboť

$$x_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_n.$$

Protože F_n je uzavřená, vyplývá odtud, že také $x \in F_n$. Protože n bylo zvoleno libovolně, platí $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je tedy neprázdná.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \overline{\{x_j; j \in \mathbb{N}, j \geq n\}}.$$

Potom je $\{F_n\}$ posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin P taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Podle předpokladu tedy existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Protože $x \in F_1$, plyne z definice množiny F_1 , že existuje index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že $\varrho(x_{n_1}, x) < 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvoleny indexy $n_1 < \dots < n_k$. Protože $x \in F_{n_k+1}$, plyne z definice této množiny, že existuje index $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} > n_k$ a $\varrho(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$. Takto získáme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Z posloupnosti $\{x_n\}$ jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. To znamená, že prostor P je kompaktní. ■

8.7. Úplné prostory

Z Kapitoly 2 víme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0: |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

V tomto oddíle budeme studovat otázku, ve kterých metrických prostorech platí analogie tohoto tvrzení. Nejprve zformulujeme Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro posloupnost bodů v metrickém prostoru.

¹Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956)

8.7.1. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P . Řekneme, že $\{x_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku** (případně, že je **cauchyovská**), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0: \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon. \quad (8.18)$$

8.7.2. Výrok (8.18) je ekvivalentní výroku

$$\exists K > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0: \varrho(x_m, x_n) < K\varepsilon.$$

Důkaz lze provést obdobně jako v případě limity posloupnosti reálných čísel (vizte Lemma 2.2.18).

8.7.3. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P . Potom je $\{x_n\}$ cauchyovská.

Důkaz. Necht $x \in P$ splňuje $\lim x_n = x$. Necht $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) < \varepsilon$. Pak pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x_m, x) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

a tedy posloupnost $\{x_n\}$ podle 8.7.2 splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. ■

8.7.4. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků metrického prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je cauchyovská právě tehdy, když existují $x \in P$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n = x$.

Řešení. $\Rightarrow$ Položme $\varepsilon = 1$. Z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky plyne, že existuje n_0 takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ platí $\varrho(x_m, x_n) < 1$. Z definice diskrétní metriky vyplývá, že pro každá taková m, n platí $x_n = x_m$. Odtud již snadno plyne dokazovaná implikace.

$\Leftarrow$ Z Věty 8.2.4(b) víme, že posloupnost $\{x_n\}$ je v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ konvergentní. Podle Věty 8.7.3 je tedy v tomto prostoru cauchyovská. ♣

8.7.5. V důkazu Věty 8.7.3 jsme viděli, že důkaz nutnosti Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro konvergenci posloupnosti reálných čísel, jak jej známe z Věty 2.4.26, je možné snadno zobecnit pro obecný metrický prostor. V důkazu opačné implikace Věty 2.4.26, tedy v důkazu toho, že Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnost reálných čísel implikuje její konvergenci, jsme však podstatným způsobem využili pojmů limes superior a limes inferior, které závisí na uspořádání reálných čísel, což je vlastnost, kterou v obecném metrickém prostoru nemáme k dispozici. Není tedy překvapivé, že výše zmíněná implikace pro obecný metrický prostor neplatí. Vzhledem k její důležitosti však stojí za to vymezit třídu prostorů, ve kterých zůstává v platnosti.

8.7.6. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků P je konvergentní.

Příklady úplných a neúplných prostorů.

8.7.7. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}$ je úplný.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.4.26. ♣

8.7.8. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(0, 1)$ není úplný.

Řešení. Uvažujme posloupnost $\{x_n\} = \{\frac{1}{n+1}\}$ prvků intervalu $(0, 1)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v $(0, 1)$. Dokážeme, že $\{x_n\}$ není konvergentní v $(0, 1)$. Předpokládejme, že $x \in (0, 1)$. Potom existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_1} < x$. Označme $\varepsilon = x - \frac{1}{n_1}$. Pak $\varepsilon > 0$ a pro každé $n \geq n_1$ platí

$$|x_n - x| = x - \frac{1}{n+1} \geq x - \frac{1}{n_1} = \varepsilon,$$

a tedy $\lim x_n \neq x$. Protože $x \in (0, 1)$ bylo zvoleno libovolně, posloupnost $\{x_n\}$ nemá v prostoru $(0, 1)$ limitu, a tedy v něm není konvergentní. Prostor $(0, 1)$ tedy není úplný. ♣

8.7.9. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}^n$ je úplný.

Řešení. Necht $\{x^k\}$ je cauchyovská posloupnost prvků prostoru $\mathbb{R}^n$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $k, l \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_i^k - x_i^l| \leq \varrho_2(x^k, x^l).$$

Z této nerovnosti plyne, že $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Podle Příkladu 8.7.7 jsou tedy tyto posloupnosti konvergentní. Označme $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i^*$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$. Prvek $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ je pak limitou posloupnosti $\{x^k\}$ podle Příkladu 8.2.7. ♣

8.7.10. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Množinu $\mathbb{C}^n$ opatříme metrikou σ , která je ℓ_2 -součtem metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ na $\mathbb{C}$, které jsou všechny rovny metrice ϱ uvedené v Příkladu 8.1.11. Dokažte, že $(\mathbb{C}^n, \varrho)$ je úplný metrický prostor.

Řešení. Dvojice $(\mathbb{C}^n, \varrho)$ je metrický prostor podle 8.5.1. Předpokládejme, že $\{z^j\}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathbb{C}^n$. Potom pro každé $j, m \in \mathbb{N}$ a $l \in \{1, \dots, n\}$ platí podle definice ℓ_2 -součtu metrik a podle definice metriky ϱ na $\mathbb{C}$ následující nerovnosti

$$|\operatorname{Re} z_l^j - \operatorname{Re} z_l^m| \leq \sigma(z^j, z^m) \quad \text{a} \quad |\operatorname{Im} z_l^j - \operatorname{Im} z_l^m| \leq \sigma(z^j, z^m)$$

Odtud plyne, že posloupnosti reálných čísel $\{\operatorname{Re} z_l^j\}_{j=1}^\infty$ a $\{\operatorname{Im} z_l^j\}_{j=1}^\infty$ jsou cauchyovské pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$. Podle Příkladu 8.7.7 jsou uvedené posloupnosti konvergentní. Existují tedy komplexní čísla $w^1, \dots, w^n$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_l^n = \operatorname{Re} w_l \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_l^n = \operatorname{Im} w_l$$

pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$. Z těchto limit pak plyne konvergence posloupnosti $\{z^j\}$ k prvku $w = (w_1, \dots, w_n)$. ♣

8.7.11. Příklad. Dokažte, že diskrétní metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je úplný.

Řešení. Tvrzení plyne z Příkladů 8.2.6 a 8.7.4. ♣

Úplnost metrického prostoru zásadním způsobem závisí na zvolené metrice. Tento fakt ilustrují následující dva příklady.

8.7.12. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ je úplný.

Řešení. Necht $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. Zvolme $x \in [a, b]$. Potom je posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, neboť pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varrho_{\text{sup}}(f_n, f_m)$. Podle Věty 2.4.26 má posloupnost $\{f_n(x)\}$ v $\mathbb{R}$ vlastní limitu, kterou označíme symbolem $f(x)$. Tím je definována funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Pozorování. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a $x \in [a, b]$ platí $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme díky cauchyovskosti posloupnosti $\{f_n\}$ přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ a $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varrho_{\text{sup}}(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Pak pro každé $n \geq n_0$ a $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Funkce f je spojitá na $[a, b]$. Předpokládejme, že $y \in [a, b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme podle předchozího pozorování $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Funkce f_{n_0} je spojitá na $[a, b]$, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $z \in [a, b]$, $|z - y| < \delta$, platí $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$. Potom pro každé $z \in [a, b]$, $|z - y| < \delta$, platí

$$|f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě y . Protože bod y byl zvolen libovolně, je funkce f spojitá na $[a, b]$.

Platí $\lim \varrho_{\text{sup}}(f_n, f) = 0$. Tento vztah plyne okamžitě z uvedeného pozorování. To znamená, že posloupnost $\{f_n\}$ je v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ konvergentní, čímž jsme ověřili definici úplnosti pro prostor $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. ♣

8.7.13. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$ není úplný.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme funkci f_n na $[-1, 1]$ předpisem

$$f_n(x) = \text{sign}(x) \sqrt[n]{|x|}.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m < n$ platí

$$\begin{aligned}\varrho_{\text{int}}(f_n, f_m) &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = 2 \int_0^1 (f_n(x) - f_m(x)) dx \\ &= 2 \left(\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right) = \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)}.\end{aligned}$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$\varrho_{\text{int}}(f_n, f_m) = \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)} \leq 2 \frac{n}{n+1} \frac{1}{m+1} \leq \frac{2}{n_0+1} < \varepsilon,$$

takže posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$. Dokážeme však, že tato posloupnost není v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$ konvergentní.

Nechť f je libovolná spojitá funkce na $[-1, 1]$ a označme $a = f(0)$. Předpokládejme nejprve, že $a \leq 0$. Potom ze spojitosti funkce f v bodě 0 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in [0, \delta]$ platí $f(y) < \frac{1}{2}$. K tomuto δ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-m} < \delta$. Označme

$$\gamma = \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_m(x) - f(x)) dx.$$

Potom $\gamma > 0$, neboť pro každé $x \in [2^{-m}, \delta]$ platí $f_m(x) > \frac{1}{2}$ a $f(x) \leq \frac{1}{2}$, takže $f_m(x) > f(x)$. Navíc pro každé $n \geq m$ platí

$$\begin{aligned}\varrho(f_n, f) &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \geq \int_{2^{-m}}^{\delta} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_n(x) - f(x)) dx \geq \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_m(x) - f(x)) dx \\ &= \gamma,\end{aligned}$$

takže funkce f není limitou posloupnosti $\{f_n\}$ v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$.

Nyní předpokládejme, že $a \geq 0$. Potom ze spojitosti funkce f v bodě 0 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in [-\delta, 0]$ platí $f(y) > -\frac{1}{2}$. K tomuto δ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-m} < \delta$. Označme

$$\gamma = \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_m(x)) dx.$$

Potom $\gamma > 0$ a pro každé $n \geq m$ platí

$$\begin{aligned}\varrho(f_n, f) &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \geq \int_{-\delta}^{-2^{-m}} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_n(x)) dx \geq \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_m(x)) dx \\ &= \gamma,\end{aligned}$$

a tedy funkce f opět není limitou posloupnosti $\{f_n\}$ v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$. Posloupnost $\{f_n\}$ tedy není v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$ konvergentní. Z toho plyne, že tento metrický prostor není úplný. ♣

Banachovy prostory.

8.7.14. Definice. Banachovým prostorem nazýváme úplný normovaný lineární prostor.

S teorií Banachových prostorů, které tvoří velmi důležitou podtřídu úplných metrických prostorů, se lze seznámit v [10]. Zde a v příkladové části uvedeme jen několik základních příkladů. Podle Příkladů 8.7.9 a 8.7.10 víme, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, opatřené standardními operacemi sčítání vektorů a násobení skaláry, jsou Banachovy prostory. Následující příklad zobecňuje tyto výsledky.

8.7.15. Příklad. Necht X je normovaný lineární prostor, který má konečnou dimenzi. Potom je X Banachův.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že X je komplexní normovaný lineární prostor. Normu odpovídající metrice σ na $\mathbb{C}^n$ z Příkladu 8.7.10 označíme symbolem $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ tedy platí $\|\alpha - \beta\|_{\mathbb{C}^n} = \sigma(\alpha, \beta)$. Normu na X budeme značit $\|\cdot\|$.

Necht prvky $x_1, \dots, x_n$ tvoří bázi B prostoru X . Definujme zobrazení $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow X$ předpisem

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j.$$

Zobrazení Φ je lineární a z vlastností báze B plyne, že zobrazení Φ je prosté a na. Inverzní zobrazení $\Phi^{-1}: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ je tedy dobře definováno. Navíc lze snadno ověřit, že Φ^{-1} je lineární. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)\| &= \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j - \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot x_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \beta_j| \cdot \|x_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\| \right) \cdot \|\alpha - \beta\|_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že zobrazení Φ je spojité.

Ukážeme, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každé $\alpha \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\|\Phi(\alpha)\| \geq C \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}. \quad (8.19)$$

Položme $C = \inf\{\|\Phi(\alpha)\|; \alpha \in S\}$, kde

$$S = \{\alpha \in \mathbb{C}^n; \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} = 1\}.$$

Množina S je zřejmě omezená a je také uzavřená podle Věty 8.4.6, neboť S je vzorem množiny $\{1\}$ při zobrazení $\alpha \mapsto \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}$, které je spojitě podle Příkladu 8.4.4. Množina S je tedy kompaktní podle Příkladu 8.6.13. Ze spojitosti Φ , Příkladu 8.4.4 a Věty 8.4.17 plyne spojitost zobrazení $\alpha \mapsto \|\Phi(\alpha)\|$. Podle Věty 8.6.15 existuje

$\beta \in S$ takové, že $\|\Phi(\beta)\| = C$. Vztah (8.19) zřejmě platí pro $\alpha = 0 \in \mathbb{C}^n$. Předpokládejme, že $\alpha \in \mathbb{C}^n, \alpha \neq 0$. Potom máme $\alpha/\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \in S$ a

$$\begin{aligned}\|\Phi(\alpha)\| &= \left\| \Phi\left(\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\right) \right\| \\ &= \left\| \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \Phi\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\right) \right\| && \text{(linearita } \Phi) \\ &= \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \left\| \Phi\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\right) \right\| && \text{(vlastnost normy)} \\ &\geq \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot C. && \text{(definice množiny } S \text{ a konstanty } C)\end{aligned}$$

Tím je nerovnost (8.19) ověřena.

Nechť $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost prvků X . Označme $\alpha^k = \Phi^{-1}(x_k), k \in \mathbb{N}$. Díky nerovnosti (8.19) máme pro každé $k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|\alpha^k - \alpha^l\| &= \|\Phi^{-1}(x_k) - \Phi^{-1}(x_l)\| && \text{(definice prvků } \alpha^k, \alpha^l) \\ &= \|\Phi^{-1}(x_k - x_l)\| && \text{(linearita } \Phi^{-1}) \\ &\leq \frac{1}{C} \|\Phi(\Phi^{-1}(x_k - x_l))\| && \text{(nerovnost (8.19))} \\ &= \frac{1}{C} \|x_k - x_l\|.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že také posloupnost $\{\alpha^k\}$ je cauchyovská. Prostor $\mathbb{C}^n$ je úplný (Příklad 8.7.10), existuje tedy $\alpha \in \mathbb{C}^n$ takové, že $\lim \alpha^k = \alpha$. Díky spojitosti zobrazení Φ máme

$$\lim x^k = \lim \Phi(\alpha^k) = \Phi(\alpha).$$

Posloupnost $\{x^k\}$ je tedy konvergentní, čímž je úplnost prostoru X dokázána. ♣

8.7.16. Příklad. Dokažte, že normovaný lineární prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je Banachův.

Řešení. V Příkladu 8.1.23 jsme ukázali, že $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je normovaný lineární prostor. Ptáme-li se, zda je tento prostor také úplný, ptáme se po úplnosti metrického prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$. Prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$ je však úplný podle Příkladu 8.7.12. ♣

8.7.17. Příklad. Dokažte, že prostor ℓ_∞ je Banachův.

Řešení. Pro každé $x \in \ell_\infty$ budeme používat označení $x = \{x_m\}$, neboli x_m je m -tý člen posloupnosti x . Necht $\{x^n\}$ je posloupnost prvků prostoru ℓ_∞ , která je cauchyovská. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí, že posloupnost $\{x_m^n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel, neboť pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ platí $|x_m^i - x_m^j| \leq \|x^i - x^j\|_\infty$. Prostor $\mathbb{R}$ je úplný, a proto je posloupnost $\{x_m^n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní pro každé $m \in \mathbb{N}$. Označme příslušnou limitu jako x_m^* .

Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme díky cauchyovskosti $\{x^n\}$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $\|x^i - x^j\| < 1$. Máme pak

$$|x_m^n| \leq |x_m^{n_0}| + |x_m^{n_0} - x_m^n| \leq \|x^{n_0}\| + \|x^{n_0} - x^n\| < \|x^{n_0}\| + 1$$

pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $|x_m^*| \leq \|x^{n_0}\| + 1$, což dokazuje, že $x^* = \{x_m^*\} \in \ell_\infty$.

Zbývá ukázat, že $\{x^n\}$ konverguje k x^* . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme díky cauchyovskosti $\{x^n\}$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $\|x^i - x^j\| < \varepsilon$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme $j \geq n_0$ takové, že $|x_m^* - x_m^j| < \varepsilon$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_m^* - x_m^n| \leq |x_m^* - x_m^j| + |x_m^j - x_m^n| < \varepsilon + \|x^j - x^n\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\|x^* - x^n\| \leq 2\varepsilon$. Posloupnost $\{x^n\}$ je tedy konvergentní v prostoru ℓ_∞ . ♣

Základní vlastnosti úplných prostorů.

8.7.18. Věta (úplnost a uzavřenost). Necht (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $M \subset P$. Potom je (M, ϱ) úplný právě tehdy, když M je uzavřená v (P, ϱ) .

Důkaz. $\Rightarrow$ Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M , která v P konverguje k prvku $x \in P$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská v P . Tím pádem je také cauchyovská v M . Metrický prostor M je úplný, takže existuje bod $y \in M$, ke kterému konverguje $\{x_n\}$ v M . Potom $\{x_n\}$ konverguje k y i v P . Z jednoznačnosti limity vyplývá $x = y$, a tedy $x \in M$. Množina M je tedy uzavřená.

$\Leftarrow$ Necht $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost prvků M . Potom je $\{x_n\}$ cauchyovská také v P , což je úplný metrický prostor, a tedy existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Protože M je uzavřená, platí $x \in M$. Tedy $\lim x_n = x$ také v M , takže (M, ϱ) je úplný. ■

8.7.19. Věta (Cantor). Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Potom P je úplný právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin P splňujících $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$ je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodová množina.

Důkaz. $\Rightarrow$ Necht $\{F_n\}$ je posloupnost množin splňujících předpoklady věty. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme libovolně prvek $x_n \in F_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme n_0 takové, že $\text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí $x_m, x_n \in F_{n_0}$, a tedy $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská. Z úplnosti P plyne, že existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\{x_j\}_{j=n}^{\infty}$ posloupnost prvků F_n , která podle věty o limitě vybrané posloupnosti konverguje k x . Protože F_n je uzavřená, platí $x \in F_n$. Protože n bylo zvoleno libovolně, dostáváme $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\text{diam}(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \leq \text{diam } F_m$, a tedy $\text{diam}(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$. Odtud plyne, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.

$\Leftarrow$ Necht $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = \{x_j; j \geq n\}$. Potom je $\{F_n\}$ posloupnost neprázdných uzavřených množin v P , která splňuje $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Odtud plyne,

že $\text{diam } F_n \leq \text{diam } F_{n_0} \leq \varepsilon$ pro každé n , a tedy $\lim \text{diam } F_n = 0$. Podle předpokladu platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ pro nějaké $x \in P$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x, x_n) \leq \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\lim x_n = x$. ■

8.7.20. Bez předpokladu $\lim \text{diam } F_n = 0$ Cantorova věta neplatí. Příkladem je posloupnost podmnožin $\{F_n\}$ v $\mathbb{R}$ definovaná předpisem $F_n = [n, \infty)$, které jsou uzavřené (vizte Příklad 8.3.8 a Větu 8.3.13) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Nesplňují však požadavek $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$ a zřejmě platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

8.7.21. Věta. Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.

Důkaz. Postupně dokážeme následující tři implikace.

Kompaktnost $\Rightarrow$ úplnost. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P . Potom z kompaktnosti P plyne, že existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x \in P$ takové, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Díky konvergenci posloupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dále existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Protože $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k \geq k_0$ takové, že $n_k \geq n_0$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim x_n = x$, takže $\{x_n\}$ je konvergentní. Prostor P je tedy úplný.

Kompaktnost $\Rightarrow$ totální omezenost. Tato implikace vyplývá z Věty 8.6.26.

Úplnost a totální omezenost $\Rightarrow$ kompaktnost. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P . Díky totální omezenosti P nalezneme pro každé $k \in \mathbb{N}$ konečnou $\frac{1}{k}$ -sít D_k . Dále zkonstruujeme posloupnost $\{d_k\}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ jsou splněny následující dvě podmínky:

- $d_k \in D_k$,
- množina $A_k \subset \mathbb{N}$ definovaná předpisem $A_k = \{j \in \mathbb{N}; x_j \in \bigcap_{l=1}^k B(d_l, \frac{1}{l})\}$ je nekonečná.

Platí $P = \bigcup_{d \in D_1} B(d, 1)$, a tedy

$$\mathbb{N} = \bigcup_{d \in D_1} \{j \in \mathbb{N}; x_j \in B(d, 1)\}.$$

Vyjádřili jsme množinu přirozených čísel jako sjednocení konečně mnoha množin. Alespoň jedna z nich tedy musí být nekonečná. To znamená, že existuje $d_1 \in D_1$ takové, že příslušná množina A_1 je nekonečná.

Nyní předpokládejme, že máme již zvoleny body $d_1, \dots, d_k$. Potom platí $P = \bigcup_{d \in D_{k+1}} B(d, \frac{1}{k+1})$, a tedy

$$A_k = \bigcup_{d \in D_{k+1}} \{j \in A_k; x_j \in B(d, \frac{1}{k+1})\}.$$

Opět jsme vyjádřili nekonečnou množinu A_k jako sjednocení konečně mnoha množin, a tedy alespoň jedna z nich musí být nekonečná. Tedy existuje $d_{k+1} \in D_{k+1}$ takové, že příslušná množina A_{k+1} je nekonečná.

Nyní nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \in A_k$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $k, k' \geq k_0$ platí

$$\varrho(x_{n_k}, x_{n_{k'}}) \leq \varrho(x_{n_k}, d_{k_0}) + \varrho(d_{k_0}, x_{n_{k'}}) < \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{2}{k_0} < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská. Protože P je úplný, je tato posloupnost konvergentní. Z libovolně zvolené posloupnosti prvků z P jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. Jinými slovy, P je kompaktní. ■

8.7.22. Věta. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $f: P \rightarrow Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Pak limita $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ existuje právě tehdy, když je splněna následující (Bolzanova-Cauchyova) podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A: \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme $z = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A: \sigma(f(x), z) < \varepsilon.$$

Pro libovolná $x, y \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$ potom platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \sigma(f(x), z) + \sigma(z, f(y)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Protože $a \in A'$, existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ taková, že $x_n \rightarrow a$. Snadno ověříme, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská: Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ díky Bolzanově-Cauchyově podmínce. Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(a, \delta)$ pro každé $n \geq n_0$. Tedy $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ kdykoli $m, n \geq n_0$. Posloupnost $\{f(x_n)\}$ je tedy cauchyovská v prostoru (Q, σ) . Protože prostor Q je úplný, existuje $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in Q$. Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = y$.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \varepsilon$ pro každé $u, v \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(a, \delta)$ pro každé $n \geq n_0$, a $n_1 \geq n_0$ takové, že $\sigma(f(x_{n_1}), y) < \varepsilon$. Tedy

$$\sigma(f(x), y) \leq \sigma(f(x), f(x_{n_1})) + \sigma(f(x_{n_1}), y) < 2\varepsilon$$

pro každé $x \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. ■

Banachova věta o pevném bodě.

8.7.23. Definice. Necht X je množina, $T: X \rightarrow X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **pevným bodem** zobrazení T , jestliže $T(x) = x$.

8.7.24. Některé rovnice v pokročilejších partiích matematické analýzy lze řešit nalezením pevného bodu vhodného zobrazení. Banachova věta o kontrakci (Věta 8.7.28) udává poměrně obecné postačující podmínky pro existenci pevného bodu. V Kapitole 12 ukážeme její aplikaci v teorii diferenciálních rovnic.

8.7.25. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \rightarrow Q$ a $K \geq 0$. Řekneme, že zobrazení f je **K -lipschitzovské**, jestliže pro každé $x, y \in P$ platí $\sigma(f(x), f(y)) \leq K\varrho(x, y)$. Řekneme, že f je **lipschitzovské**, jestliže existuje $K \geq 0$ takové, že f je K -lipschitzovské. Řekneme, že zobrazení f je **kontrakce**, jestliže existuje $K \in [0, 1)$ takové, že f je K -lipschitzovské.

8.7.26. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je lipschitzovské zobrazení. Pak je snadné ověřit, že f je stejnoměrně spojitý, a tedy i spojitý. Nejprve nalezneme $K > 0$ takové, že f je K -lipschitzovské. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \varepsilon/K$. Potom pro každé $x, y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq K\varrho(x, y) < K\delta = \varepsilon.$$

Zobrazení f je tedy stejnoměrně spojitý.

8.7.27. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je neprázdna množina. Dokažte, že potom je funkce $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = \text{dist}(x, A)$ 1-lipschitzovská na P .

Řešení. Zvolme $x, y \in P$ a $\varepsilon > 0$. Pak nalezneme $x', y' \in A$ taková, že $\varrho(x, x') < \text{dist}(x, A) + \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \text{dist}(y, A) + \varepsilon$. Potom platí

$$\text{dist}(x, A) \leq \varrho(x, y') \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, y') \leq \varrho(x, y) + \text{dist}(y, A) + \varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq \varrho(x, y) + \varepsilon$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Máme tedy

$$f(x) - f(y) = \text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq \varrho(x, y). \quad (8.20)$$

Záměnou rolí x, y obdržíme

$$f(y) - f(x) = \text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A) \leq \varrho(y, x). \quad (8.21)$$

Z (8.20), (8.21) a symetrie metriky plyne

$$|f(x) - f(y)| \leq \varrho(x, y),$$

a tedy f je 1-lipschitzovská funkce. ♣

8.7.28. Věta (Banach). Necht (P, ϱ) je úplný neprázdny metrický prostor a $T: P \rightarrow P$ je kontrakce. Potom existuje právě jeden pevný bod zobrazení T .

Důkaz. Existence pevného bodu. Budeme rekurentně definovat posloupnost bodů $\{x_n\}$. Hledaný pevný bod pak obdržíme jako limitu této posloupnosti. Díky neprázdnoti P můžeme zvolit $x_1 \in P$ libovolně. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme již definovány body $x_1, \dots, x_n$. Potom definujeme $x_{n+1} = T(x_n)$. Dokážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v prostoru P .

Podle předpokladu existuje $\gamma \in [0, 1)$ takové, že T je γ -lipschitzovské. Pokud $\gamma = 0$, pak je zobrazení konstantní a dokazované tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy v dalším, že $\gamma > 0$. Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$

platí $\varrho(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma^{n-1} \varrho(x_1, x_2)$. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že dokazovaná nerovnost platí pro n . Pak platí

$$\begin{aligned} \varrho(x_{n+1}, x_{n+2}) &= \varrho(T(x_n), T(x_{n+1})) && \text{(definice posloupnosti } \{x_n\}) \\ &\leq \gamma \cdot \varrho(x_n, x_{n+1}) && (\gamma\text{-lipschitzovskost } T) \\ &\leq \gamma \cdot \gamma^{n-1} \cdot \varrho(x_1, x_2) = \gamma^n \varrho(x_1, x_2). && \text{(indukční předpoklad)} \end{aligned}$$

Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m < n$, platí

$$\begin{aligned} \varrho(x_m, x_n) &\leq \varrho(x_m, x_{m+1}) + \varrho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + \varrho(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\gamma^{m-1} + \gamma^m + \cdots + \gamma^{n-2}) \cdot \varrho(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{\gamma^{m-1}}{1 - \gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž $\gamma \in [0, 1)$, platí $\lim \gamma^n = 0$. Lze tedy nalézt n_0 takové, že

$$\frac{\gamma^{n_0-1}}{1 - \gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n > m \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \frac{\gamma^{m-1}}{1 - \gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) \leq \frac{\gamma^{n_0-1}}{1 - \gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská v P . Prostor P je úplný, takže existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$.

Dokážeme, že $T(x) = x$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 8.2.4(c)) platí $\lim x_{n+1} = x$, neboli $\lim T(x_n) = x$. Podle 8.7.26 je T spojitý, a tedy dle Heineovy věty platí $\lim T(x_n) = T(x)$. Z věty o jednoznačnosti limity (Věta 8.2.4(a)) plyne, že $T(x) = x$.

Jednoznačnost pevného bodu. Předpokládejme, že x a y jsou pevné body zobrazení T . Pak platí

$$\varrho(x, y) = \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y).$$

Protože $\gamma < 1$, musí platit $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$. Odtud plyne, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ■

8.7.29. Poznámka. V matematice existuje celá řada vět o pevném bodě. Pro ilustraci uveďme bez důkazu známou Brouwerovu² větu o pevném bodě. Nechť K je neprázdná konvexní kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $f: K \rightarrow K$ je spojitý. Potom má f pevný bod. V tomto případě ale nemusí být pevný bod jednoznačně určen.

²Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

Baireova věta.

8.7.30. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že množina A je

- **první kategorie** v P , jestliže existuje posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ řídkých množin v P taková, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,
- **druhé kategorie** v P , jestliže není první kategorie,
- **residuální** v P , jestliže $P \setminus A$ je první kategorie v P .

8.7.31. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Množina A je první kategorie v P právě tehdy, když existuje spočetný systém $\mathcal{A}$ řídkých množin v P takový, že $A = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud je totiž A množina první kategorie, pak stačí položit $\mathcal{A} = \{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, kde A_n jsou řídké množiny z předchozí definice. Obráceně, pokud $\mathcal{A}$ je příslušný spočetný systém, můžeme jeho prvky uspořádat do posloupnosti (Lemma ??(b)) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud by byl $\mathcal{A}$ konečný, pak popužijeme prázdnou množinu v roli některých A_n . Pak bude platit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

8.7.32. Příklady. Dokažte, že

- (a) prostor $\mathbb{Q}$ je první kategorie v $\mathbb{R}$,
- (b) množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je residuální v $\mathbb{R}$,
- (c) množina $\mathcal{C}([a, b])$ je první kategorie v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$.

Řešení. (a) Pro každé $r \in \mathbb{Q}$ je jednobodová množina $\{r\}$ řídká v $\mathbb{R}$ podle Příkladu 8.3.42(a). Navíc platí

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}.$$

Množina $\mathbb{Q}$ je tedy spočetným sjednocením řídkých množin, tudíž je první kategorie v $\mathbb{R}$.

(b) Tvzení je přímým důsledkem již dokázaného tvrzení (a).

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$A_n = \{f \in \mathcal{C}([a, b]); \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq n\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina A_n řídká v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. Důkaz lze provést obdobně jako v Příkladu 8.3.45(a). Necht $g \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom podle Věty 4.3.12 je g omezená na $[a, b]$. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $g \in A_n$. Odtud vyplývá, že $\mathcal{C}([a, b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Množina $\mathcal{C}([a, b])$ je tudíž první kategorie v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. ♣

8.7.33. Věta (vlastnosti množin první kategorie). Necht (P, ϱ) je metrický prostor.

- (a) Jestliže množina $A_n \subset P$ je první kategorie v P pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ první kategorie v P .
- (b) Jestliže je $A \subset P$ první kategorie v P a $B \subset A$, potom je B první kategorie v P .

Důkaz. (a) Podle předpokladu a 8.7.31 existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ spočetný systém $\mathcal{A}_n$, jehož prvky jsou řídké množiny v P a který splňuje $A_n = \bigcup \mathcal{A}_n$. Položme $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Potom je systém $\mathcal{A}$ spočetným sjednocením spočetných systémů, a tedy je podle Věty 1.5.28(b) také spočetný. Navíc $\mathcal{A}$ obsahuje zřejmě pouze řídké množiny v P a platí $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Podle 8.7.31 je množina A první kategorie.

(b) Podle předpokladu existují množiny A_n , $n \in \mathbb{N}$, řídké v P , které splňují $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $B_n = A_n \cap B$. Potom je podle Věty 8.3.46(a) množina B_n řídká v P pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Množina B je tedy první kategorie v P . ■

8.7.34. Věta (Baire³). Necht (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $G \subset P$ je neprázdna otevřená množina. Potom je G druhé kategorie v (P, ϱ) .

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že G je první kategorie v P . Existují tedy množiny A_n , $n \in \mathbb{N}$, které jsou řídké v P a platí $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zkonstruujeme otevřenou kouli $B(x_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $B(x_1, r_1) \subset G$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

- $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \setminus A_n$,
- $r_n \in (0, \frac{1}{n})$.

Konstrukce. Množina G je neprázdna, a proto můžeme zvolit $x_1 \in G$. Potom díky otevřenosti G existuje $r_1 \in (0, 1)$ takové, že $B(x_1, r_1) \subset G$. Nyní předpokládejme, že jsme již zkonstruovali kouli $B(x_n, r_n)$. Podle Věty 8.3.44 nalezneme neprázdную otevřenou množinu $H \subset B(x_n, r_n)$ takovou, že $H \cap A_n = \emptyset$. Zvolme $x_{n+1} \in H$. Potom existuje $r_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ takové, že $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset H$. Pak platí $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1})$ podle Příkladu 8.3.29. Máme tedy také $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n)$. Tím je konstrukce hledané posloupnosti koulí provedena.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\text{diam } \overline{B(x_n, r_n)} \leq \frac{2}{n}$. Odtud plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \overline{B(x_n, r_n)} = 0$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)}$. Podle Věty 8.7.19 existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)}$. Potom $x \in G$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x \notin A_n$, což je spor. ■

8.7.35 (malé množiny). V matematice je často užitečné mít možnost rozlišovat mezi malými a velkými množinami. Pro takové rozlišení je vhodné použít pojem σ -ideálu.

Necht X je množina a $\mathfrak{I} \subset \mathcal{P}(X)$ je systém podmnožin X . Řekneme, že systém $\mathfrak{I}$ je (**množinový**) σ -ideál, jestliže

- (a) pro každou posloupnost $\{A_n\}$ množin z $\mathfrak{I}$ platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$,
- (b) pro každou množinu $A \in \mathfrak{I}$ a každou množinu $B \subset A$ platí $B \in \mathfrak{I}$.

³René-Louis Baire (1874–1932)

Na množiny, které patří do daného σ -ideálu $\mathfrak{I}$, pak pohlížíme jako na malé množiny. Podle předchozí definice pak vidíme, že *spočetné* sjednocení malých množin je také malá množina a podmnožina malé množiny je opět malá. To, zda je množina A malá, nebo ne, záleží na použitém σ -ideálu. Důležitým příkladem σ -ideálu je systém spočetných podmnožin dané množiny X (vizte Větu 1.5.28(a),(b)). Dalším důležitým příkladem jsou lebesgueovsky nulové množiny v prostoru $\mathbb{R}^n$ a konečně i množiny první kategorie v daném metrickém prostoru tvoří podle Věty 8.7.33 σ -ideál.

Pokud je σ -ideál $\mathfrak{I} \subset \mathcal{P}(X)$ netriviální v tom smyslu, že $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ a $X \notin \mathfrak{I}$, pak lze $\mathfrak{I}$ použít k existenčním důkazům. Chceme-li ukázat, že v množině X existuje prvek, který má jistou vlastnost V , stačí ukázat, že množina

$$A = \{x \in X; x \text{ nesplňuje } V\}$$

patří do $\mathfrak{I}$. Pak je totiž $X \setminus A$ neprázdná. V některých situacích je existenční důkaz tohoto typu jednodušší než přímá konstrukce hledaného prvku. V následujícím paragrafu se podíváme podrobněji na tuto metodu v případě množin první kategorie.

8.7.36 (metoda kategorií). Necht X je množina a $V(x)$, $x \in X$ je nějaká výroková forma na X . Chceme-li nalézt $x \in X$ takové, že platí $V(x)$, stačí na X nalézt metriku ϱ takovou, že metrický prostor (X, ϱ) je úplný, a dokázat, že vzhledem k této metrice je množina $Z = \{y \in X; \neg V(y)\}$ první kategorie. Podle Baireovy věty pak neplatí $X = Z$, protože úplný prostor není první kategorie. Existuje tedy prvek $x \in X$ splňující $V(x)$. Množina všech takových x je dokonce residuální v X .

Metodu kategorií ilustrujme následujícím příkladem.

8.7.37. Příklad (Bolzano). Dokažte, že existuje spojitá funkce na $[0, 1]$, která nemá v žádném bodě intervalu $[0, 1]$ vlastní derivaci.

Řešení. Množinu funkcí z $\mathcal{C}([0, 1])$, které mají alespoň v jednom bodě vlastní derivaci, označme A . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme pomocnou množinu následujícím způsobem

$$A_n = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); \exists x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \forall h \in (0, \frac{1}{n}): |f(x+h) - f(x)| \leq nh\}.$$

Ukážeme, že množiny A_n jsou řídké a platí $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Odtud plyne, že A je první kategorie. Poněvadž $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$ je úplný metrický prostor (Příklad 8.7.12), dostáváme podle Baireovy věty (Věta 8.7.34), že existuje funkce $f \in \mathcal{C}([0, 1]) \setminus A$.

Inkluze $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Předpokládejme, že $f \in A$. Potom existuje $x \in (0, 1)$ takové, že $f'(x)$ je vlastní. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $(x, x + \delta) \subset [0, 1]$ a pro každé $h \in (0, \delta)$ a platí

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < 1.$$

Nyní nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > \max\{\frac{1}{\delta}, |f'(x)| + 1\}$. Potom $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ a pro každé $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \cdot h < (|f'(x)| + 1) \cdot h \leq nh.$$

Odtud plyne, že $f \in A_n$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina A_n uzavřená v $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$. Předpokládejme, že $\{f_k\}$ je posloupnost funkcí z množiny A_n , která v metrice ϱ_{sup} konverguje k funkci $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ takové, že pro každé $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí $|f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \leq nh$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (Věta 2.4.7) existuje vybraná posloupnost $\{x_{k_j}\}$ z posloupnosti $\{x_k\}$ s limitou $x^* \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Pro zjednodušení zápisu položme $g_j = f_{k_j}$ a $y_j = x_{k_j}$ pro $j \in \mathbb{N}$. Zvolme nyní $h \in (0, \frac{1}{n})$ a $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že posloupnost $\{g_j\}$ konverguje k f v supremové metrice, můžeme nalézt j_0 takové, že platí

$$\forall x \in [0, 1]: |g_{j_0}(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (8.22)$$

Ze spojitosti f a vztahu $\lim y_j = x^*$ můžeme po j_0 navíc požadovat

$$\begin{aligned} |f(x^* + h) - f(y_{j_0} + h)| &< \varepsilon, \\ |f(x^*) - f(y_{j_0})| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Z definice množiny A_n plyne

$$|g_{j_0}(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0})| \leq nh.$$

Použitím (8.22) dostaneme

$$\begin{aligned} |g_{j_0}(y_{j_0}) - f(y_{j_0})| &< \varepsilon, \\ |g_{j_0}(y_{j_0} + h) - f(y_{j_0} + h)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Potom pomocí trojúhelníkové nerovnosti a výše uvedených odhadů obdržíme

$$\begin{aligned} |f(x^* + h) - f(x^*)| &\leq |f(x^* + h) - f(y_{j_0} + h)| + |f(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0} + h)| \\ &\quad + |g_{j_0}(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0})| + |g_{j_0}(y_{j_0}) - f(y_{j_0})| \\ &\quad + |f(y_{j_0}) - f(x^*)| < nh + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, platí $|f(x^* + h) - f(x^*)| \leq nh$. Odtud plyne, že f patří do množiny A_n . Tím je důkaz uzavřenosti A_n proveden.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina A_n řídká v $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$. Podle předchozího je množina A_n uzavřená, a proto k důkazu její řídkosti stačí ukázat, že množina $\mathcal{C}([0, 1]) \setminus A_n$ je hustá. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu G v prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$. Zvolme $f \in G$ a k ní nalezneme $\varepsilon > 0$ splňující $B(f, \varepsilon) \subset G$. Nyní stačí podle Věty 8.3.39 nalézt funkci $g \in B(f, \varepsilon) \setminus A_n$.

K funkci f nalezneme nejprve funkci $\tilde{f}$, která bude po částech afinní a bude blízko k funkci f v supremové metrice. K funkci $\tilde{f}$ pak přičteme funkci, která bude velmi rychle oscilovat, ale přitom bude nabývat malých hodnot. Tak dostaneme hledanou funkci g . Ukažme si tento postup podrobně.

Funkce f je stejnoměrně spojitá podle Věty 8.6.19. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \delta: |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (8.23)$$

Zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^m$ intervalu $[0, 1]$ takové, že $v(D) < \delta$. (Norma dělení $v(D)$ byla zavedena v Definici ??.) Definujme funkci $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby $f(x_i) = \tilde{f}(x_i)$ pro každé $i \in \{0, \dots, m\}$ a pokud $x \in (x_{i-1}, x_i)$, kde $i \in \{1, \dots, m\}$, pak

$$\tilde{f}(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Funkce $\tilde{f}$ je spojitá, neboť je spojitá na každém z intervalů $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Pokud $x \in [0, 1]$, pak existuje $i \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a s použitím (8.23) můžeme počítat

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{f}(x)| &= \left| f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right| \\ &\leq |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Označme

$$K = \max \left\{ \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right|; i \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ platí

$$|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| = \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(y - x) \right| \leq K|y - x|. \quad (8.24)$$

Potom pro každé $x, y \in [0, 1]$, platí $|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| \leq K|y - x|$. Skutečně, zvolme $x, y \in [0, 1]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \leq y$. Nalezneme $i, j \in \{1, \dots, m\}$ taková, že $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a $y \in [x_{j-1}, x_j]$. Potom máme $i \leq j$ a

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| &\leq |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x_{j-1})| + \sum_{l=i+1}^{j-1} |\tilde{f}(x_l) - \tilde{f}(x_{l-1})| + |\tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(x)| \\ &\leq K|y - x_{j-1}| + \sum_{l=i+1}^{j-1} K|x_l - x_{l-1}| + K|x_i - x| = K|y - x|. \end{aligned}$$

Zvolme konstantu L tak, aby platilo

$$L > \max \left\{ \frac{4\pi(K+n)}{\varepsilon}, \pi n \right\}. \quad (8.25)$$

Funkci $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definujme předpisem

$$g(x) = \tilde{f}(x) + \frac{\varepsilon}{4} \sin(Lx).$$

Potom je g spojitá a pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - \tilde{f}(x)| + |\tilde{f}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Máme tedy $g \in B(f, \varepsilon)$. Zbývá ukázat, že $g \notin A_n$. Zvolme libovolně $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Pro $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(Lx + Lh) - \sin(Lx)| - |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)| \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(Lx + Lh) - \sin(Lx)| - Kh \\ &= \frac{\varepsilon}{2} |\sin(\frac{1}{2}Lh)| \cdot |\cos(Lx + \frac{1}{2}Lh)| - Kh. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Díky (8.25) platí $\frac{\pi}{2} < \frac{L}{2n}$, a proto můžeme nalézt $h^* \in (0, \frac{1}{n})$ takové, že $\frac{1}{2}Lh^* \leq \frac{\pi}{2}$ a $Lx + \frac{1}{2}Lh^* = k\pi - \frac{\pi}{4}$ nebo $Lx + \frac{1}{2}Lh^* = k\pi + \frac{\pi}{4}$ pro vhodné $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak platí $|\cos(Lx + \frac{1}{2}Lh^*)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a

$$\begin{aligned} |g(x+h^*) - g(x)| &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(\frac{1}{2}Lh^*)| - Kh^* \quad (\text{volba } h^*) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4} \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} Lh^* - Kh^* \quad (\text{Příklad 5.6.13}) \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{4} \frac{L}{\pi} - K \right) h^* > nh^*. \quad (\text{volba } L \text{ podle (8.25)}) \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $g \notin A_n$. ♣

8.7.38. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a množina A_n je residuální v P pro každé $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Potom je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ residuální v P .
- (b) Je-li navíc P druhé kategorie, pak je $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ neprázdná.

Důkaz. (a) Platí $P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus A_n)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $P \setminus A_n$ první kategorie. Podle Věty 8.7.33 je tedy množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus A_n)$ první kategorie. Odtud plyne residualita množiny $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(b) Podle (a) je množina $P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ první kategorie. Poněvadž je P druhé kategorie, musí být $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ neprázdná. ■

Množiny typu F-sigma a G-delta.

8.7.39. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je

- **typu F_σ** v P , jestliže existují množiny $F_n, n \in \mathbb{N}$, uzavřené v P takové, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$,
- **typu G_δ** v P , jestliže existují množiny $G_n, n \in \mathbb{N}$, otevřené v P takové, že $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

8.7.40. Věta (vztah množin typu G_δ a F_σ). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom A je typu G_δ v P právě tehdy, když $P \setminus A$ je typu F_σ v P .

Důkaz. $\Rightarrow$ Pro A typu G_δ nalezneme posloupnost množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených v P splňující $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = P \setminus G_n$. Podle Věty 8.3.13

je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n uzavřená v P . Podle De Morganových pravidel (Věta 1.3.11) platí

$$P \setminus A = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

takže množina $P \setminus A$ je typu F_σ v P .

⇐ Důkaz této implikace je obdobný. ■

8.7.41. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte, že je-li $A \subset P$ uzavřená (resp. otevřená) v P , potom je zároveň typu G_δ i F_σ v P .

Řešení. Množina A je uzavřená v P . Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = A$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě množina F_n uzavřená v P a platí $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina A je tedy typu F_σ .

Dokážeme nyní, že množina A je také typu G_δ . Pokud je A prázdná, potom je zřejmě typu G_δ . Předpokládejme tedy, že A je neprázdná. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$G_n = \{x \in P; \text{dist}(x, A) < \frac{1}{n}\}.$$

Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená v P podle Věty 8.4.6, neboť funkce $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ je spojitá, jak plyne z Příkladu 8.7.27. Navíc zřejmě platí $A \subset G_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a podle Vět 8.3.28(c) a 8.3.25 je $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Množina A je tedy typu G_δ v P .

Množina A je otevřená v P . Tvrzení plyne z předchozího a Vět 8.3.13 a 8.7.40. ♣

8.7.42. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je hustá množina typu G_δ . Potom je A residuální v P .

Důkaz. Pro množinu A existuje posloupnost $\{G_n\}$ otevřených množin v P splňující $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Protože je množina A hustá v P , plyne z Věty 8.3.39, že množina G_n , $n \in \mathbb{N}$, která A obsahuje, je také hustá v P . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je podle Věty 8.3.47 množina $P \setminus G_n$ řídká v P . Navíc platí

$$P \setminus A = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n),$$

takže $P \setminus A$ je první kategorie v P , neboli A je v tomto prostoru residuální. ■

8.7.43. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a Q je G_δ podmnožina P . Potom je (Q, ϱ) prostor druhé kategorie v sobě.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že (Q, ϱ) je první kategorie v (Q, ϱ) . Je-li množina $H \subset Q$ řídká v (Q, ϱ) , pak lze s pomocí Věty 8.3.44 snadno nahlédnout, že je H řídká i v prostoru $(\overline{Q}, \varrho)$. Odtud plyne, že Q je první kategorie i v prostoru $(\overline{Q}, \varrho)$. Množina Q je typu G_δ v P a z Věty 8.3.32 lze snadno odvodit, že Q je typu G_δ v $\overline{Q}$. Podle Věty 8.7.42 je Q residuální v $(\overline{Q}, \varrho)$, a tedy $\overline{Q} \setminus Q$ je první kategorie v $(\overline{Q}, \varrho)$. Odtud plyne, že $(\overline{Q}, \varrho)$ je sjednocením dvou množin první kategorie

v $(\overline{Q}, \varrho)$, a tedy jde o množinu první kategorie v $(\overline{Q}, \varrho)$. Prostor $(\overline{Q}, \varrho)$ je však úplný podle Věty 8.7.18, a je tedy druhé kategorie podle Věty 8.7.34, což je spor. ■

8.7.44. Věta. Necht (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $A \subset P$ je množina typu F_σ v P , která je druhé kategorie v P . Potom má A neprázdný vnitřek.

Důkaz. Podle předpokladu existují uzavřené množiny $F_n \subset P, n \in \mathbb{N}$, takové, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina A není první kategorie, a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} není řídká. To znamená, že množina $P \setminus \overline{F_{n_0}} = P \setminus F_{n_0}$ není hustá. Existuje tedy neprázdná otevřená množina, která je obsažena v F_{n_0} . Vnitřek množiny F_{n_0} , a tedy i množiny A , je tak neprázdný. ■

8.7.45. Věta (charakterizace množin druhé kategorie). Metrický prostor (P, ϱ) je druhé kategorie právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených hustých množin v (P, ϱ) platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že existuje posloupnost otevřených hustých množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle Věty 8.3.47 množina $P \setminus G_n$ řídká v (P, ϱ) . Navíc platí

$$P = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n).$$

Odtud plyne, že prostor (P, ϱ) je první kategorie, a tedy není druhé kategorie.

$\Leftarrow$ I tuto implikaci dokážeme nepřímým důkazem. Předpokládejme, že prostor (P, ϱ) je první kategorie. Potom existuje posloupnost jeho řídkých podmnožin $\{A_n\}$ splňující $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Podle Věty 8.3.46(c) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $\overline{A_n}$ řídká v (P, ϱ) . Navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $G_n = P \setminus \overline{A_n}$. Pak je Věty 8.3.13 a Definice 8.3.41 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená a hustá v (P, ϱ) . Dále platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_n}) = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = P \setminus P = \emptyset.$$

■

8.7.46. Jestliže $\{G_n\}$ je posloupnost množin typu G_δ v metrickém prostoru (P, ϱ) , pak množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ nemusí být v tomto prostoru typu G_δ . Množiny tohoto tvaru nazýváme **typu** $G_{\delta\sigma}$. Všimněme si, že každá množina typu G_δ je také typu $G_{\delta\sigma}$. Obdobně definujeme množiny **typu** $F_{\sigma\delta}$ jako množiny tvaru $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, kde $\{F_n\}$ je posloupnost množin typu F_σ v P . Takto můžeme postupovat dále a definovat množiny typu $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$, ... Opakovaným používáním operací spočetného průniku a spočetného sjednocení vytváříme stále větší systémy podmnožin P . Studium těchto systémů množin se zabývá *deskriptivní teorie množin*, jejíž základy jsou vyloženy například v [18].

8.8. Separabilní prostory

8.8.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **separabilní**, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

8.8.2. V separabilním metrickém prostoru P existuje podle definice spočetná hustá množina D . Prvky prostoru P , kterých může být nespočetně mnoho, lze tedy s libovolnou přesností aproximovat prvky z množiny D , která je spočetná. To je v některých konstrukcích podstatné. Ačkoliv v našem textu využijeme separabilitu jen několikrát, jde o důležitou a často používanou vlastnost.

Příklady separabilních prostorů.

8.8.3. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že prostor $\mathbb{R}^n$ je separabilní.

Řešení. Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná a podle Příkladu 8.3.36 hustá v $\mathbb{R}$. Množina bodů z $\mathbb{R}^n$ s racionálními souřadnicemi, tj. množina $\mathbb{Q}^n$, je spočetná podle Věty 1.5.28(c). Ukážeme, že množina $\mathbb{Q}^n$ je hustá v $\mathbb{R}^n$. Zvolme $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme díky hustotě $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ prvek $y_i \in \mathbb{Q}$ takový, že $|y_i - x_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Pro $y = [y_1, \dots, y_n]$, pak platí $y \in \mathbb{Q}^n$ a

$$\varrho_2(y, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Tím je hustota $\mathbb{Q}^n$ v $\mathbb{R}^n$ ověřena. ♣

8.8.4. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že prostor $\mathbb{C}^n$ je separabilní.

Řešení. Množina $A = \{x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{Q}\}$ je obrazem množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ při zobrazení $(x, y) \mapsto x + iy$, které je definováno na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{C}$. Podle Věty 1.5.28(d) je pak množina A spočetná. Pak i kartézský součin $A^n \subset \mathbb{C}^n$ je podle Věty 1.5.28(c) spočetná množina. Snadno lze ukázat, že množina A je hustá v $\mathbb{C}$ a pak také že množina A^n je hustá v $\mathbb{C}^n$. Obě ověření lze provést podobně jako Příkladu 8.8.3. ♣

8.8.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$ je separabilní.

Řešení. Necht $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Funkci $f_a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definujme jako funkci, která je na každém intervalu $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, afinní, tj. tvaru $x \mapsto ax + b$, a splňuje $f(\frac{i}{n}) = a_{i+1}, i = 0, \dots, n$. Jinými slovy pro $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ platí

$$f_a(x) = a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{\frac{1}{n}} \left(x - \frac{i-1}{n}\right).$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ je funkce f_a spojitá na $[0, 1]$, a tedy podle Věty 8.6.19 je i stejnoměrně spojitá na intervalu $[0, 1]$. Množina funkcí $A_n = \{f_a; a \in \mathbb{Q}^{n+1}\}$ je spočetná pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 1.5.28 je spočetná i množina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ukážeme, že A je hustá v $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$.

Nechť $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu díky stejnoměrné spojitosti f nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \frac{1}{n} : |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (8.27)$$

Pro každé $i \in \{0, \dots, n\}$ nalezneme podle Příkladu 8.3.36 $a_i \in \mathbb{Q}$ takové, že $|f(\frac{i}{n}) - a_{i+1}| < \varepsilon$. Označme $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$. Pro $x \in [0, 1]$ nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$. Potom pomocí (8.27) a volby $a_i, i = 1, \dots, n+1$, odhadneme

$$\begin{aligned} |f(x) - f_a(x)| &\leq |f(x) - f(\frac{j-1}{n})| + |f(\frac{j-1}{n}) - a_j| + |a_j - f_a(x)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + |a_j - f_a(x)| \\ &= 2\varepsilon + |a_j - a_j - \frac{a_{j+1} - a_j}{\frac{1}{n}}(x - \frac{j-1}{n})| \\ &\leq 2\varepsilon + |a_{j+1} - a_j| \\ &\leq 2\varepsilon + |a_{j+1} - f(\frac{j}{n})| + |f(\frac{j}{n}) - f(\frac{j-1}{n})| + |f(\frac{j-1}{n}) - a_j| < 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\varrho_{\text{sup}}(f, f_a) \leq \varepsilon$. Množina A je tedy hustá, a tudíž je prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$ separabilní. ♣

8.8.6. Příklad. Dokažte, že diskretní metrický prostor je separabilní právě tehdy, když je spočetný.

Řešení. Nechť P je množina a ϱ je diskretní metrika na P . Podle Příkladu 8.3.38 je jedinou hustou podmnožinou prostoru (P, ϱ) množina P . Odtud ihned plyne tvrzení. ♣

8.8.7. Příklad. Dokažte, že Banachův prostor c_0 je separabilní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu D_n jako množinu posloupností $\{x_j\}$, které mají všechny členy racionální a pro každé $j > n$ platí $x_j = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $D_n, n \in \mathbb{N}$ podmnožinou c_0 a je prostým obrazem spočetné množiny $\mathbb{Q}^n$ při zobrazení

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots),$$

a tedy je spočetná podle Věty 1.5.28(d). Položme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Množina D je spočetná podle Věty 1.5.28(b). Dokážeme, že D je hustá v c_0 .

Nechť $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ je prvek c_0 . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|y_j| < \varepsilon$ pro každé $j > n_0$. Dále pro každé $j \in \{1, \dots, n_0\}$ nalezneme $r_j \in \mathbb{Q}$ splňující $|r_j - y_j| < \varepsilon$. Definujme posloupnost $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ předpisem

$$x_j = \begin{cases} r_j & \text{pro } j \in \{1, \dots, n_0\}, \\ 0 & \text{pro } j > n_0. \end{cases}$$

Potom platí $x \in D_{n_0}$, a tedy $x \in D$. Dále platí

$$\begin{aligned}\|x - y\|_\infty &= \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j| \\ &= \max\left\{\sup_{j \leq n_0} |x_j - y_j|, \sup_{j > n_0} |0 - y_j|\right\} \\ &< \max\{\varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Množina D je tedy hustá v c_0 . Odtud vyplývá, že prostor c_0 je separabilní. ♣

Základní vlastnosti separabilních prostorů.

8.8.8. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $A \subset P$ je nespočetná množina taková, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \varepsilon$. Potom P není separabilní.

Důkaz. Předpokládejme, že D je libovolná hustá množina v P . Potom pro každé $x \in A$ existuje $d_x \in D \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Necht $x, y \in A$, $x \neq y$. Potom platí $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$, neboť kdyby existoval prvek $z \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2})$, pak bychom dostali

$$\varepsilon \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Odtud plyne, že $d_x \neq d_y$. To znamená, že zobrazení $F: A \rightarrow D$, které každému $x \in A$ přiřazuje prvek $d_x \in D$, je prosté. Tedy množina A má stejnou mohutnost jako množina $F(A)$. Protože A je nespočetná množina, je nespočetná i množina $F(A)$. Dále víme, že $F(A) \subset D$. Odtud vyplývá, že i D je nespočetná množina. Dokázali jsme, že prostor P neobsahuje žádnou spočetnou hustou množinu. Tudíž prostor P není separabilní. ■

8.8.9. Příklad. Dokažte, že Banachův prostor ℓ_∞ není separabilní.

Řešení. Pro $A \subset \mathbb{N}$ uvažujme charakteristickou funkci $\chi_A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zavedenou v 1.5.9. Funkce χ_A je tedy posloupnost, jejíž členy nabývají hodnoty 0 nebo 1. Pokud $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \neq B$, pak zřejmě platí $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$. Množina všech podmnožin $\mathbb{N}$ je nespočetná (Věta ??, vizte též 1.5.23 a Větu ??), a z Věty 8.8.8 tedy vyplývá, že prostor ℓ_∞ není separabilní. ♣

8.8.10. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je systém obsahující otevřené podmnožiny P . Řekneme, že $\mathcal{B}$ je **báze otevřených množin** prostoru P , jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje systém $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ takový, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

8.8.11. Každou otevřenou množinu můžeme obdržet jako sjednocení množin báze, přičemž systém bazových množin může být podstatně menší než systém všech otevřených množin. Prázdná množina je rovna sjednocení prázdného systému množin, a proto báze nemusí, ale může, obsahovat prázdnou množinu.

8.8.12. Věta (charakterizace separabilních prostorů). Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Potom je P separabilní právě tehdy, když má spočetnou bázi otevřených množin.

Důkaz. $\Rightarrow$ Necht D je spočetná hustá podmnožina P . Položme

$$\mathcal{B} = \{B(x, r); x \in D, r \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}.$$

Množina $D \times \mathbb{Q}$ je spočetná podle Věty 1.5.28(c). Systém $\mathcal{B}$ je obrazem množiny $D \times \mathbb{Q}$ při zobrazení $F: (x, r) \mapsto B(x, r)$, a tedy je podle Věty 1.5.28(d) také spočetný.

Dokážeme, že $\mathcal{B}$ je bázi otevřených množin P . Množiny v $\mathcal{B}$ jsou otevřené koule, a tedy otevřené množiny. Necht $G \subset P$ je otevřená množina. Položme $\mathcal{B}^* = \{H \in \mathcal{B}; H \subset G\}$. Zřejmě platí $\bigcup \mathcal{B}^* \subset G$. Dokážeme opačnou inkluzi. Předpokládejme, že $x \in G$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset G$. Nalezneme $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{4}) \cap D$ a $r \in (\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$. Potom $\varrho(x, y) < r$, takže $x \in B(y, r)$. Dále pro každé $z \in B(y, r)$ platí

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a tedy $B(y, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset G$. Odtud vyplývá, že $B(y, r) \in \mathcal{B}^*$. Protože $x \in B(y, r)$, plyne odtud, že $x \in \bigcup \mathcal{B}^*$. Platí tedy $G = \bigcup \mathcal{B}^*$.

$\Leftarrow$ Necht $\mathcal{B} = \{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná báze neprázdných otevřených množin metrického prostoru (P, ϱ) . Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in B_n$ a položíme $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Množina D je zřejmě spočetná. Předpokládejme, že G je neprázdna otevřená množina. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $B_n \subset G$. Potom máme $x_n \in G$, a tedy $G \cap D \neq \emptyset$. Podle Věty 8.3.39 je tudíž množina D hustá v P . Odtud plyne, že prostor P je separabilní. ■

8.8.13. Věta. Necht (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a $Q \subset P$. Potom je metrický prostor (Q, ϱ) separabilní.

Důkaz. Podle Věty 8.8.12 existuje spočetná báze $\mathcal{B}$ otevřených množin prostoru P . Definujme systém $\mathcal{B}_Q = \{Q \cap B; B \in \mathcal{B}\}$. Systém $\mathcal{B}_Q$ spočetný, neboť systém $\mathcal{B}$ je spočetný. Každá množina z $\mathcal{B}_Q$ je otevřená v Q podle Věty 8.3.32. Dokážeme, že $\mathcal{B}_Q$ je bázi otevřených množin prostoru Q .

Předpokládejme, že $G \subset Q$ je otevřená množina v Q . Podle Věty 8.3.32 existuje množina $\tilde{G} \subset P$ otevřená v P splňující $G = \tilde{G} \cap Q$. Pro množinu $\tilde{G}$ nalezneme systém $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ splňující $\tilde{G} = \bigcup \mathcal{B}^*$. Položme $\mathcal{B}_Q^* = \{Q \cap B; B \in \mathcal{B}^*\}$. Potom zřejmě $\mathcal{B}_Q^* \subset \mathcal{B}_Q$ a $\bigcup \mathcal{B}_Q^* = Q \cap \bigcup \mathcal{B}^* = Q \cap \tilde{G} = G$.

Prostor (Q, ϱ) je separabilní podle Věty 8.8.12, neboť má spočetnou bázi otevřených množin. ■

8.8.14. Věta (totální omezenost a separabilita). Necht (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Podle definice totální omezenosti existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečná $\frac{1}{n}$ -sít D_n prostoru P . Položme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Podle Věty 1.5.28(b) je potom množina D spočetná. Zvolme $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Poněvadž D_n je $\frac{1}{n}$ -sít, existuje $y \in D_n$ takové, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{n}$. Potom $y \in D$ a platí $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Odtud plyne, že D je hustá v P . Prostor P je tedy separabilní. ■

8.8.15. Důsledek. Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 8.6.26 a Věty 8.8.14. ■

8.8.16. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) má **Lindelöfovou vlastnost**⁴, jestliže pro každý systém $\mathcal{G}$ otevřených podmnožin P splňujících $P = \bigcup \mathcal{G}$ existuje spočetný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ takový, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

8.8.17. Z Věty 8.6.28 plyne, že každý kompaktní metrický prostor má Lindelöfovou vlastnost.

8.8.18. Věta. Necht (P, ϱ) je separabilní metrický prostor. Potom P má Lindelöfovou vlastnost.

Důkaz. Necht $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí P . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že systém $\mathcal{G}$ je neprázdný. Zvolme $G_0 \in \mathcal{G}$. Necht $D = \{d_n; n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá podmnožina P . Necht $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{Q}, q > 0$. Jestliže existuje $G \in \mathcal{G}$ splňující $B(d_n, q) \subset G$, potom zvolme jednu z množin G s touto vlastností a označme ji $G_{n,q}$. Jestliže taková množina neexistuje, položme $G_{n,q} = G_0$. Definujme systém $\mathcal{G}^*$ předpisem

$$\mathcal{G}^* = \{G_{n,q}; n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}, q > 0\}.$$

Potom je $\mathcal{G}^*$ zřejmě spočetný a platí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$. Dokážeme, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

Necht $x \in P$. Protože $P = \bigcup \mathcal{G}$, můžeme nalézt $G \in \mathcal{G}$ splňující $x \in G$. Díky otevřenosti množiny G nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Díky tomu, že D je hustá množina, nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $d_n \in B(x, \frac{r}{2})$. Nyní nalezneme $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $\varrho(x, d_n) < q < \frac{r}{2}$. Potom $x \in B(d_n, q)$ a pro každé $y \in B(d_n, q)$ platí díky trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(y, x) \leq \varrho(y, d_n) + \varrho(d_n, x) < q + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

takže $B(d_n, q) \subset B(x, r)$. Protože $B(x, r) \subset G$, platí $B(d_n, q) \subset G_{n,q}$. To znamená, že $x \in G_{n,q}$. Protože $G_{n,q} \in \mathcal{G}^*$ a x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$. Prostor P má tedy Lindelöfovou vlastnost. ■

8.9. Souvislé prostory

8.9.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **souvislý**, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **souvislá**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) souvislý.

⁴Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946)

Příklady souvislých prostorů.

8.9.2. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $x \in P$. Potom je množina $\{x\}$ souvislá v P .

Řešení. Prostor P , který je jednobodový, nemůže obsahovat dvě disjunktní neprázdné množiny, a tedy je souvislý. ♣

8.9.3. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}$ je souvislý.

Řešení. Předpokládejme pro spor, že $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny splňující $G_1 \cup G_2 = \mathbb{R}$. Podle věty o struktuře otevřených množin v $\mathbb{R}$ (Věta 8.3.17) je množina G_1 spočetným sjednocením disjunktních otevřených intervalů. Protože $G_2 \neq \emptyset$, neplatí $G_1 = \mathbb{R}$, a tedy alespoň jeden z krajních bodů alespoň jednoho z těchto intervalů je prvkem $\mathbb{R}$. Označme tento bod jako a . Potom $a \notin G_1$, a tedy $a \in G_2$. Protože G_2 je otevřená v $\mathbb{R}$, existuje $r > 0$ takové, že $(a - r, a + r) \subset G_2$. Protože a je krajním bodem některého intervalu ležícího v G_1 , musí platit $(a - r, a + r) \cap G_1 \neq \emptyset$. To je však spor s tím, že množiny G_1 a G_2 jsou disjunktní. ♣

8.9.4. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $P = [0, 1] \cup (2, 3)$ není souvislý.

Řešení. Množina $[0, 1]$ je otevřená v P podle Příkladu 8.3.33. Množina $(2, 3)$ je otevřená v P podle Věty 8.3.32. Metrický prostor P je tedy sjednocením těchto dvou neprázdných disjunktních otevřených množin, a není tedy souvislý. ♣

8.9.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je souvislý právě tehdy, když je množina P jednobodová nebo prázdná.

Řešení. $\Rightarrow$ Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že množina P není ani jednobodová ani prázdná, a obsahuje tedy alespoň dva prvky. Necht $x \in P$. Potom jsou množiny $\{x\}$ a $P \setminus \{x\}$ otevřené (Příklad 8.3.14), neprázdné a disjunktní. Množina P je jejich sjednocením, a proto není P souvislý.

$\Leftarrow$ Souvislost prázdného prostoru plyne ihned z definice. Souvislost jednobodového prostoru plyne z Příkladu 8.9.2. ♣

8.9.6. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $H \subset P$. Řekneme, že H je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená.

8.9.7. V každém metrickém prostoru (P, ϱ) jsou prázdná množina a množina P obojetné. V metrickém prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ jsou množiny $[0, 1]$ a $(2, 3)$ obojetné, což plyne z Příkladu 8.3.33. Každá podmnožina metrického prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je obojetná podle Příkladů 8.3.4 a 8.3.14.

8.9.8. Věta (charakterizace souvislých prostorů). Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující čtyři výroky ekvivalentní.

- (i) Prostor P není souvislý.
- (ii) Existují dvě neprázdné uzavřené disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset P$ splňující $P = F_1 \cup F_2$.

- (iii) Existuje obojetná neprázdná množina H splňující $H \neq P$.
- (iv) Existuje spojitě surjektivní zobrazení $f : (P, \varrho) \rightarrow (\{0, 1\}, \varrho_{\text{diskr}})$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nalezneme neprázdné disjunktní otevřené množiny G_1 a G_2 splňující $P = G_1 \cup G_2$. Položme $F_1 = G_1$ a $F_2 = G_2$. Podle Věty 8.3.13 jsou množiny F_1 a F_2 uzavřené. Navíc jsou zřejmě disjunktní a neprázdné a platí $P = F_1 \cup F_2$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Položme $H = F_1$. Potom H je neprázdná, uzavřená a různá od P . Protože F_2 je uzavřená, je H také otevřená, a tedy obojetná.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Položme $f = \chi_H$. Protože $H \neq \emptyset$ a $H \neq P$, je f surjektivní zobrazení. Dokážeme, že f je spojitě. V prostoru $\{0, 1\}$ existují pouze čtyři otevřené množiny, a sice $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ a $\{0, 1\}$. Podle předpokladu jsou množiny $f^{-1}(\{0\}) = P \setminus H$ i $f^{-1}(\{1\}) = H$ otevřené. Množiny $f^{-1}(\{0, 1\}) = P$ a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ jsou také otevřené. Podle Věty 8.4.6 je tedy f spojitě.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Podle Příkladu 8.3.14 jsou množiny $\{0\}$ a $\{1\}$ otevřené. Ze spojitosti zobrazení f a Věty 8.4.6 plyne, že množiny $f^{-1}(\{0\})$ a $f^{-1}(\{1\})$ jsou otevřené P . Navíc jsou tyto dvě množiny zřejmě neprázdné a disjunktní a platí $P = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$. Prostor P tedy není souvislý. ■

8.9.9. Věta (vlastnosti souvislých prostorů). Necht (P, ϱ) je metrický prostor.

- (a) Necht (Q, σ) je metrický prostor a $f : P \rightarrow Q$ je spojitě zobrazení. Necht $A \subset P$ je souvislá množina v prostoru P . Pak $f(A)$ je souvislá množina v Q .
- (b) Necht $A \subset P$ je souvislá množina v prostoru P a $A \subset B \subset \bar{A}$. Pak je množina B souvislá v prostoru P . Speciálně, množina $\bar{A}$ je souvislá v P .
- (c) Necht $I \neq \emptyset$ a pro každé $\alpha \in I$ je A_α souvislá množina v P . Necht platí

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Potom je $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ souvislá množina v P .

Důkaz. (a) Předpokládejme pro spor, že množina $f(A)$ není souvislá v Q . Existují tedy neprázdné disjunktní množiny $G_1, G_2 \subset Q$ otevřené v $f(A)$ splňující $f(A) = G_1 \cup G_2$. Ze spojitosti zobrazení $f|_A$ a z Věty 8.4.6 plyne, že množiny $(f|_A)^{-1}(G_1)$ a $(f|_A)^{-1}(G_2)$ jsou otevřené v prostoru (A, ϱ) . Navíc jsou zřejmě neprázdné a disjunktní a platí $A = (f|_A)^{-1}(G_1) \cup (f|_A)^{-1}(G_2)$. Množina A tudíž není souvislá, což je spor s předpokladem.

(b) Předpokládejme pro spor, že $B = F_1 \cup F_2$, přičemž F_1, F_2 jsou neprázdné, disjunktní a uzavřené v B . Podle Věty 8.3.32 jsou množiny $A \cap F_1$ a $A \cap F_2$ uzavřené v A . Navíc jsou tyto dvě množiny zřejmě disjunktní a platí $A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2)$. Množina A je souvislá, a proto je jedna z uvedených množin rovna A . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \cap F_1 = A$. Platí tedy $A \subset F_1$. Potom podle Věty 8.3.31 máme

$$B = \bar{A} \cap B = \bar{A}^B \subset \bar{F}_1^B = F_1,$$

přičemž poslední rovnost plyne z uzavřenosti množiny F_1 v B . Odtud plyne $B = F_1$, a tedy $F_2 = \emptyset$, což je spor.

(c) Označme $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Pro spor předpokládejme, že existují neprázdné disjunktní množiny G_1, G_2 , které jsou otevřené v X a platí $X = G_1 \cup G_2$. Pak pro každé $\alpha \in I$ máme $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$, přičemž množiny $A_\alpha \cap G_1$ a $A_\alpha \cap G_2$ jsou disjunktní a podle Věty 8.3.32 otevřené v metrickém prostoru A_α . Tento metrický prostor je ale souvislý, takže alespoň jedna z množin $A_\alpha \cap G_1$ a $A_\alpha \cap G_2$ musí být prázdná a druhá musí být rovna A_α . Dokázali jsme, že pro každé $\alpha \in I$ platí buď $A_\alpha \subset G_1$ nebo $A_\alpha \subset G_2$. Protože ale průnik všech A_α je neprázdný, plyne odtud, že buď pro každé $\alpha \in I$ platí $A_\alpha \subset G_1$ nebo pro každé $\alpha \in I$ platí $A_\alpha \subset G_2$. Množina G_1 nebo G_2 je tudíž prázdná, což je spor. ■

8.9.10. Věta (charakterizace souvislých množin v $\mathbb{R}$). Necht $A \subset \mathbb{R}$. Pak A je souvislá v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když A je interval.

Důkaz. $\Rightarrow$ Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že A není interval. Podle Lemmatu 1.6.27 existují body $x, y \in A$ a $z \in \mathbb{R}, z \notin A$, takové, že $x < z < y$. Potom

$$A = (A \cap (-\infty, z)) \cup (A \cap (z, \infty)).$$

Množiny $A \cap (-\infty, z)$ a $A \cap (z, \infty)$ jsou zřejmě neprázdné a disjunktní. Podle Věty 8.3.32 jsou navíc otevřené v A . Množina A tedy není souvislá.

$\Leftarrow$ Pro spor předpokládejme, že interval A není souvislá množina. Existují tedy disjunktní neprázdné množiny F_1, F_2 , které jsou uzavřené v A a $F_1 \cup F_2 = A$. Existují tedy body $a \in F_1$ a $b \in F_2$. Platí $a \neq b$, neboť F_1 a F_2 jsou disjunktní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b$. Označme $\sigma = \sup([a, b] \cap F_1)$. Z definice suprema vyplývá, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in F_1$ s vlastností $\sigma - \varepsilon < x \leq \sigma$. Poněvadž F_1 je uzavřená v A , platí $\sigma \in F_1$. Odtud plyne, že $\sigma < b$. Potom musí platit $(\sigma, b] \subset F_2$. Množina F_2 je uzavřená v A , a proto odtud plyne, že platí $\sigma \in F_2$. Máme tedy $\sigma \in F_1 \cap F_2$, což je spor. ■

Komponenta.

8.9.11. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $M \subset P$ je **komponenta** (P, ϱ) , jestliže M je maximální souvislá množina. **Komponentou** množiny $A \subset P$ rozumíme komponentu prostoru (A, ϱ) .

8.9.12. Maximalitu z předchozí definice uvažujeme vzhledem k uspořádání inkluzí. Množina M je tedy komponentou prostoru P , jestliže je souvislá a pro každou souvislou množinu $B \subset P$ splňující $A \subset B$ platí $A = B$.

8.9.13. Věta. Necht (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech komponent P . Potom $\mathcal{S}$ obsahuje pouze neprázdné uzavřené množiny, je disjunktní a $\bigcup \mathcal{S} = P$.

Důkaz. Neprázdnost. Jestliže $S \in \mathcal{S}$, potom je S neprázdná. Jinak bychom totiž obdrželi spor s maximalitou, protože P je neprázdný, existuje $x \in P$ a množina $\{x\}$ je souvislá podle Příkladu 8.9.2.

Uzavřenost. Pokud $S \in \mathcal{S}$, potom $\overline{S}$ je souvislá podle Věty 8.9.9(b) a $S \subset \overline{S}$. Vzhledem k maximalitě musí být $S = \overline{S}$, a tedy je S uzavřená.

Disjunktnost. Předpokládejme pro spor, že existují $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, $S_1 \neq S_2$, $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Potom je podle Věty 8.9.9(c) množina $S_1 \cup S_2$ souvislá. Dále platí $S_1 \subsetneq S_1 \cup S_2$ nebo $S_2 \subsetneq S_1 \cup S_2$. V prvním případě dostáváme spor s maximalitou komponenty S_1 a ve druhém s maximalitou komponenty S_2 .

Rovnost $\bigcup \mathcal{S} = P$. Zvolme $x \in P$. Definujme pomocný systém

$$\mathcal{A} = \{A \subset P; A \text{ je souvislá a } x \in A\}.$$

Platí $\{x\} \in \mathcal{A}$, a tedy množina $\bigcup \mathcal{A}$ je neprázdná. Množina $\bigcup \mathcal{A}$ je souvislá podle Věty 8.9.9(c) a je zřejmě maximální. Platí tedy $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{S}$, a tedy $x \in \bigcup \mathcal{S}$. ■

Křivková souvislost.

8.9.14. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $\gamma: [a, b] \rightarrow P$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojitě.

8.9.15. Křivkou intuitivně rozumíme čáru v rovině nebo prostoru, případně v nějakém obecnějším prostoru. Matematicky by se tedy mělo jednat o podmnožinu metrického prostoru s jistými vlastnostmi. V předchozí definici však křivkou rozumíme spojitě zobrazení. Tento přístup má své výhody, jak bude vidět později, zejména pak v Kapitole 13.

8.9.16. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že P je **křivkově souvislý**, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje křivka $\gamma: [0, 1] \rightarrow P$ taková, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Množina $A \subset P$ je **křivkově souvislá** v P , jestliže metrický prostor (A, ϱ) je křivkově souvislý.

8.9.17. Věta. Necht (P, ϱ) je křivkově souvislý metrický prostor. Potom je P souvislý.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že P není souvislý. Potom existují neprázdné disjunktní množiny G_1, G_2 otevřené v P splňující $P = G_1 \cup G_2$. Zvolme body $x \in G_1$ a $y \in G_2$. Pak existuje spojitě zobrazení $f: [0, 1] \rightarrow P$ taková, že $f(0) = x$ a $f(1) = y$. Potom ale $[0, 1] = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$. Ze spojitosti zobrazení f a Věty 8.4.6 plyne, že množiny $f^{-1}(G_1)$ a $f^{-1}(G_2)$ jsou otevřené v prostoru $[0, 1]$. Zároveň jsou zřejmě disjunktní a neprázdné. Interval $[0, 1]$ je tedy nesouvislý. To je ale spor s Větou 8.9.10. ■

8.9.18. Věta. Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $G \subset X$ je otevřená. Potom je G souvislá právě tehdy, když je křivkově souvislá.

Důkaz. $\Rightarrow$ Pokud je G prázdná, pak implikace zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $G \neq \emptyset$. Zvolme $x \in G$ libovolně a definujme množinu A jako množinu všech bodů $y \in G$, pro které existuje spojitě zobrazení $f: [0, 1] \rightarrow G$ splňující $f(0) = x$ a $f(1) = y$.

Množina A je otevřená v G . Předpokládejme $y \in A$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(y, r) \subset G$. Necht $z \in B(y, r)$. Definujme zobrazení $g: [0, 1] \rightarrow X$ předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ y + (2t - 1)(z - y) & \text{pro } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné zkontrolovat, že zobrazení g je spojitě. Platí také $g([0, \frac{1}{2}]) = f([0, 1]) \subset G$ a $g((\frac{1}{2}, 1]) \subset B(y, r)$. Máme tedy $g([0, 1]) \subset G$. Protože platí $g(0) = f(0) = x$ a $g(1) = z$, dostáváme $z \in A$. Ukázali jsme tak $B(y, r) \subset A$, a tedy A je otevřená v X , takže je také otevřená v G .

Množina A je uzavřená v G . Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny A , která konverguje k prvku $z \in G$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(z, r) \subset G$. Poněvadž $\lim x_n = z$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(z, r)$. Díky podmínce $x_n \in A$ nalezneme spojitě zobrazení $f: [0, 1] \rightarrow X$ splňující $f(0) = z$ a $f(1) = x_n$. Definujme zobrazení $g: [0, 1] \rightarrow X$ předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_n + (2t - 1)(z - y) & \text{pro } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné zkontrolovat, že zobrazení g je spojitě a že platí $g([0, \frac{1}{2}]) = f([0, 1]) \subset G$, $g((\frac{1}{2}, 1]) \subset B(z, r) \subset G$, $g(0) = x$ a $g(1) = z$. Odtud plyne $z \in A$, čímž je ověřena uzavřenost A v G .

Množina A je neprázdná, neboť $x \in A$, o čemž svědčí konstantní zobrazení $f(t) = x, t \in [0, 1]$. To znamená, že A je neprázdná obojetná množina v G . Množina G je souvislá, takže musí platit $A = G$. Tím je ověřena definice křivkové souvislosti pro G .

← Tato implikace plyne z Věty 8.9.17. ■

8.9.19. Příklad. Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $A \subset X$ je konvexní. Potom je A křivkově souvislá, a tedy i souvislá.

Řešení. Zvolme $a, b \in A$. Potom zobrazení $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ definované předpisem $\varphi(t) = (1 - t)a + tb$ má díky konvexitě množiny A hodnoty obsažené v A . Dále platí $\varphi(0) = a$ a $\varphi(1) = b$. Zbývá ukázat, že φ je spojitě. Zvolme $t_0 \in [0, 1]$. Potom pro každé $t \in [0, 1]$ platí

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| &= \|(1 - t)a + tb - (1 - t_0)a - t_0b\| \\ &= \|(t - t_0)(b - a)\| = |t - t_0| \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

Odtud již plyne spojitost zobrazení φ . ♣

8.9.20. Příklad. Dokažte, že množina A , která je definována jako graf funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0], \\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

je souvislou podmnožinou prostoru $\mathbb{R}^2$, která ale není křivkově souvislá.

Řešení. Souvislost. Položme $A_1 = \{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2; x \in (0, \infty)\}$. Definujme zobrazení $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem $g(x) = [x, f(x)]$. Potom je zobrazení g spojitě podle Věty 8.5.4 a $g((0, \infty)) = A_1$. Množina A_1 je tedy souvislá, neboť je spjitým obrazem souvislé množiny (Věta 8.9.9(a)).

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $[x_n, 0] \in A_1$ a $\lim x_n = 0$. Odtud plyne, že $[0, 0] \in \overline{A_1}$. Označíme-li tedy $A_2 = A_1 \cup \{[0, 0]\}$, pak dostaneme $A_1 \subset A_2 \subset \overline{A_1}$. Podle Věty 8.9.9(b) je tudíž A_2 souvislá v prostoru $\mathbb{R}^2$.

Konečně označme $A_3 = (-\infty, 0] \times \{0\}$. Potom je A_3 zřejmě souvislá množina v $\mathbb{R}^2$ a navíc platí $A_2 \cap A_3 = \{[0, 0]\}$, takže $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$. Podle Věty 8.9.9(c) je tedy také množina $A = A_2 \cup A_3$ souvislá v $\mathbb{R}^2$.

Neplatnost křivkové souvislosti. Předpokládejme pro spor, že množina A je navíc křivkově souvislá v $\mathbb{R}^2$. Položme $a = [0, 0]$ a $b = [\frac{1}{\pi}, 0]$. Pak $a, b \in A$ a existuje tedy spojitě zobrazení $h: [0, 1] \rightarrow A$ takové, že $h(0) = a$ a $h(1) = b$.

Tvrdíme, že pro každé $x \in [0, \frac{1}{\pi}]$ existuje $t \in [0, 1]$ takové, že $h(t) = [x, f(x)]$. Kdyby tomu tak nebylo, pak by platilo $h: [0, 1] \rightarrow A_4$, kde $A_4 = A \setminus \{[x, f(x)]\}$. Protože množiny $(-\infty, x) \times \mathbb{R}$ a $(x, \infty) \times \mathbb{R}$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^2$, jsou podle Věty 8.3.32 množiny $A_4 \cap ((-\infty, x) \times \mathbb{R})$ a $A_4 \cap ((x, \infty) \times \mathbb{R})$ otevřené v A_4 a díky spojitosti zobrazení h a Větě 8.4.6 jsou také množiny $h^{-1}(A_4 \cap ((-\infty, x) \times \mathbb{R}))$ a $h^{-1}(A_4 \cap ((x, \infty) \times \mathbb{R}))$ otevřené v $[0, 1]$. Protože jsou také zřejmě neprázdné a disjunktní a interval $[0, 1]$ je jejich sjednocením, plyne odtud, že interval $[0, 1]$ je nesouvislý, což je spor s Větou 8.9.10. Tím je dokázáno naše tvrzení.

Speciálně tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $t_n \in [0, 1]$ takové, že

$$h(t_n) = [(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}, 1].$$

Zřejmě platí $\lim h(t_n) = [0, 1] \in \mathbb{R}^2$. Podle Vět 8.6.12 a 8.6.3 je množina $h([0, 1])$ kompaktní v $\mathbb{R}^2$. Podle Věty 8.6.6 je tato množina uzavřená v $\mathbb{R}^2$. Podle již dokázaného tvrzení obsahuje množina $h([0, 1])$ posloupnost $\{[(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}, 1]\}_{n=1}^{\infty}$. Odtud plyne $[0, 1] \in A$, což je spor. ♣

8.9.21. Věta. Necht X je normovaný lineární prostor a $G \subset X$ je otevřená. Potom komponenty G jsou otevřené v X .

Důkaz. Necht $S \subset X$ je komponentou množiny G . Zvolme $x \in S$. Díky otevřenosti G nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset G$. Množina $B(x, \varepsilon)$ je souvislá podle Příkladu 8.9.19, a tedy $S \cup B(x, \varepsilon)$ je souvislá podle Věty 8.9.9(c). Z maximality S ovšem vyplývá $B(x, \varepsilon) \subset S$. To znamená, že bod x je vnitřním bodem S . Bod x byl zvolen libovolně v množině S , a tedy S je otevřená. ■

8.10. Teoretické příklady k metrickým prostorům

Teoretické příklady jsou rozděleny do následujících pododdílů:

- základní pojmy,

- spojitost,
- úplné prostory,
- kompaktní prostory,
- Cantorův prostor a Cantorovo diskontinuum,
- souvislé a křivkově souvislé prostory.

Základní pojmy.

8.10.1. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $x, y, u, v \in P$. Dokažte, že platí

$$|\varrho(x, y) - \varrho(u, v)| \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Řešení. Díky trojúhelníkové nerovnosti (8.1.1(c)) a symetrii (8.1.1(b)) platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(v, y) = \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(y, v),$$

takže platí

$$\varrho(x, y) - \varrho(u, v) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Podobně obdržíme nerovnost

$$\varrho(u, v) \leq \varrho(u, x) + \varrho(x, y) + \varrho(y, v) = \varrho(x, u) + \varrho(x, y) + \varrho(y, v),$$

takže také platí

$$\varrho(u, v) - \varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Tvrzení plyne z kombinace předcházejících dvou odhadů. ♣

8.10.2. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P s limitou $x \in P$ a $\{y_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P s limitou $y \in P$. Dokažte, že $\varrho(x_n, y_n) \rightarrow \varrho(x, y)$.

Řešení. Podle Příkladu 8.10.1 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x, y)| \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(y_n, y).$$

Podle předpokladu konverguje pravá strana k nule, a tedy i levá. Odtud plyne tvrzení. ♣

8.10.3. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Množinu $\overline{B}(x, r)$ definovanou předpisem

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in P; \varrho(x, y) \leq r\}$$

nazýváme **uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r** .

8.10.4. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že uzavřená koule $\overline{B}(x, r)$ je uzavřená množina.

Řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost bodů $\overline{B}(x, r)$ konvergující k $z \in P$. Potom $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, z) \leq r + \varrho(x_n, z)$. Pravá strana nerovnosti konverguje k r , a proto $\varrho(x, z) \leq r$, neboli $x \in \overline{B}(x, r)$. Množina $\overline{B}(x, r)$ je tedy uzavřená. ♣

8.10.5. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že platí $\overline{B}(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$. Ukažte, že opačná inkluze obecně neplatí.

Řešení. Platnost inkluze. Protože platí $B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$ a $\overline{B}(x, r)$ je uzavřená množina podle Příkladu 8.10.4, vyplývá dokazovaná inkluze z Věty 8.3.28(g).

Protipříklad na opačnou inkluzi. Necht P je diskrétní metrický prostor obsahující alespoň dva různé body. Zvolme $x \in P$. Potom $B(x, 1) = \overline{B}(x, 1) = \{x\}$, ale $\overline{B}(x, 1) = P$. Protože P má alespoň dva různé body, inkluze $\overline{B}(x, 1) \subset B(x, 1)$ neplatí. ♣

8.10.6. Příklad. Definujme zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = -\infty, \\ \arctg x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \infty \end{cases}$$

a funkci $\tau: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow [0, \infty)$ předpisem $\tau(u, v) = |\varphi(u) - \varphi(v)|$.

- (a) Dokažte, že $(\mathbb{R}^*, \tau)$ je metrický prostor.
- (b) Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Dokažte, že platí $\lim a_n = A$ v obvyklém smyslu právě tehdy, když $a_n \xrightarrow{\tau} A$.

Řešení. (a) Zřejmě pro každá $x, y \in \mathbb{R}^*$ platí $\tau(x, y) \in [0, \infty)$. Dále platí $\tau(x, y) = 0$ právě tehdy, když $\varphi(x) = \varphi(y)$. Zobrazení φ je prosté, což dává platnost podmínky (a) v Definici 8.1.1. Podmínka (b) v Definici 8.1.1 je zřejmě splněna. Ověříme ještě trojúhelníkovou nerovnost. Necht $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Potom s pomocí trojúhelníkové nerovnosti pro reálná čísla dostaneme

$$\begin{aligned} \tau(x, z) &= |\varphi(x) - \varphi(z)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - \varphi(z)| \\ &\leq \tau(x, y) + \tau(y, z). \end{aligned}$$

Tím je ověřeno, že $(\mathbb{R}^*, \tau)$ tvoří metrický prostor.

(b) $\Rightarrow$ Platí $\lim \varphi(a_n) = \varphi(A)$ díky spojitosti funkce $\arctg$ v případě, že $A \in \mathbb{R}$, a díky $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = \pm\frac{\pi}{2}$ v případě $A = \pm\infty$. Potom $\lim \tau(a_n, A) = 0$, a tedy $a_n \xrightarrow{\tau} A$.

$\Leftarrow$ Protože $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, platí $\tg(\varphi(a_n)) = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Poněvadž $\lim \varphi(a_n) = \varphi(A)$, platí $\lim a_n = A$ díky spojitosti funkce $\tg$ v případě, že $A \in \mathbb{R}$, a díky $\lim_{x \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}} \tg x = \pm\infty$ v případě $A = \pm\infty$. ♣

8.10.7. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\{a_n\}$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že x je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

8.10.8. Uvedme předchozí definici do souvislosti s Definicí 2.4.17. V druhé zmíněné pracujeme s posloupnostmi reálných čísel a jako hromadné hodnoty připouštíme i $\pm\infty$, tedy prvky, které nepatří do $\mathbb{R}$. Symbol $H(\{a_n\})$ má pro posloupnosti reálných čísel tedy dva různé významy podle toho, zda hromadné hodnoty uvažujeme pouze v $\mathbb{R}$ (Definice 8.10.7) nebo v $\mathbb{R}^*$ (Definice 2.4.17). Je tedy třeba vědět v jakém smyslu uvedený symbol používáme. V Příkladech 8.10.9, 8.10.10 to bude

Definice 8.10.7, v Příkladu 8.10.11 se pak na vztah těchto definic podíváme ještě jednou.

8.10.9. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{a_n\}$ je posloupnost prvků z P . Dokažte, že množina všech hromadných hodnot $H(\{a_n\})$ je uzavřená v P .

Řešení. Předpokládejme, že $\{x^n\}$ je posloupnost prvků z $H(\{a_n\})$ splňující $\lim x^n = x \in P$. Pro každé n existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{m_j^n\}_{j=1}^\infty$ taková, že $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{m_j^n} = x^n$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ takovou, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(a_{k_i}, x^i) < \frac{1}{i}$. Postupujeme následovně. Prvek $k_1 \in \mathbb{N}$ zvolme tak, aby platilo $\varrho(a_{k_1}, x^1) < 1$. To je možné, neboť $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{m_j^1} = x^1$. Máme-li již zkonstruován prvek k_i , potom k_{i+1} nalezneme tak, že použijeme $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{m_j^{i+1}} = x^{i+1}$ a nalezneme $l \in \mathbb{N}$ splňující $m_l^{i+1} > k_i$ a $\varrho(a_{m_l^{i+1}}, x^{i+1}) < \frac{1}{i+1}$. Položíme $k_{i+1} = m_l^{i+1}$, čímž je konstrukce hledané posloupnosti provedena. Pak platí

$$\varrho(a_{k_i}, x) \leq \varrho(a_{k_i}, x^i) + \varrho(x^i, x) \leq \frac{1}{i} + \varrho(x^i, x).$$

Poněvadž $\lim x^i = x$, dostáváme $\lim a_{k_i} = x$. Máme tedy $x \in H(\{a_n\})$. Tím je důkaz proveden. ♣

8.10.10. Příklad. Necht (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a $M \subset P$ je neprázdňná a uzavřená. Potom existuje posloupnost $\{a_n\}$ prvků P taková, že $H(\{a_n\}) = M$.

Řešení. Podle Věty 8.8.13 je separabilní i prostor (M, ϱ) . Nalezneme neprázdňnou spočetnou množinu $D \subset M$, která je hustá v (M, ϱ) . Dále nalezneme posloupnost $\{y_n\}$, která splňuje $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} = D$. Definujme novou posloupnost

$$y_1, \quad y_1, y_2, \quad y_1, y_2, y_3, \quad y_1, y_2, y_3, y_4, \quad \dots,$$

a označme ji $\{a_n\}$. V této posloupnosti se každý prvek množiny D vyskytuje nekonečněkrát. Předpokládejme, že $z \in D$. Pak existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} = z$. Potom zřejmě $z \in H(\{a_n\})$. Platí tedy $D \subset H(\{a_n\})$. Díky uzavřenosti množiny M platí $H(\{a_n\}) \subset M$. Potom máme

$$M = \overline{D} \subset \overline{H(\{a_n\})} \subset \overline{M} = M.$$

Množina $H(\{a_n\})$ je podle Příkladu 8.10.9 uzavřená, takže dostáváme $H(\{a_n\}) = M$. ♣

8.10.11. Příklad. Necht $M \subset \mathbb{R}^*$ je neprázdňná uzavřená množina v prostoru $(\mathbb{R}^*, \tau)$, kde τ je metrika zavedená v Příkladu 8.10.6. Dokažte, že pak existuje posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ taková, že množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ zavedená v Definici 2.4.17 je rovna množině M .

Řešení. Prostor $(\mathbb{R}^*, \tau)$ je separabilní, neboť množina racionálních čísel je hustá v $(\mathbb{R}^*, \tau)$. Podle Příkladu 8.10.10 tedy existuje posloupnost $\{b_n\}$ prvků $\mathbb{R}^*$ splňující $H(\{b_n\}) = M$. Naším úkolem je však nalézt posloupnost reálných čísel s uvedenou

vlastností, takže příklad ještě není dořešen, protože posloupnost $\{b_n\}$ může obsahovat prvky ∞ a $-\infty$. Hledanou posloupnost zkonstruujeme následovně. Množina $\mathbb{R}$ je hustá v prostoru $(\mathbb{R}^*, \tau)$. Díky tomu pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme reálné číslo a_n splňující $\tau(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$. Nyní stačí ukázat, že $H(\{a_n\}) = H(\{b_n\})$.

Předpokládejme, že $z \in H(\{a_n\})$. Pak existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že $a_{n_k} \xrightarrow{\tau} z$. Potom

$$\tau(z, b_{n_k}) = \tau(z, a_{n_k}) + \tau(a_{n_k}, b_{n_k}) < \tau(z, a_{n_k}) + \frac{1}{n_k}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $b_{n_k} \xrightarrow{\tau} z$, takže $b_{n_k} \rightarrow z$, a proto $z \in H(\{b_n\})$. Opačnou inkluzi lze dokázat obdobně. ♣

8.10.12. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{F_n\}$ je posloupnost uzavřených množin v P splňující $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Necht pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in F_n$, přičemž posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nějakému bodu $x \in P$. Dokažte, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Řešení. Necht $k \in \mathbb{N}$ je dáno. Pak $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost bodů v F_k konvergující k x . Protože množina F_k je uzavřená, platí $x \in F_k$. Tedy $x \in F_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a proto $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. ♣

8.10.13. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a E, F jsou jeho podmnožiny. Potom nezáporný prvek $\text{dist}(E, F)$ množiny $\mathbb{R}^*$ definovaný předpisem

$$\text{dist}_{\varrho}(E, F) = \inf\{\varrho(x, y); x \in E, y \in F\}$$

nazýváme **vzdáleností množin E a F** . Zde $\inf$ uvažujeme na množině $[0, \infty) \cup \{\infty\}$, a proto $\inf \emptyset = 0$. Místo symbolu $\text{dist}_{\varrho}(E, F)$ píšeme někdy $\rho(E, F)$, případně také jen $\text{dist}(E, F)$.

8.10.14. Příklad. Nalezněte uzavřené disjunktní množiny $E, F \subset \mathbb{R}$ takové, že $\text{dist}(E, F) = 0$.

Řešení. Položme $E = \mathbb{N}$ a $F = \{n + \frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$. Potom E a F jsou disjunktní množiny v $\mathbb{R}$ a zřejmě platí $\text{dist}(E, F) = 0$. Dále platí

$$\mathbb{R} \setminus E = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$$

a navíc podle Příkladu 8.3.8 je každý z intervalů $(-\infty, 1)$ a $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, otevřenou množinou v $\mathbb{R}$. Podle Věty 8.3.11(b) je tedy také $\mathbb{R} \setminus E$ otevřená množina v $\mathbb{R}$, takže podle Věty 8.3.13 je množina E uzavřená v $\mathbb{R}$. Obdobně lze dokázat, že také F je uzavřená množina v $\mathbb{R}$. ♣

Příklad 8.10.14 ukazuje, že dvě disjunktní uzavřené množiny mohou mít nulovou vzdálenost. Tato situace nemůže nastat, jestliže je alespoň jedna z množin kompaktní. Tento fakt bude podrobně dokázán v Příkladu 8.10.16.

8.10.15. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $K, L \subset P$ jsou kompaktní neprázdné podmnožiny P . Dokažte, že existují $x \in K$ a $y \in L$ splňující $\text{dist}(K, L) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Necht $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti v K , respektive v L , takové, že

$$\lim \varrho(x_n, y_n) = \text{dist}(K, L).$$

Díky kompaktnosti K vybereme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in K$. Dále využijeme kompaktnost L k nalezení podposloupnosti $\{y_{n_{k_j}}\}$ konvergující k nějakému $y \in L$. Pak ale $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} \rightarrow x$, a tedy díky Příkladu 8.10.2 máme

$$\text{dist}(K, L) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

8.10.16. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $K \subset P$ je kompaktní, $F \subset P$ je uzavřená a $\text{dist}(K, F) = 0$. Dokažte, že potom $K \cap F \neq \emptyset$.

Řešení. Nalezneme posloupnost $\{x_n\}$ prvků F a posloupnost $\{y_n\}$ prvků K takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, y_n) = \text{dist}(K, F) = 0.$$

Protože K je kompaktní, lze z $\{y_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ s limitou $y \in K$. Potom

$$0 \leq \varrho(x_{n_k}, y) \leq \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(y_{n_k}, y)$$

a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(y_{n_k}, y)) = 0.$$

Pak platí $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Protože F je uzavřená, platí $y \in F$. Tedy $y \in K \cap F$. ♣

8.10.17. Příklad. Nalezněte metrický prostor (P, ϱ) , kompaktní množinu $K \subset P$ a uzavřenou podmnožinu $F \subset P$, jejichž vzdálenost není realizována, tedy neexistují $x \in K$ a $y \in F$ taková, že $\text{dist}(K, F) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Uvažujme Banachův prostor $P = c_0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme e^n n -tý kanonický vektor v c_0 , tj. $e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, kde 1 je na n -tém místě. Položme $F = \{(1 + \frac{1}{n})e^n; n \in \mathbb{N}\}$ a $K = \{0\}$. Pak pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, platí

$$\|(1 + \frac{1}{n})e^n - (1 + \frac{1}{m})e^m\| = \max\{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{m}\} > 1.$$

Odtud plyne, že každá posloupnost prvků množiny F je od nějakého indexu konstantní, a má tedy limitu v F . Množina F je tedy uzavřená v c_0 . Dále platí

$$\begin{aligned} \text{dist}(K, F) &= \text{dist}(0, F) = \inf\{\|(1 + \frac{1}{n})e^n\|; n \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf\{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} = 1, \end{aligned}$$

ale $\|0 - (1 + \frac{1}{n})e^n\| = 1 + \frac{1}{n} > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Neexistuje tedy $x \in F$ splňující $\|0 - x\| = \text{dist}(0, F) = 1$. ♣

8.10.18. Příklad. Necht $K \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená množina. Dokažte, že existují body $x \in K$ a $y \in F$ splňující $\text{dist}(K, F) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z K a $\{y_n\}$ je posloupnost z F , které splňují $\lim \varrho(x_n, y_n) = \text{dist}(K, F)$. Díky kompaktnosti K existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k nějakému $x \in K$.

Dále platí, že $\{y_{n_k}\}$ je omezená. To plyne z následující úvahy. Necht $k_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \text{dist}(K, F) + 1$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < 1$. Pak pro každé $k \geq k_0$ platí

$$\varrho(y_{n_k}, x) \leq \varrho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \text{dist}(K, F) + 1 + 1.$$

Z tohoto odhadu již plyne omezenost $\{y_{n_k}\}$.

Díky Větě 8.6.9 lze z posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ vybrat podposloupnost $\{y_{n_{k_j}}\}$ konvergující k nějakému $y \in \mathbb{R}^n$. Z uzavřenosti F dostáváme $y \in F$. Proto díky Příkladu 8.10.2 máme

$$\text{dist}(K, F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

8.10.19. Příklad. Necht (P, ϱ) je kompaktní neprázdný metrický prostor. Dokažte, že existují $x, y \in P$ splňující $\text{diam } P = \varrho(x, y)$.

Řešení. Prostor P je omezený (Věta 8.6.8), a tedy $\text{diam } P < \infty$. Nalezneme posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ v P splňující $\lim \varrho(x_n, y_n) = \text{diam } P$. Díky kompaktnosti P lze z $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in P$. Podobně vybereme podposloupnost $\{y_{n_{k_j}}\}$ posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ konvergující k bodu $y \in P$. Pak máme díky Příkladu 8.10.2

$$\text{diam } P = \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

8.10.20. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Dokažte, že potom platí $\text{Int } A = P \setminus \overline{P \setminus A}$.

Řešení. Protože $A = P \setminus (P \setminus A) \supset P \setminus \overline{P \setminus A}$ a poslední množina je otevřená, dostáváme podle Věty 8.3.15 inkluzi $\text{Int } A \supset P \setminus \overline{P \setminus A}$. Dále platí $P \setminus A \subset P \setminus \text{Int } A$ a množina $P \setminus \text{Int } A$ je uzavřená. Platí tedy $\overline{P \setminus A} \subset P \setminus \text{Int } A$. Odtud plyne inkluze $\text{Int } A \subset P \setminus \overline{P \setminus A}$, čímž je rovnost dokázána.

♣

8.10.21. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Dokažte, že uzávěr množiny (a, b) v prostoru $\mathbb{R}$ má tvar

$$\overline{(a, b)} = \begin{cases} [a, b], & \text{pokud } a, b \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, b], & \text{pokud } a = -\infty, b \in \mathbb{R}, \\ [a, \infty), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, b = \infty, \\ \mathbb{R}, & \text{pokud } a = -\infty, b = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, pak obdobným postupem jako v řešení Příkladu 8.3.21 lze dokázat, že $\partial(a, b) = \{a, b\}$. Odtud plyne $\overline{(a, b)} = [a, b]$.

Předpokládejme, že $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$. Množiny $(-\infty, b)$ a (b, ∞) jsou otevřené, a proto pouze bod b může být hraničním bodem množiny $(-\infty, b)$. Pro každé $r > 0$ zřejmě platí $(b-r, b+r) \cap (-\infty, b) \neq \emptyset$ a $(b-r, b+r) \cap (b, \infty) \neq \emptyset$. Tak dostáváme $\partial(-\infty, b) = \{b\}$. Jestliže $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, pak obdobně dostaneme $\partial(a, \infty) = \{a\}$. Tak obdržíme druhou a třetí rovnost úlohy.

Jestliže $a = -\infty$ a $b = \infty$ je tvrzení zřejmé. ♣

8.10.22. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$. Dokažte, že potom platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, přičemž tato inkluze může být vlastní.

Řešení. Podle Věty 8.3.28(b) platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ a $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, takže $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dokážeme, že inkluze může být vlastní pomocí následujícího příkladu. Necht $P = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ a $B = (1, 2)$. Potom $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} = [0, 1]$ a $\overline{B} = [1, 2]$, takže $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \neq \emptyset$. ♣

8.10.23. Příklad (Cantor–Bendixson⁵). Necht (P, ϱ) je separabilní metrický prostor. Dokažte, že potom existuje spočetná otevřená množina $U \subset P$ a uzavřená množina $F \subset P$ bez izolovaných bodů takové, že $P = F \cup U$.

Řešení. Prostor P je separabilní, takže podle Věty 8.8.12 existuje spočetná báze otevřených množin $\mathcal{B}$. Položme $U = \bigcup \{B \in \mathcal{B}; B \text{ je spočetná}\}$ a $F = P \setminus U$. Množina U je otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin. Je také spočetná, neboť je spočetným sjednocením spočetných množin. Množina F je uzavřená, neboť je doplňkem otevřené množiny. Zbývá dokázat, že F nemá izolovaný bod. Pro spor předpokládejme, že $x \in F$ je izolovaným bodem množiny F . Existuje tedy $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap (F \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pak existuje $B \in \mathcal{B}$ taková, že $x \in B \subset B(x, r)$. Pro množinu B platí $B = (B \cap U) \cup (B \setminus U)$. Množina $B \cap U$ je spočetná, neboť je podmnožinou spočetné množiny U . Dále platí $B \setminus U = B \cap F = \{x\}$, a tedy je množina $B \setminus U$ také spočetná. Dostáváme tedy, že množina B je spočetná, a proto $x \in B \subset U$, což je spor. ♣

Spojitost.

8.10.24. Příklad. Dokažte, že spojitý obraz uzavřené množiny nemusí být uzavřená množina a spojitý obraz otevřené množiny nemusí být otevřená množina.

Řešení. Funkce $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce zobrazující uzavřenou množinu $\mathbb{R}$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, což není uzavřená množina v $\mathbb{R}$. Funkce $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce zobrazující otevřenou množinu $\mathbb{R}$ na $[-1, 1]$, což není otevřená množina v $\mathbb{R}$. ♣

8.10.25. Příklad. Necht (P, ϱ) , (Q, σ) jsou metrické prostory, $D \subset P$ je hustá a $f, g: P \rightarrow Q$ jsou spojitá zobrazení splňující $f(x) = g(x)$ pro $x \in D$. Dokažte, že $f = g$ na P .

⁵Ivar Otto Bendixson (1861–1935)

Řešení. Definujme funkci $h: P \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $h(x) = \sigma(f(x), g(x))$, $x \in P$. Díky Příkladu 8.10.1 platí pro každé $x, y \in P$

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |\sigma(f(x), g(x)) - \sigma(f(y), g(y))| \\ &\leq \sigma(f(x), f(y)) + \sigma(g(x), g(y)). \end{aligned}$$

Odtud díky spojitosti zobrazení f a g dostáváme spojitost funkce h . Označme $X = \{x \in P; f(x) = g(x)\}$. Platí $X = h^{-1}(\{0\})$. Podle Věty 8.4.6 je množina X uzavřená. Poněvadž platí $D \subset X$ a D je hustá v P , obdržíme $X = P$. Máme tedy $f = g$. ♣

8.10.26. Příklad. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f: M \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitě zobrazení. Pak existuje spojitě rozšíření f na celé P . Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojitě na P .

Řešení. Zobrazení f zřejmě splňuje v každém bodě $a \in P \setminus M$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku z Věty 8.7.22. Můžeme tedy položit

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in M, \\ \lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) & \text{pro } a \in P \setminus M. \end{cases}$$

Ukážeme, že takto definované zobrazení $g: P \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitě na P . Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u, v \in M$ a $\varrho(u, v) < \delta$. Necht nyní $x, y \in P$, $\varrho(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Pro x nalezneme bod $x_1 \in M$ takový, že $\varrho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\varrho(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Je-li totiž $x \in M$, položíme $x_1 = x$. Pokud $x \in P \setminus M$, pak existuje $0 < \delta_1 \leq \frac{\delta}{3}$ takové, že $\sigma(g(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u \in B(x, \delta_1) \cap M$. Z hustoty M tedy plyne existence $x_1 \in M$ splňujícího $\varrho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Obdobně obdržíme $y_1 \in M$ splňující $\varrho(y, y_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(y), f(y_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\varrho(x_1, y_1) \leq \varrho(x_1, x) + \varrho(x, y) + \varrho(y, y_1) < \delta.$$

Dohromady tedy máme

$$\sigma(g(x), g(y)) \leq \sigma(g(x), f(x_1)) + \sigma(f(x_1), f(y_1)) + \sigma(f(y_1), g(y)) < \varepsilon.$$

Jednoznačnost rozšíření plyne z Příkladu 8.10.25. ♣

8.10.27. Příklad. Nalezněte metrické prostory (P, ϱ) , (Q, σ) a zobrazení $f: P \rightarrow Q$, které je stejnoměrně spojitě, ale nikoliv lipschitzovské.

Řešení. Položme $P = Q = \mathbb{R}$ a $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Funkce f je zřejmě spojitá, a tedy podle Věty ?? také stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$. Předpokládejme, že f je lipschitzovská na $[0, 1]$, tedy že existuje K takové, že

$$\forall x, y \in [0, 1]: |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|.$$

Tento vztah platí speciálně pro $x = 0$, $y \in (0, 1]$, takže máme

$$\forall y \in (0, 1]: \sqrt{y} \leq Ky,$$

to jest

$$\forall y \in (0, 1]: \frac{1}{\sqrt{y}} \leq K.$$

Tento odhad ale zřejmě neplatí, takže dostáváme spor. Odtud plyne, že funkce f není lipschitzovská na $[0, 1]$. ♣

8.10.28. Příklad. Necht $A \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ . Dokažte, že existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že A je množinou bodů nespojitosti f .

Řešení. Pišme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou uzavřené množiny v $\mathbb{R}$. Podle Příkladu 8.8.3 je $\mathbb{R}$ separabilní, a proto je podle Věty 8.8.13 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n separabilní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme spočetnou množinu $D_n \subset F_n$, která je hustá v F_n . Definujme $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{D_n}$. Pak f je dobře definovaná funkce na $\mathbb{R}$. Označme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Množina D je spočetná. Odtud plyne, že množina $\mathbb{R} \setminus D$ je hustá. Pro každé $x \in D$ platí $f(x) > 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus D$ platí $f(x) = 0$.

Spojitosť v bodech $\mathbb{R} \setminus A$. Necht $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Potom platí $f(x) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Protože $x \notin \bigcup_{j=1}^{n_0} F_{n_0}$ a uvedená množina je uzavřená, existuje $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \cap \bigcup_{j=1}^{n_0} F_{n_0} = \emptyset$. Potom pro každé $y \in B(x, \delta)$ platí

$$0 \leq f(y) - f(x) = f(y) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{D_n}(y) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Tedy f je spojitá v x .

Nespojitost v bodech A . Necht $x \in A$. Předpokládejme nejprve, že $x \notin D$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in F_{n_0}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2^{n_0}}$. Pro každé $\delta > 0$ existuje díky hustotě D_{n_0} v F_{n_0} bod $y \in D_{n_0} \cap B(x, \delta)$. Potom platí

$$f(y) - f(x) = f(y) \geq \frac{1}{2^{n_0}} = \varepsilon.$$

Odtud plyne, že f není spojitá v x .

Nyní předpokládejme, že $x \in D$. Potom $f(x) > 0$. Položme $\varepsilon = f(x)$. Potom pro každé $\delta > 0$ existuje $y \in B(x, \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus D)$ a platí

$$f(x) - f(y) = f(x) = \varepsilon.$$

Odtud plyne, že f není spojitá v x . ♣

8.10.29. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: (P, \varrho) \rightarrow (Q, \sigma)$ je zobrazení a $x \in P$. Potom **oscilací** funkce f v bodě x nazýváme nezáporný prvek $\text{osc}_f(x)$ množiny $\mathbb{R}^*$ definovaný předpisem

$$\text{osc}_f(x) = \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \text{diam}_\sigma f(B_\varrho(x, \delta)), & \text{pokud existuje } \delta_0 > 0 \\ & \text{takové, že } \text{diam}_\sigma f(B_\varrho(x, \delta_0)) < \infty, \\ \infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznamenejme, že právě uvedená limita vždy existuje, neboť funkce $\delta \mapsto \text{diam}_\sigma f(B_\varrho(x, \delta))$ je dobře definovaná neklesající reálná funkce na intervalu $(0, \delta_0)$.

8.10.30. Příklad. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Označme symbolem C_f množinu těch bodů $x \in P$, v nichž je funkce f spojitá. Dokažte, že potom platí $C_f = \{x \in P; \text{osc}_f(x) = 0\}$.

Řešení. Označme $A = \{x \in P; \text{osc}_f(x) = 0\}$.

Inkluze $C_f \subset A$. Necht $x \in C_f$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in B(x, \delta)$ platí $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$. Necht $y_1, y_2 \in B(x, \delta)$. Potom

$$\sigma(f(y_1), f(y_2)) \leq \sigma(f(y_1), f(x)) + \sigma(f(x), f(y_2)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že platí $\text{diam}_\sigma f(B(x, \delta)) \leq 2\varepsilon$. To znamená, že $\text{osc}_f(x) = 0$, a tedy $x \in A$.

Inkluze $A \subset C_f$. Necht $x \in A$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\text{diam}_\sigma f(B(x, \delta)) < \varepsilon$. Tedy pro každé $y \in B(x, \delta)$ platí

$$\sigma(f(y), f(x)) \leq \text{diam}_\sigma f(B(x, \delta)) < \varepsilon.$$

To znamená, že funkce f je v bodě x spojitá, takže $x \in C_f$. ♣

8.10.31. Příklad. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: (P, \varrho) \rightarrow (Q, \sigma)$ je funkce. Necht C_f je množina bodů spojitosti funkce f . Dokažte, že C_f je typu G_δ .

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$B_n = \{x \in P; \text{osc}_f(x) < \frac{1}{n}\}.$$

Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina B_n otevřená. Zvolme tedy $n \in \mathbb{N}$ a $x \in B_n$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že $\text{diam}_\sigma f(B(x, \delta)) < \frac{1}{n}$. Pokud $y \in B(x, \delta)$, pak pro $r \in (0, \delta - \varrho(x, y))$ platí $B(y, r) \subset B(x, \delta)$, a tedy

$$\text{osc}_f(y) \leq \text{diam}_\sigma f(B(y, \delta)) \leq \text{diam}_\sigma f(B(x, \delta)) < \frac{1}{n}.$$

Odtud plyne $B(x, \delta) \subset B_n$. Množina B_n je tedy otevřená.

Množina C_f podle Příkladu 8.10.30 splňuje

$$C_f = \{x \in P; \text{osc}_f(x) = 0\}$$

a navíc zřejmě platí

$$\{x \in P; \text{osc}_f(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Odtud vyplývá, že množina C_f je průnikem spočetně mnoha otevřených množin, tedy je typu G_δ . ♣

8.10.32. Příklad. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ není typu G_δ .

Řešení. Tvrzení dokážeme sporem. Díky Příkladu 8.3.36 víme, že množina $\mathbb{Q}$ je hustá v metrickém prostoru $\mathbb{R}$. Kdyby byla navíc ještě typu G_δ , musela by být podle Věty 8.7.42 residuální v $\mathbb{R}$. Podle Příkladu 8.7.32(b) je také množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ residuální v $\mathbb{R}$. Metrický prostor $\mathbb{R}$ je podle Příkladu 8.7.7 a Věty 8.7.34 druhé kategorie. Podle Věty 8.7.38 tedy platí $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, což je ale spor. ♣

Riemannova funkce je spojitá právě ve všech iracionálních bodech množiny $\mathbb{R}$ (Příklad 4.4.11). Na otázku, zda existuje reálná funkce, která by byla spojitá naopak právě ve všech racionálních bodech, dostáváme z dokázaných tvrzení možná trochu překvapivě zápornou odpověď.

8.10.33. Příklad. Dokažte, že neexistuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou by platilo $C_f = \mathbb{Q}$.

Řešení. Podle Příkladu 8.10.31 musí být C_f typu G_δ , avšak podle Příkladu 8.10.32 množina $\mathbb{Q}$ není typu G_δ . Odtud plyne tvrzení. ♣

Úplné prostory.

8.10.34. Příklad. Dokažte, že prostor c_0 je Banachův.

Řešení. Prostor c_0 je lineárním podprostorem prostoru ℓ_∞ a navíc je také jeho metrickým podprostorem. Prostor ℓ_∞ je podle Příkladu 8.7.17 úplný. Díky Větě 8.7.18 stačí ukázat, že c_0 je uzavřená množina v ℓ_∞ . Vezměme posloupnost $\{x^n\}$ prvků c_0 , která konverguje k prvku $x \in \ell_\infty$. Naším cílem je ukázat, že $x \in c_0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x^{m_0} - x\|_\infty < \varepsilon$. Poněvadž $x^{m_0} \in c_0$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{m_0} = 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|x_n^{m_0}| < \varepsilon$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_n| \leq |x_n - x_n^{m_0}| + |x_n^{m_0}| \leq \|x - x^{m_0}\|_\infty + |x_n^{m_0}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim x_n = 0$, a tedy $x \in c_0$. ♣

8.10.35. Příklad (prostor ℓ_p). Necht' $p \in [1, \infty)$. Definujme ℓ_p jako množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňujících $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$. Sčítání prvků z ℓ_p je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ_p reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in \ell_p$, $y = \{y_n\} \in \ell_p$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_p$ položme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokažte, že prostor ℓ_p je Banachův.

Řešení. Postupně ověříme, že ℓ_p je vektorový prostor, který je normovaný a který je úplný.

Vektorový prostor. Necht $x, y \in \ell_p$. Ověříme, že $x + y \in \ell_p$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Podle Minkovského nerovnosti (Příklad 5.8.12) platí

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p < \infty.$$

Odtud pak dostáváme, že

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Platí tedy $x + y \in \ell_p$ a navíc jsme odvodili nerovnost $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Pokud $x \in \ell_p$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \|x\|_p < \infty.$$

Platí tedy $\alpha x \in \ell_p$ a navíc jsme ověřili $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \cdot \|x\|_p$.

Normovaný prostor. Z vlastností normy, které jsou uvedené v Definici 8.1.18, jsme již ověřili všechny vyjma vlastnosti (a). Ta ovšem pro zobrazení $x \mapsto \|x\|_p$ na ℓ_p zřejmě platí.

Úplnost. Necht $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost prvků ℓ_p . Existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \geq k_0: \|x^k - x^{k_0}\|_p < 1.$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\forall k \geq k_0: \|x^k\|_p < \|x^{k_0}\|_p + 1.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\|x^k\|_p \leq \max\{\|x^1\|_p, \dots, \|x^{k_0-1}\|_p, \|x^{k_0}\|_p + 1\}. \quad (8.28)$$

Odtud plyne, že množina $\{x^k; k \in \mathbb{N}\}$ je omezená v ℓ_p . Konstantu na pravé straně předchozí nerovnosti označme K .

Zvolme nyní $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $k, l \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k - x_n^l| \leq \|x^k - x^l\|_p$. Odtud plyne, že posloupnost reálných čísel $\{x_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní. Limitu této posloupnosti označíme x_n . O posloupnosti $x = \{x_n\}$ nejprve ukážeme, že patří do ℓ_p a pak že je hledanou limitou naší cauchyovské posloupnosti.

Pro každé $m, k \in \mathbb{N}$ díky (8.28) platí

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k\|_p \leq K.$$

Spočteme limitu levé strany pro $k \rightarrow \infty$ a obdržíme pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K.$$

Odtud již plyne

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K.$$

Dokázali jsme tedy $x \in \ell_p$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Znovu použijeme cauchyovskost naší posloupnosti a nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k, l \geq k_0$ platí $\|x^k - x^l\|_p < \varepsilon$. Pro $m \in \mathbb{N}$ a $k, l \geq k_0$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i^k - x_i^l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k - x^l\|_p < \varepsilon.$$

Pro pevné k a m vypočteme limitu levé strany pro $l \rightarrow \infty$. Obdržíme

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i^k - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že uvedená nerovnost platí pro každé $m \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$\|x^k - x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Odtud již plyne, že posloupnost $\{x^k\}$ konverguje k x . ♣

8.10.36. Příklad. Nalezněte příklad metrického prostoru a posloupnosti jeho prvků $\{x_n\}$ splňující

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \varrho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon,$$

která ale není cauchyovská.

Řešení. Položme například $x_n = \log n, n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\lim |x_{n+1} - x_n| = \lim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

ale posloupnost $\{x_n\}$ zřejmě není cauchyovská v $\mathbb{R}$. ♣

8.10.37. Příklad. Definujme na $\mathbb{R}$ metriku $\sigma(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$. Nalezněte posloupnost, která je cauchyovská vzhledem k σ , ale nikoliv vzhledem k obvyklé metrice. Dokažte, že prostor $(\mathbb{R}, \sigma)$ není úplný.

Řešení. Uvažujme posloupnost $\{n\}$. Tato posloupnost zřejmě není cauchyovská vzhledem k obvyklé metrice na $\mathbb{R}$. Ukážeme, že je cauchyovská vzhledem k metrice σ . Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|\frac{\pi}{2} - \arctg n| < \varepsilon$. Pro každé $n \geq m \geq n_0$, potom platí

$$\sigma(n, m) = |\arctg n - \arctg m| = \left| \arctg n - \frac{\pi}{2} \right| + \left| \frac{\pi}{2} - \arctg m \right| < 2\varepsilon.$$

Uvedená posloupnost není v prostoru $(\mathbb{R}, \sigma)$ konvergentní. Kdyby totiž existovala její limita $x \in \mathbb{R}$, pak by platilo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x, n) = 0$. Což znamená

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\arctg n - \arctg x| = \frac{\pi}{2} - \arctg x \neq 0,$$

což je spor. ♣

8.10.38. Příklad. Necht (P, ϱ) je neprázdný úplný metrický prostor a $T: P \rightarrow P$ je zobrazení. Necht existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že T^n je kontrakce na (P, ϱ) , kde $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$ je n -krát složené zobrazení T . Dokažte, že potom má T na P právě jeden pevný bod.

Řešení. Existence pevného bodu. Podle Banachovy věty o kontrakci (Věta 8.7.28) má T^n v P právě jeden pevný bod, označme jej x_0 . Potom

$$T^n(T(x_0)) = T(T^n(x_0)) = T(x_0),$$

takže $T(x_0)$ je také pevným bodem zobrazení T^n . Takový bod však existuje právě jeden, a tedy musí nutně platit $T(x_0) = x_0$. Bod x_0 je tedy pevným bodem zobrazení T .

Jednoznačnost. Necht y je pevný bod zobrazení T . Dokážeme matematickou indukcí, že potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ je y pevným bodem zobrazení T^k . Pro $k = 1$ tvrzení platí. Necht pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ je y pevným bodem zobrazení T^k . Potom

$$T^{k+1}(y) = T(T^k(y)) = T(y) = y.$$

Tím je naše tvrzení dokázáno. Speciálně je tedy y pevným bodem zobrazení T^n . Zobrazení T^n má však právě jeden pevný bod, a to x_0 , tedy platí $y = x_0$. Odtud vyplývá, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ♣

8.10.39. Příklad. Necht X je Banachův prostor, který je nekonečně dimenzionální. Dokažte, že potom každá báze vektorového prostoru X je nespočetná.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že vektorový prostor X má spočetnou bázi B tvořenou vektory x_n , $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme symbolem E_n lineární obal množiny $\{x_i; i \leq n\}$. Dokážeme následující dvě pozorování.

Množina E_n je uzavřená. Množina E_n tvoří konečně dimenzionální podprostor prostoru X , a proto jde podle Příkladu 8.7.15 o Banachův prostor. Podle Věty 8.7.18 je pak E_n uzavřená v X .

Množina E_n je řídká. Díky předchozímu pozorování stačí ukázat, že vnitřek E_n je prázdný. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není a existují $x \in X$ a $r > 0$ taková, že $B(x, r) \subset E_n$. Potom platí také $B(0, r) \subset E_n$, neboť E_n je lineární podprostor. Pak platí

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB(0, r) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} kE_n = E_n,$$

což je spor, neboť nekonečně dimenzionální prostor X nemůže být obsažen v konečně dimenzionálním prostoru E_n .

Díky tomu, že B je báze dostáváme $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Prostor X je tedy podle předchozího první kategorie v sobě, což je ale podle Věty 8.7.34 spor s úplností prostoru X . ♣

Kompaktní prostory.

8.10.40. Příklad. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru P splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Dokažte, že množina $K = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní.

Řešení. Necht $\mathcal{G}$ je nějaký systém otevřených podmnožin pokrývajících K . Potom existuje $G \in \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože $x_n \rightarrow x$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \in G$. Pro každé $k \in \{1, \dots, n_0\}$ existuje $G_k \in \mathcal{G}$ splňující $x_k \in G_k$. Potom soubor množin $\mathcal{G}^* = \{G, G_1, \dots, G_{n_0}\}$ tvoří konečný podsystem systému $\mathcal{G}$, který zřejmě pokrývá K . Podle Věty 8.6.28 je tedy množina K kompaktní. ♣

8.10.41. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $A \subset P$ je nekonečná množina taková, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \varepsilon$. Dokažte, že pak prostor P není kompaktní.

Řešení. Ukážeme, že v prostoru P neexistuje konečná $\varepsilon/2$ -sít. Pro spor předpokládejme, že $D \subset P$ je konečná $\varepsilon/2$ -sít. Potom $A \subset \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon/2)$. Množina A je nekonečná, množina D je konečná, a proto existuje $x \in D$ takové, že koule $B(x, \varepsilon)$ obsahuje alespoň dva různé body z množiny A . Tyto body však mají vzdálenost menší než ε , což je spor s předpokládanou vlastností množiny A . Prostor P tedy není totálně omezený, a proto podle Věty 8.7.21 není kompaktní. ♣

Předchozí výsledek porovnejte s Větou 8.8.8.

8.10.42. Příklad. Dokažte, že množina

$$A = \{x_n \in \ell_2; \forall n \in \mathbb{N}: |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$$

je kompaktní v ℓ_2 .

Řešení. Podle Věty 8.7.21 stačí dokázat, že A je úplný a totálně omezený prostor.

Úplnost množiny A . Prostor ℓ_2 je úplný, a proto podle Věty 8.7.18 stačí ukázat, že A je uzavřená v ℓ_2 . Vezměme tedy posloupnost $\{x^k\}$ prvků množiny A , která konverguje k prvku $x \in \ell_2$. Ukážeme, že $x \in A$. Pro každé $n, k \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k - x_n| \leq \|x^k - x\|_2$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n$. Navíc pro každé $n, k \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k| \leq \frac{1}{n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $|x_n| \leq \frac{1}{n}$. Platí tedy $x \in \ell_2$.

Totální omezenost množiny A . Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < (\frac{\varepsilon}{2})^2$. Položme

$$B = \{x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^m; \forall n \in \{1, \dots, m\}: |x_n| \leq \frac{1}{n}\}.$$

Množina B je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}^m$. Podle Věty 8.6.9 je B kompaktní a podle Věty 8.6.26 je totálně omezená. Existuje tedy konečná $\frac{\varepsilon}{2}$ -sít C množiny B . Definujme množinu $D \subset \ell_2$, která obsahuje právě všechny prvky tvaru $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$, kde $(x_1, \dots, x_m) \in C$. Množina D je konečná, neboť C je konečná a zřejmě $D \subset A$. Ukážeme, že D je ε -sít množiny A . Zvolme $y \in A$. Potom $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_m) \in B$

a existuje $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m) \in C$ splňující $\|\tilde{y} - \tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Prvek $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$ patří do množiny D a platí

$$\begin{aligned} \|y - x\|_2^2 &= \sum_{n=1}^m (y_n - x_n)^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} (y_n - x_n)^2 = \|\tilde{y} - \tilde{x}\|_2^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} y_n^2 \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

K prvku $y \in \ell_2$ jsme tedy našli prvek $x \in D$ splňující $\|y - x\|_2 < \varepsilon$. Tím jsme ověřili, že C je ε -sít. Tedy A je totálně omezená. ♣

8.10.43. Příklad. Dokažte, že množina

$$B = \{x \in c_0; \|x_n\|_{\infty} \leq 1\}$$

není kompaktní v c_0 .

Řešení. Uvažujme vektory $e^n \in c_0$, $n \in \mathbb{N}$, kde e^n je n -tý kanonický vektor v c_0 , tj.

$$e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

kde pouze n -tý člen je roven 1. Pak pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, platí $\|e^n - e^m\|_{\infty} = 1$. Množina $A = \{e^n; n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná a díky předchozímu splňuje předpoklady Příkladu 8.10.41 pro $\varepsilon = 1$. Pak podle Příkladu 8.10.41 není B kompaktní. ♣

8.10.44. Příklad. Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $f: P \rightarrow P$ je **izometrie**, tj. zobrazení splňující

$$\forall x, y \in P: \varrho(f(x), f(y)) = \varrho(x, y).$$

Dokažte, že $f(P) = P$.

Řešení. Předpokládejme pro spor $f(P) \subsetneq P$. Vezmeme $x_0 \in P \setminus f(P)$ a označíme $d = \text{dist}(x_0, f(P))$. Protože je f spojitý, je množina $f(P)$ kompaktní, a tedy $d > 0$. Položme $x_n = f^n(x_0)$. Pak jsou členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsaženy v $f(P)$, a tedy $\varrho(x_0, x_n) \geq d$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky kompaktnosti vybereme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in f(P)$. Tedy existují indexy $n < m$ takové, že $\varrho(x_n, x_m) < d$. Protože je f izometrie, platí

$$\begin{aligned} d &> \varrho(f^n(x_0), f^m(x_0)) = \varrho(f^{n-1}(x_0), f^{m-1}(x_0)) = \dots \\ &= \varrho(x_0, f^{m-n}(x_0)) \geq d, \end{aligned}$$

což je spor. ♣

8.10.45. Příklad. Necht (K_1, ϱ_1) a (K_2, ϱ_2) jsou kompaktní metrické prostory. Ukažte, že součin $K_1 \times K_2$ opatřený ℓ_2 -součtem metrik ϱ_1 a ϱ_2 je kompaktní metrický prostor.

Řešení. Uvažujme posloupnost bodů $\{(x_1^n, x_2^n)\}_{n=1}^\infty$ prostoru $K_1 \times K_2$. Metrický prostor (K_1, ϱ_1) je kompaktní, a proto lze z posloupnosti $\{x_1^n\}_{n=1}^\infty$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_1^{n_k}\}_{k=1}^\infty$ s limitou $z_1 \in K_1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $y_1^k = x_1^{n_k}$ a $y_2^k = x_2^{n_k}$. Prostor (K_2, ϱ_2) je kompaktní, a proto lze z posloupnosti $\{y_2^k\}_{k=1}^\infty$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_2^{k_j}\}_{j=1}^\infty$ s limitou $z_2 \in K_2$. Posloupnost $\{y_1^k\}_{k=1}^\infty$ konverguje k z_1 , a tedy i posloupnost $\{y_1^{k_j}\}_{j=1}^\infty$ konverguje k z_1 (Věta 8.2.4). Platí tedy

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_1(y_1^{k_j}, z_1) = 0,$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_2(y_2^{k_j}, z_2) = 0.$$

Pak ale podle věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{\varrho_1(y_1^{k_j}, z_1)^2 + \varrho_2(y_2^{k_j}, z_2)^2} = 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{(y_1^{k_j}, y_2^{k_j})\}_{j=1}^\infty$ konverguje k bodu (z_1, z_2) v metrice, která je ℓ_2 -součtem metrik ϱ_1 a ϱ_2 . posloupnost $\{(y_1^{k_j}, y_2^{k_j})\}_{j=1}^\infty$ je navíc vybraná z posloupnosti $\{(x_1^n, x_2^n)\}_{n=1}^\infty$. Tím je důkaz proveden. ♣

8.10.46. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $T: P \rightarrow P$ je zobrazení splňující

$$\forall x, y \in P, x \neq y: \varrho(T(x), T(y)) < \varrho(x, y).$$

Pak zobrazení T nazýváme **neexpanzivní**.

8.10.47. Příklad. Necht (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $T: P \rightarrow P$ je neexpanzivní. Dokažte, že potom T má na P právě jeden pevný bod.

Řešení. Existence pevného bodu. Definujme funkci $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \varrho(x, T(x))$. Podle Příkladu 8.10.1 pro $x, y \in P$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\varrho(x, T(x)) - \varrho(y, T(y))| \leq \varrho(x, y) + \varrho(T(x), T(y)) \\ &\leq 2\varrho(x, y). \end{aligned}$$

Necht $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každé $y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\varrho(x, y) < 2\delta = \varepsilon,$$

takže f je spojitě v bodě x . Protože bod x byl zvolen libovolně, je f spojitě na P .

Funkce f tedy nabývá na kompaktním metrickém prostoru (P, ϱ) svého minima. Existuje tudíž bod $x_0 \in P$ takový, že pro všechna $y \in P$ platí $f(x_0) \leq f(y)$. Předpokládejme, že $f(x_0) > 0$. Potom z neexpanzivnosti zobrazení f vyplývá, že

$$f(T(x_0)) = \varrho(T(x_0), T^2(x_0)) < \varrho(x_0, T(x_0)),$$

což je spor. Platí tedy $f(x_0) = 0$. To znamená, že $\varrho(x_0, T(x_0)) = 0$, neboli že x_0 je pevným bodem zobrazení T .

Jednoznačnost. Necht $x, y \in P$ jsou dva různé pevné body zobrazení T . Potom

$$\varrho(x, y) = \varrho(T(x), T(y)) < \varrho(x, y),$$

což je spor. Odtud vyplývá, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ♣

Cantorův prostor a Cantorovo diskontinuum.

8.10.48. Označení. (a) Množinu všech konečných posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, budeme značit $\mathcal{S}$. Do množiny $\mathcal{S}$ zahrnujeme i prázdnou posloupnost, kterou ztotožňujeme s prázdnou množinou a značíme ji tedy $\emptyset$. Platí proto

$$\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}^n.$$

(b) Je-li $s \in \mathcal{S}$ a $i \in \{0, 1\}$, značí $s^{\wedge}i$ posloupnost s prodlouženou o prvek i . Délku posloupnosti $s \in \mathcal{S}$ značíme $|s|$, přičemž délka prázdné posloupnosti je 0.

(c) Množinu všech nekonečných posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, budeme značit $\mathcal{C}$. Platí tedy $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pro $x \in \mathcal{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ značíme $x|n = (x_1, \dots, x_n)$. Pro $s \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathcal{C}$ značíme symbolem $s < x$ skutečnost, že x prodlužuje s , neboli nekonečná posloupnost x začíná konečnou posloupností s , ještě jinak řečeno platí $s = x| |s|$.

(d) Indexovanému systému (vizte 1.5.17) množin $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ říkáme **Cantorovo schéma**.

8.10.49. Necht $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin v metrickém prostoru $(\mathcal{C}, \varrho)$, kde ϱ je metrika z Příkladu 8.1.16. Dvojici $(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ nazýváme **Cantorovým prostorem**. Cantorův prostor je prostor topologický (vizte Poznámku 8.4.22), ale v dalším výkladu se na něj budeme dívat jako na metrický prostor s metrikou ϱ .

8.10.50. Příklad. Necht $s \in \mathcal{S}$. Označme

$$N_s = \{x \in \mathcal{C}; s < x\}.$$

Množina N_s tedy obsahuje ty nekonečné posloupnosti, které začínají posloupností s . Ukažte, že systém $\{N_s; s \in \mathcal{S}\}$ tvoří otevřenou bázi prostoru $\mathcal{C}$.

Řešení. Pro $s \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathcal{C}$ splňující $s < x$ dokážeme následující rovnost

$$B(x, \frac{2}{2^{|s|+1}}) = N_s. \quad (8.29)$$

Pokud $y \in B(x, \frac{2}{2^{|s|+1}})$ a $y \neq x$, pak nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq y_k$, splňuje $\frac{1}{k} < \frac{2}{2^{|s|+1}}$. Máme tedy $k > |s|$, a proto $x| |s| = y| |s| = s$. Platí tedy $y \in N_s$. Pokud $y = x$, pak zřejmě $y \in N_s$.

Pokud $y \in N_s$, $y \neq x$, pak nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq y_k$, splňuje $k > |s|$, a tedy $\varrho(x, y) = \frac{1}{k} < \frac{2}{2^{|s|+1}}$. Pokud $y \in N_s$, $y = x$, pak zřejmě $y \in B(x, \frac{2}{2^{|s|+1}})$.

Z (8.29) plyne, že množina N_s je otevřená pro každé $s \in \mathcal{S}$. Necht $G \subset \mathcal{C}$ je neprázdná otevřená množina. Dokážeme rovnost

$$G = \bigcup \{N_t; t \in \mathcal{S}, N_t \subset G\}. \quad (8.30)$$

Inkluze $\supset$ zřejmě platí. Pro důkaz opačné inkluze zvolme libovolně $x \in G$. Pak díky otevřenosti G nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $B(x, \frac{2}{2k+1}) \subset G$. Odtud plyne

$$x \in B(x, \frac{2}{2|s|+1}) = N_s \subset G.$$

Platí tedy rovnost (8.30). Odtud již plyne, že uvažovaný systém množin tvoří bázi prostoru $\mathcal{C}$. ♣

8.10.51. Definujme Cantorovo schéma $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ sestávající z neprázdných uzavřených intervalů v $[0, 1]$ následujícím způsobem. Položme $B_\emptyset = [0, 1]$. Předpokládejme, že již máme zkonstruovány intervaly B_s , kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathcal{S}$ a $|s| \leq n$. Necht $s \in \{0, 1\}^n$ a $B_s = [a, b]$. Pak položíme

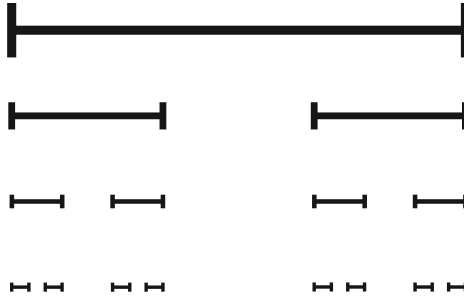
$$B_{s \wedge 0} = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)], \quad B_{s \wedge 1} = [b - \frac{1}{3}(b-a), b].$$

Množinu

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} B_s.$$

nazýváme **Cantorovým diskontinuem**.

Popišme ještě konstrukci Cantorova diskontinua méně formálně, ale možná názorněji. Z intervalu $B_\emptyset = [0, 1]$ vyjmeme interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ a obdržíme intervaly $B_0 = [0, \frac{1}{3}]$ a $B_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Z těchto intervalů opět obdobně vyjmeme prostřední třetiny a dostaneme čtveřici nových intervalů $B_{00}, B_{01}, B_{10}, B_{11}$. Z nich opět vyjmeme prostřední třetiny a tento postup stále opakujeme. Body z intervalu $[0, 1]$, které nebudou nikdy vyjmuty, pak tvoří Cantorovo diskontinuum C . Začátek tohoto procesu je znázorněn na následující sérii obrázků.



OBRÁZEK 1.

Všimněme si, že Cantorovo schéma $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ má následující vlastnosti. Pro každé $s \in \mathcal{S}$ platí

- (a) $B_{s \wedge 0} \cup B_{s \wedge 1} \subset B_s$,
- (b) $B_{s \wedge 0} \cap B_{s \wedge 1} = \emptyset$,

(c) $\text{diam } B_\emptyset = 1$, $\text{diam } B_{s \wedge 0} = \text{diam } B_{s \wedge 1} = \frac{1}{3} B_s$, a tedy $\text{diam } B_s = 3^{-|s|}$.

Všimněme si ještě, že pro Cantorovo diskontinuum platí

$$C = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{C}} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}. \quad (8.31)$$

Ověření inkluze $\supset$ je snadné. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme $x \in C$. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje $s^n \in \{0, 1\}^n$ takové, že $x \in B_{s^n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je systém intervalů $\{B_s; s \in \mathcal{S}, |s| = n\}$ podle vlastností (a) a (b) disjunktní. Odtud plyne, že $s^{n-1} < s^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje $\alpha \in \mathcal{C}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s^n < \alpha$. Potom $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{s^n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$.

8.10.52. Příklad (vlastnosti Cantorova diskontinua). Ukažte, že C má následující vlastnosti.

- (a) Cantorovo diskontinuum C je homeomorfní s Cantorovým prostorem $\mathcal{C}$.
- (b) Množina C je kompaktní a řídká podmnožina $\mathbb{R}$ bez izolovaných bodů.
- (c) Množina C má mohutnost kontinua.

Řešení. (a) Necht $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ je Cantorovo schéma z 8.10.51. Definujme zobrazení $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow C$ následujícím způsobem. Zvolme $\alpha \in \mathcal{C}$ pevné a položme $\varphi(\alpha) = y$, kde $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$. Má-li být $\varphi(\alpha)$ dobře a jednoznačně definováno, je třeba, aby množina $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$ byla jednoprvková. To však plyne z Věty 8.7.19, neboť posloupnost množin $\{B_{\alpha|n}\}_{n=0}^{\infty}$ je tvořena uzavřenými množinami v úplném prostoru $\mathbb{R}$, platí $B_{\alpha|n} \subset B_{\alpha|(n-1)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } B_{\alpha|n} = 0$. Poslední fakt plyne z 8.10.51(c). Přímo z definice φ plyne, že $\varphi(\mathcal{C}) \subset C$.

Spojitosť φ . Necht $\alpha \in \mathcal{C}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $\varphi(\alpha) \in B_s$ a $\text{diam } B_s = 3^{-|s|} < \varepsilon$. Potom $\varphi(N_s) \subset B_s \subset B(\varphi(\alpha), \varepsilon)$. Tím je dokázána spojitost φ .

Prostota φ . Vezměme $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\alpha \neq \beta$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha|n \neq \beta|n$, a tedy $\varphi(\alpha) \in B_{\alpha|n}$, $\varphi(\beta) \in B_{\beta|n}$ a $B_{\alpha|n} \cap B_{\beta|n} = \emptyset$. Odtud plyne $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$.

Surjektivita φ . Pro $x \in C$ existuje podle (8.31) $\alpha \in \mathcal{C}$ takové, že $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$. Máme tedy $\varphi(\alpha) = x$. Tím je surjektivita ověřena. Navíc díky vlastnosti (b) z 8.10.51 a inkluzi $\varphi(N_s) \subset B_s$, $s \in \mathcal{S}$, dostáváme rovnost $\varphi(N_s) = B_s \cap C$ platnou pro každé $s \in \mathcal{S}$.

Spojitosť φ^{-1} . Necht $x \in C$. Označme $\varphi^{-1}(x) = \alpha$. Zvolme $\varepsilon > 0$. S pomocí Příkladu 8.10.50 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $N_{\alpha|n} \subset B(\alpha, \varepsilon)$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \cap C \subset B_{\alpha|n}$. Potom podle předchozího odstavce

$$\varphi^{-1}(B(x, \delta) \cap C) \subset \varphi^{-1}(C \cap B_{\alpha|n}) = N_{\alpha|n} \subset B(\alpha, \varepsilon).$$

Tím je dokázána spojitost φ^{-1} .

(b) Množina C je uzavřená, neboť je definována jako průnik uzavřených množin. Množina C je zřejmě omezená. Podle Věty 8.6.9 je tedy C kompaktní.

Řídkost C ověříme podle Věty 8.3.44. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Pokud $G \cap C = \emptyset$, pak položíme $H = G$ a máme $H \cap C = \emptyset$. Pokud

$H \cap C \neq \emptyset$, pak vezmeme $x \in H \cap C$ a nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $B_s \subset H$. Zde využíváme otevřenost H a vlastnost (c) z 8.10.51. Množina B_s je uzavřený netriviální interval. Označme $B_s = [a, b]$. Potom položíme $H = (a + \frac{1}{3}(b-a), b - \frac{1}{3}(b-a))$ a podle konstrukce Cantorova diskontinua dostáváme $H \cap C = \emptyset$. Tím je řídkost množiny C dokázána.

Zvolme $x \in C$. Ukážeme, že nejde o izolovaný bod C . K tomuto cíli zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $x \in B_s \subset B(x, \varepsilon)$. Pak zvolíme $i \in \{0, 1\}$ takové, že $x \notin B_{s \wedge i}$. Množina $B_{s \wedge i} \cap C$ je neprázdná. Zvolme tedy y z této množiny. Potom máme $y \in C \cap B(x, \varepsilon)$ a $y \neq x$. Bod x tedy není izolovaný.

(c) Výsledek plyne z Příkladu ??.

8.10.53. Příklad. Cantorův prostor $\mathcal{C}$ je kompaktní, nemá izolované body a má mohutnost kontinua.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 8.10.52, neboť Cantorovo diskontinuum je homeomorfní s Cantorovým prostorem.

8.10.54. Příklad. Necht (P, ϱ) je nespočetný separabilní úplný metrický prostor. Pak existuje množina $K \subset P$, která je homeomorfní s Cantorovým prostorem.

Řešení. Podle Příkladu 8.10.23 lze P psát jako $P = F \cup U$, kde U je spočetná otevřená a F je uzavřená množina bez izolovaných bodů. Pak F je též úplný metrický prostor (Věta 8.7.18). Protože je P nespočetný, je F neprázdná množina. Nalezneme zobrazení $\varphi: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow F$, které bude spojitě a prostě. Potom podle Věty 8.6.20 bude φ homeomorfismus mezi $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ a $\varphi(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$. Položíme $K = \varphi(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ a K bude pak hledanou množinou.

Nejprve induktivně zkonstruujeme Cantorovo schéma $(U_s)_{s \in \mathcal{S}}$ sestávající z otevřených množin v F , které pro každé $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ splňují

- $U_{s \wedge 0} \cap U_{s \wedge 1} = \emptyset$,
- $\overline{U_{s \wedge i}} \subset U_s, i \in \{0, 1\}$,
- $\text{diam } U_s \leq 2^{-|s|}$.

Konstrukce schématu. Nejprve položíme $U_\emptyset = B(x, \frac{1}{2}) \cap F$, kde $x \in F$. Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a máme zkonstruovány množiny U_s pro $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, |s| \leq n$. Mějme nyní množinu U_s , kde $s \in \{0, 1\}^n$. Protože je F perfektní, je U_s nekonečná. Lze tedy nalézt dva různé body $x, y \in U_s$. Nyní zvolíme takové $r \in (0, 2^{-|s|-2})$, že

- $\overline{B(x, r)} \cap \overline{B(y, r)} = \emptyset$,
- $\overline{B(x, r)} \cup \overline{B(y, r)} \subset U_s$

a položíme $U_{s \wedge 0} = B(x, r)$, $U_{s \wedge 1} = B(y, r)$. Tím je konstrukce provedena.

Konstrukce homeomorfismu φ . Definujeme $\varphi: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow F$ jako $\varphi(x) = y$, kde

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_{x|n}} \quad x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Díky vlastnostem Cantorova schématu je φ dobře definováno, což v tomto případě znamená, že množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_{x|n}}$ je jednoprvková (vizte Větu 8.7.19).

Spojitosť φ . Necht $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Potom platí $x \in N_{x|n}$, $\varphi(x) \in \overline{U_{x|n}}$ a

$$\varphi(N_{x|n}) \subset \overline{U_{x|n}} \subset B(\varphi(x), \varepsilon).$$

Tedy φ je spojitý v x .

Injektivita φ . Zvolme $x, z \in \mathcal{C}$, $x \neq z$. Nalezneme nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x|n \neq y|n$. Potom $\varphi(x) \in \overline{U_{x|n}}$, $\varphi(y) \in \overline{U_{y|n}}$ a $\overline{U_{x|n}} \cap \overline{U_{y|n}} = \emptyset$. Odtud plyne $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, a φ je tedy prostý. ♣

Souvislé a křivkově souvislé prostory.

8.10.55. Příklad. Necht (P, ϱ) je souvislý metrický prostor obsahující alespoň dva body. Potom je P nespočetný.

Řešení. Necht $x, y \in P$, $x \neq y$. Předpokládejme, že P je spočetný. Pro $r > 0$ označme $A(r) = \{z \in P; \varrho(x, z) = r\}$. Potom existuje $r \in (0, \varrho(x, y))$ takové, že množina $A(r)$ je prázdná, neboť systém množin $\{A(s); s \in (0, \varrho(x, y))\}$ je disjunktní a interval $(0, \varrho(x, y))$ je nespočetný. Položme $H = B(x, r)$. Potom H je zřejmě neprázdná (neboť $x \in H$) a otevřená. Podle Příkladu 8.10.4 je $\overline{B}(x, r)$ uzavřená množina, a tedy podle Věty 8.3.28(g) platí $\overline{H} \subset \overline{B}(x, r)$. Pak máme

$$\overline{H} \subset \overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup A(r) = B(x, r) = H,$$

takže H je uzavřená, a tedy obojetná. Protože $r < \varrho(x, y)$, platí $y \in P \setminus H$, takže $P \setminus H$ je neprázdná. To je podle Věty 8.9.8 spor s tím, že P je souvislý. Odtud plyne tvrzení. ♣

8.10.56. Příklad. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je spojitý zobrazení. Necht $A \subset P$ je křivkově souvislá množina v prostoru P . Pak $f(A)$ je křivkově souvislá množina v prostoru Q .

Řešení. Zvolme body $a, b \in f(A)$. Potom existují body $x, y \in A$ takové, že $f(x) = a$ a $f(y) = b$. Množina A je křivkově souvislá, a proto existuje spojitý zobrazení $h: [0, 1] \rightarrow A$ takové, že $h(0) = x$ a $h(1) = y$. Zobrazení $f \circ h$ je spojitý zobrazení z $[0, 1]$ do Q a platí $f \circ h(0) = a$ a $f \circ h(1) = b$. Tím je nalezena příslušná křivka pro body a a b , a je tak ověřena křivková souvislost množiny $f(A)$. ♣

8.10.57. Příklad. Dokažte, že prostor $[0, 1]^2$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}^2$ není homeomorfní s intervalem $[0, 1]$.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ je homeomorfismus prostoru $[0, 1]$ na prostor $[0, 1]^2$. Zobrazení f je bijekce, a proto musí existovat $a \in (0, 1)$ takové, že $f(a) \in (0, 1)^2$. Potom je zobrazení $f|_{[0, 1] \setminus \{a\}}$ homeomorfismus prostoru $A = [0, 1] \setminus \{a\}$ a prostoru $B = [0, 1]^2 \setminus \{f(a)\}$.

Prostor B je křivkově souvislý. Stačí ukázat, že pro každý bod $[x, y] \in B$ existuje křivka $\gamma: [0, 1] \rightarrow B$ splňující $\gamma(0) = [0, 0]$ a $\gamma(1) = [x, y]$. Předpokládejme tedy, že $[x, y] \in B$. Definujme křivku γ předpisem

$$\gamma(t) = \begin{cases} [t(x+y), 0], & t \in [0, \frac{x}{x+y}], \\ [x, t(x+y) - x], & t \in (\frac{x}{x+y}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné ověřit, že γ je spojitě zobrazení splňující $\gamma(0) = [0, 0]$, $\gamma(1) = [x, y]$ a $\gamma([0, 1]) \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Pokud navíc $f(a) \notin \gamma([0, 1])$, pak jsme hotovi. Pokud ale $f(a) \in \gamma([0, 1])$, použijeme místo γ křivku η definovanou předpisem

$$\eta(t) = \begin{cases} [0, t(x+y)], & t \in [0, \frac{y}{x+y}], \\ [t(x+y) - y, y], & t \in (\frac{y}{x+y}, 1]. \end{cases}$$

Opět je snadné ověřit, že η je spojitě zobrazení splňující $\eta(0) = [0, 0]$, $\eta(1) = [x, y]$ a $\eta([0, 1]) \subset [0, 1]^2$. Vzhledem k tomu, že $f(a) \in (0, 1)^2 \cap \gamma([0, 1])$, musí být $x > 0$ a $y > 0$. Potom $\gamma((0, 1)) \cap \eta((0, 1)) = \emptyset$, a tedy $f(a) \notin \eta([0, 1])$. Máme tak $\eta([0, 1]) \subset B$.

Prostor B je křivkově souvislý, a proto je i prostor A křivkově souvislý podle Příkladu 8.10.56. To znamená, že A je také souvislý podle Věty 8.9.17, což je ovšem spor s Větou 8.9.10. ♣

8.10.58. Příklad. Dokažte, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.

Řešení. Položme $B = \{[x, \sin(\frac{1}{x})]; x \in (0, 1]\}$. Interval $(0, 1]$ je zřejmě křivkově souvislá množina. Množina B je pak křivkově souvislá podle Příkladu 8.10.56, neboť je obrazem intervalu $(0, 1]$ při spojitěm zobrazení $x \mapsto [x, \sin(\frac{1}{x})]$.

Neplatnost křivkové souvislosti $\overline{B}$. Ukážeme, že pro body $[0, 0]$ a $[\frac{1}{\pi}, 0]$ neexistuje spojitě zobrazení $\varphi: [0, 1] \rightarrow \overline{B}$, taková, že $\varphi(0) = [0, 0]$ a $\varphi(1) = [\frac{1}{\pi}, 0]$. Pro spor předpokládejme, že takové φ existuje. Položme $C = \{0\} \times [-1, 1]$. Platí $\overline{B} = B \cup C$. Množina C je zřejmě uzavřená v $\mathbb{R}^2$, a proto je uzavřená i v $\overline{B}$. ♣

8.10.59. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $I \neq \emptyset$ a pro každé $\alpha \in I$ je A_α křivkově souvislá množina v P . Necht platí

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset. \quad (8.32)$$

Dokažte, že $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je křivkově souvislá množina v P .

Řešení. Zvolme body $a, b \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Potom existují $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ taková, že $a \in A_{\alpha_1}$ a $b \in A_{\alpha_2}$. Dále díky (8.32) existuje $c \in A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$. Množina A_{α_1} je křivkově souvislá, a proto existuje křivka $h_1: [0, 1] \rightarrow A_{\alpha_1}$ splňující $h_1(0) = a$, $h_1(1) = c$. Podobně díky křivkové souvislosti množiny A_{α_2} nalezneme křivku $h_2: [0, 1] \rightarrow A_{\alpha_2}$

splňující $h_2(0) = c$ a $h_2(1) = b$. Pomocí křivek h_1, h_2 sestrojíme příslušnou křivku h pro dvojici bodů a, b následujícím způsobem:

$$h(t) = \begin{cases} h_1(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ h_2(2t - 1) & \text{pro } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ověření spojitosti zobrazení h není těžké a snadno vidíme, že $h([0, 1]) \subset A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $h(0) = a$, $h(1) = b$. Tím je křivková souvislost uvažované množiny dokázána. ♣

Funkce více proměnných

V této kapitole zavedeme a prozkoumáme základní pojmy diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Při výkladu budeme potřebovat některé pojmy a výsledky z teorie vektorových prostorů. Podrobný výklad této teorie je obsažen například v [4].

9.1. Parciální derivace a totální diferenciál

9.1.1 ($\mathbb{R}^n$ jako vektorový prostor). Připomeňme, že množina $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, je množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel, neboť jde o kartézský součin o n faktorech:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}.$$

Je-li $x \in \mathbb{R}^n$, potom jeho i -tou souřadnici značíme x_i , a můžeme tedy psát $x = [x_1, \dots, x_n]$. Množina $\mathbb{R}^n$ obsahuje některé významné prvky. Je to především **počátek**, to jest prvek, jehož všechny souřadnice jsou nulové. Značíme jej o . Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a definujme prvek $e^i \in \mathbb{R}^n$ takto:

$$e^i = [0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-tá souřadnice}}, 0, \dots, 0].$$

I tyto prvky budou pro nás později důležité.

Prvky $\mathbb{R}^n$ můžeme mezi sebou sčítat a můžeme je násobit reálným číslem. Je-li $x \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y \in \mathbb{R}^n$, $y = [y_1, \dots, y_n]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n],$$

$$\lambda \cdot x = [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n].$$

Trojice $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kde $+$ a $\cdot$ jsou výše uvedené operace, tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Množina $B = \{e^i; i \in \{1, \dots, n\}\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$, tj. jde o lineárně nezávislou množinu a každý prvek $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ můžeme psát jako lineární kombinaci vektorů z množiny B . Zde konkrétně máme $x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$.

O množině $\mathbb{R}^n$ s operacemi sčítání a násobení reálným číslem budeme mluvit jako o prostoru $\mathbb{R}^n$ a o prvcích z $\mathbb{R}^n$ jako o bodech tohoto prostoru. Někdy je ovšem užitečné pohlížet na daný prvek x z $\mathbb{R}^n$ jako na *vektor*, tj. orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku a koncovým v bodě x .

Použijeme-li v dalším textu symbol $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m$ a podobně, budou n, m, k vždy přirozená čísla.

9.1.2. V průběhu celé kapitoly budeme na $\mathbb{R}^n$ uvažovat eukleidovskou normu

$$\|x\| = \|[x_1, \dots, x_n]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

a eukleidovskou metrikou $\varrho_2(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Vizte Příklad 8.1.21.

9.1.3. Podrobné pojednání o skalárních součinech naleznete v [4, kapitola 26]. Zde pouze připomeneme několik základních faktů. **Skalární součin** prvků $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme předpisem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Skalární součin má následující vlastnosti

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}^n: \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$,
- (b) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n: \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x, y \in \mathbb{R}^n: \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
- (d) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ jsou **navzájem ortogonální (kolmé)**, jestliže platí $\langle x, y \rangle = 0$. Necht $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je **ortogonální (kolmý)** na množinu M , jestliže je ortogonální na každý vektor množiny M . Symbol $M^\perp$ značí množinu těch vektorů, které jsou ortogonální na množinu M .

9.1.4 (lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$). Řekneme, že zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže splňuje

- (a) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n: L(u + v) = L(u) + L(v)$,
- (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall u \in \mathbb{R}^n: L(\alpha u) = \alpha L(u)$.

Množinu všech lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ budeme značit symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je reprezentováno maticí $A = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ o m řádcích a n sloupcích ve smyslu, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vizte [4, kapitola 11].

9.1.5. Úmluva. V souladu s definicí $\mathbb{R}^n$ budeme prvky $x \in \mathbb{R}^n$ chápat jako řádkové vektory. Pokud budeme ale pracovat s maticovou reprezentací lineárních zobrazení, tak budeme x uvažovat jako sloupcový vektor neboli matici typu $n \times 1$. Potom bude součin Ax z předchozího paragrafu dobře definován.

9.1.6. Termínem **reálná funkce n proměnných** budeme rozumět funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Nechť f je reálná funkce n proměnných a $a = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Chování f v blízkosti bodu a můžeme zkoumat následujícím způsobem. Zvolíme jednu souřadnici, například první, a budeme se dívat, jak se mění hodnoty funkce f , měníme-li pouze tuto souřadnici nezávisle proměnné funkce f a ostatní souřadnice zůstávají rovny příslušným souřadnicím bodu a . Velikost změny funkční hodnoty pak porovnáme se změnou velikosti první souřadnice, tj. zkoumáme výraz

$$\frac{f(x_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_1 - a_1},$$

který lze pomocí vektorového zápisu zapsat jako

$$\frac{f(a + (x_1 - a_1)e^1) - f(a)}{x_1 - a_1},$$

Při tomto přístupu je ale uvedený výraz funkcí jedné proměnné, totiž proměnné x_1 , a je tedy možné jej vyšetřovat pomocí metod Kapitoly 4. Tyto úvahy nás vedou k následující důležité definici.

9.1.7. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i -té proměnné** definujeme předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}. \quad (9.1)$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce f podle i -té proměnné, tj. funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

V některých případech se používá místo symbolu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ i značení $\partial_i f(a)$, $D_i f(a)$ a podobně.

9.1.8. Nechť f , a a i jsou jako v předchozí definici.

(a) Pokud jde o vztah (9.1), můžeme rozlišit následující možnosti:

$$\text{limita v (9.1)} \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} \end{cases} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty \\ -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

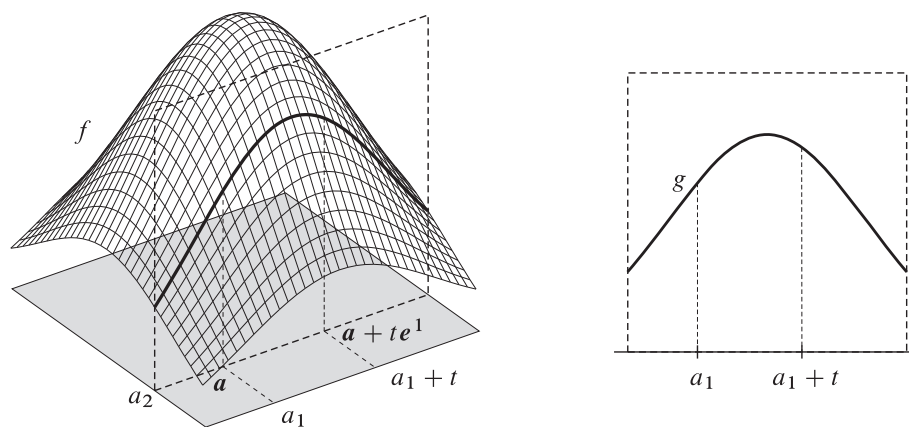
(b) Pokud parciální derivace podle i -té proměnné v bodě a existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{a + te^i; |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat úsečku, která prochází bodem a .

9.1.9 (derivace parciální funkce). Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Položíme-li

$$g(y) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n),$$

pak $g'(a_j)$ existuje právě tehdy, když existuje $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, neboť výpočet vede v obou případech na stejnou limitu. Pokud obě derivace existují, pak jsou si rovny.

Na následujícím obrázku je pro jistou funkci f dvou proměnných vidět geometrický význam funkce g , které říkáme parciální.



OBRÁZEK 1.

9.1.10 (aritmetika parciálních derivací). Z předchozího paragrafu plynou některá pravidla pro výpočet parciálních derivací, neboť lze použít větu o aritmetice derivací pro funkce jedné proměnné (Věta 5.1.17). Pro reálné funkce f a h z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, bod $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ tak dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f+h)}{\partial x_i}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial h}{\partial x_i}(a), \\ \frac{\partial(fh)}{\partial x_i}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h(a) + f(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(a),\end{aligned}$$

pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(a)$ existují vlastní.

9.1.11. Příklad. Pro funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$ spočítejte $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Řešení. Podle 9.1.10 v každém bodě $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} 2x_1 x_2.$$

♣

9.1.12. Necht $n, m \in \mathbb{N}$. Množinu všech reálných matic typu $m \times n$ budeme značit $M(m \times n)$. Tyto matice jednoznačně reprezentují lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Nechť f je reálná funkce n proměnných a $a \in \mathbb{R}^n$. Existují-li derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, n$, pak nám poskytují informaci o chování funkce f blízko bodu a na úsečkách, které jsou určeny pomocí vektorů $e^1, \dots, e^n$. O chování funkce f například na úsečce tvaru $\{a + t(e^1 + e^2); t \in (-\delta, \delta)\}$, kde $\delta > 0$, však žádnou informaci nemáme. Funkce f dokonce nemusí být definována v žádném bodě takové úsečky vyjma bodu a . Abychom mohli zkoumat chování funkce f v malých okolicích bodu a a ne pouze na některých úsečkách, zavedeme v následující definici nový pojem, který nám to umožní.

9.1.13. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě a** , pokud platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0. \quad (9.2)$$

9.1.14. Nechť f a a jsou jako v předchozí definici.

(a) Výrok (9.2) je ekvivalentní výroku

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \quad (9.3)$$

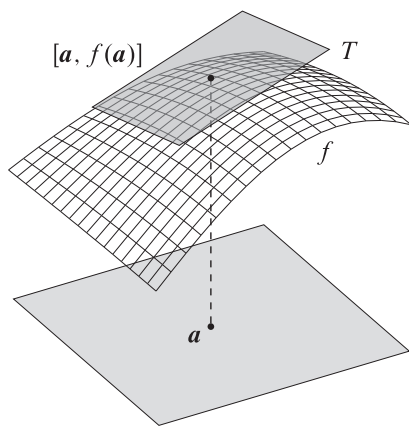
(b) Z existence totálního diferenciálu v bodě a plyne, že funkce f je definována na nějakém okolí bodu a .

9.1.15 (geometrický význam totálního diferenciálu). Předpokládejme, že f je reálná funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L . Definujme funkci $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $T(x) = f(a) + L(x-a)$. Podle (9.3) platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T(x)}{\|x-a\|} = 0.$$

Tento vztah - neformálně řečeno - ukazuje, že funkce T aproximuje velmi dobře funkci f v blízkosti bodu a . Rozdíl funkčních hodnot $f(x) - T(x)$ je ve srovnání se vzdáleností $\|x-a\|$ malý.

Grafem funkce T je afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$. V uvedené situaci jej nazýváme **tečnou rovinou**, pokud $n = 2$, nebo **tečnou nadrovinou**, pokud $n > 2$, ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Graf totálního diferenciálu je potom afinní (dokonce vektorový) podprostor $\mathbb{R}^{n+1}$, který obsahuje počátek prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ a je rovnoběžný s tečnou (nad)rovinou.



OBRÁZEK 2.

9.1.16. Věta (vztah totálního diferenciálu a partiálních derivací). Necht f je funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L . Pak existují partiální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Důkaz. Zobrazení L je lineární, a proto existují reálná čísla $A_1, \dots, A_n$ taková, že pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(h) = L(h_1, \dots, h_n) = A_1h_1 + \dots + A_nh_n.$$

Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Zobrazení $\varphi: t \mapsto te^i$ je spojitě a $\varphi(t) \neq 0$ pro $t \neq 0$. Tedy dle Věty 8.4.18 platí

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + \varphi(t)) - f(a) - L(\varphi(t))}{\|\varphi(t)\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a) - A_it}{|t|}.$$

Odtud

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t} - A_i \right| = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t} = A_i.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

9.1.17. Z Věty 9.1.16 plyne, že existuje-li totální diferenciál, je určen jednoznačně, protože je reprezentován maticí $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$. To nás opravňuje k zavedení následujícího značení. Existuje-li tedy totální diferenciál funkce f v bodě a , pak jej značíme symbolem $f'(a)$. Hodnotu lineárního zobrazení $f'(a)$ v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ pak značíme $f'(a)(h)$.

Upozorníme, že v případě $n = 1$ zde, bohužel, vzniká kolize ve značení. Symbol $f'(a)$ pak totiž jednak označuje derivaci funkce f v bodě a , tedy reálné číslo, a jednak totální diferenciál funkce f v bodě a , tedy lineární zobrazení. Toto lineární zobrazení je však reprezentováno maticí 1×1 , jejímž jediným prvkem je právě hodnota derivace. Z kontextu však bude vždy zřejmé, který význam máme na mysli.

9.1.18. Věta. Necht f je funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $x \mapsto \|x - a\|$ a $h \mapsto f'(a)(h)$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{\|x - a\|} \cdot \|x - a\| \right. \\ &\quad \left. + f(a) + f'(a)(x - a) \right) \\ &= 0 \cdot 0 + f(a) + 0 = f(a). \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v a . ■

9.1.19. Z pouhé existence parciálních derivací v daném bodě ještě spojitost funkce v tomto bodě nevyplývá, jak ukazuje následující příklad. Definujme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí $\frac{\partial f}{\partial x_1}(o) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(o) = 0$, ale f není v o spojitá. Tedy ani $f'(o)$ neexistuje. Uvědomme si, že v tomto případě lze definovat lineární zobrazení, které je reprezentováno maticí parciálních derivací, ale toto zobrazení není totálním diferenciálem funkce f v bodě o , protože nesplňuje vztah s limitou z definice totálního diferenciálu.

Pokud ale předpoklad ohledně existence parciálních derivací vhodně zesílíme, pak je možné existenci totálního diferenciálu odvodit. Tento výsledek je obsahem Věty 9.1.21, v jejímž důkazu využijeme následující lemma, které je vícedimenzionální variantou Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

9.1.20. Lemma. Necht f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in I$. Necht v každém bodě I existují všechny parciální derivace funkce f . Potom existují body $c^1, \dots, c^n \in I$ takové, že

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(b_i - a_i).$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} p^0 &= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = a, \\ p^1 &= (b_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n), \\ p^2 &= (b_1, b_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n), \\ &\vdots \\ p^{n-1} &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, a_n), \\ p^n &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n) = b. \end{aligned}$$

Potom platí

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(p^i) - f(p^{i-1})). \quad (9.4)$$

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ položme

$$g_i(x) = f(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad x \in (\alpha_i, \beta_i).$$

Funkce g_i má v (α_i, β_i) vlastní derivaci rovnou

$$g'_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n). \quad (9.5)$$

Pokud $a_i \neq b_i$, nalezneme podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) bod z_i v intervalu s krajními body a_i a b_i takový, že

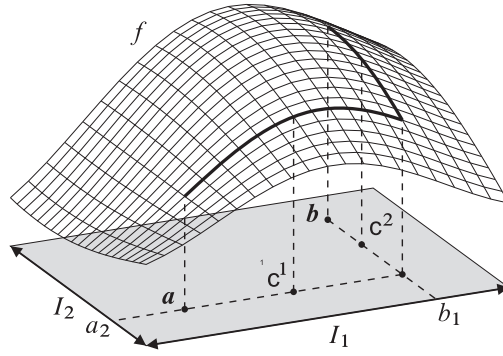
$$f(p^i) - f(p^{i-1}) = g_i(b_i) - g_i(a_i) = g'_i(z_i) \cdot (b_i - a_i). \quad (9.6)$$

V případě, že $a_i = b_i$, volme $z_i = a_i$. Pak (9.6) platí i v tomto případě. Položme

$$c^i = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, z_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom podle (9.5) a (9.6) platí $f(p^i) - f(p^{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(b_i - a_i)$. Odtud a z (9.4) dostáváme dokazovaný vztah.

Následující obrázek ilustruje základní myšlenku důkazu pro $n = 2$.



OBRÁZEK 3.

■

9.1.21. Věta. Necht f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v bodě a . Pak má funkce f v bodě a totální diferenciál.

Důkaz. Ukážeme, že lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i, \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

je totálním diferenciálem funkce f v bodě a .

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\tilde{\delta} > 0$, takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall x \in B(a, \tilde{\delta}): \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{n}}$ a označme

$$I = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \dots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

Potom platí $B(a, \delta) \subset I \subset B(a, \tilde{\delta})$. Zvolme $x \in B(a, \delta)$. Pak podle Lemmatu 9.1.20 nalezneme body $c^1, \dots, c^n \in I$ takové, že

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(x_i - a_i).$$

Pak máme

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(a) - L(x-a)| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) (x_i - a_i) \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| |x_i - a_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| \\
 &\leq \varepsilon n \|x - a\|.
 \end{aligned}$$

Tedy pro $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ máme

$$\frac{|f(x) - f(a) - L(x-a)|}{\|x - a\|} \leq n\varepsilon,$$

čímž je důkaz proveden. ■

V definici parciální derivace jsme pracovali s kanonickými vektory $e^1, \dots, e^n$. Stejný přístup použijeme i v následující definici, kde ale budeme uvažovat libovolný vektor z $\mathbb{R}^n$.

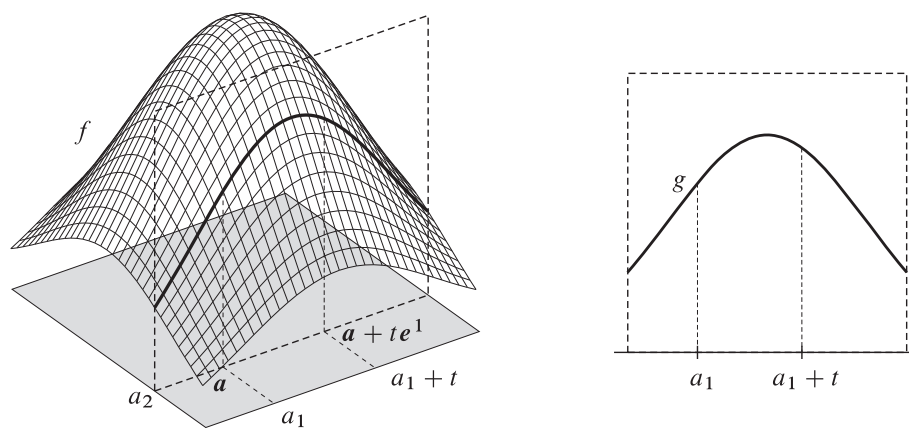
9.1.22. Definice. Necht f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě a podle vektoru v** rozumíme limitu

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

9.1.23. (a) Jestliže je f funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, potom zřejmě platí $D_{e^i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

(b) Pokud parciální derivace podle vektoru v v bodě a existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{a + tv; |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat úsečku určenou bodem a a vektorem v .

(c) Necht f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Položíme-li $g(t) = f(a + tv)$ pro t splňující $a + tv \in \mathcal{D}(f)$, pak $g'(0)$ existuje právě tehdy, když existuje $D_v f(a)$, neboť výpočet vede v obou případech na stejnou limitu. Pokud tedy jedna z derivací existuje, existuje i druhá a rovnají se. Na následujícím obrázku je pro jistou funkci f dvou proměnných vidět geometrický význam funkce g .



OBRÁZEK 4.

(d) Podobně jako v případě parciálních derivací plynou z předchozího výkladu některá pravidla pro počítání s derivacemi podle vektoru. Pro reálné funkce f a h z $\mathbb{R}^n$, bod $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$ tak dostáváme

$$\begin{aligned} D_v(f + h)(a) &= D_v f(a) + D_v h(a), \\ D_v(fh)(a) &= D_v f(a) \cdot h(a) + f(a) \cdot D_v h(a), \end{aligned}$$

pokud $D_v f(a)$, $D_v h(a)$ existují.

9.1.24. Definice. Necht f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Pak definujeme vektor $\nabla f(a)$ z $\mathbb{R}^n$ předpisem

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

a nazýváme jej **gradient funkce f v bodě a** .

9.1.25. Necht f a a jsou jako v předchozí definici. Chápeme-li $\nabla f(a)$ jako matici typu $1 \times n$, pak jde o reprezentující matici totálního diferenciálu $f'(a)$. Pokud se na $\nabla f(a)$ díváme jako na vektor, pak můžeme pomocí skalárního součinu psát $f'(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ pro každé $h \in \mathbb{R}^n$.

Souvislost totálního diferenciálu, derivace podle vektoru a gradientu zachycuje následující věta.

9.1.26. Věta. Necht f je reálná funkce n proměnných, $a, v \in \mathbb{R}^n$ a existuje $f'(a)$. Potom platí:

- (a) $f'(a)(v) = D_v f(a)$,
- (b) $\max\{D_v f(a); \|v\| = 1\} = \|\nabla f(a)\|$.

Důkaz. (a) Pokud $v = o$, potom dokazovaná rovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $v \neq o$. Potom platí

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(a + tv) - f(a) - f'(a)(tv)}{\|tv\|} \cdot \frac{\|tv\|}{t} + f'(a)(v) \right). \end{aligned}$$

Podle věty o limitě složené funkce platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a) - f'(a)(tv)}{\|tv\|} = 0.$$

Funkce $t \mapsto \frac{\|tv\|}{t}$ je omezená na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dostáváme tak $D_v f(a) = 0 + f'(a)(v) = f'(a)(v)$.

(b) Z (a) a Cauchyovy nerovnosti (Věta 8.1.6) máme

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= f'(a)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\|. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Pokud $\nabla f(a) = o$, pak dokazovaná rovnost platí, neboť obě strany jsou rovny nule. Předpokládejme, že platí $\nabla f(a) \neq o$. Položme

$$v = \|\nabla f(a)\|^{-1} \cdot \nabla f(a).$$

Pak platí

$$D_v f(a) = \|\nabla f(a)\|^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \|\nabla f(a)\|.$$

Odtud a z (9.7) již plyne (b). ■

9.1.27. (a) Pokud $\nabla f(a) \neq o$, pak se v (b) nabývá maxima právě pro $v = \|\nabla f(a)\|^{-1} \cdot \nabla f(a)$.

(b) Necht $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Jestliže vektory $v \in \mathbb{R}^n$ a $\nabla f(a)$ svírají úhel menší než $\frac{\pi}{2}$, neboli $\langle \nabla f(a), v \rangle > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0, \delta)$ platí $f(a + tv) > f(a)$ a pro každé $t \in (-\delta, 0)$ platí $f(a + tv) < f(a)$. Uvažujme funkci g z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ definovanou předpisem $g(t) = f(a + tv)$, pokud $a + tv \in G$. Potom platí

$$g'(0) = \langle \nabla f(a), v \rangle > 0$$

a podle Lemmatu 5.5.3 a 5.5.4 dostáváme uvedené tvrzení.

9.1.28. Příklad. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá a otevřená množina a $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každé $x \in G$ platí $f'(x) = 0$. Dokažte, že potom f je konstantní na G .

Řešení. ♣

9.2. Derivace vektorových funkcí

Pojem totálního diferenciálu pro funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ je možné zobecnit i pro **vektorové funkce**, tj. funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. To je provedeno v následující definici.

9.2.1. Definice. Necht F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení F v bodě a** , pokud platí

$$\lim_{h \rightarrow o} \frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{\|h\|} = o. \quad (9.8)$$

9.2.2. Ve vztahu (9.8) se vyskytuje dvakrát symbol označující nulový vektor. V případě výrazu $h \rightarrow o$ jde o vektor z $\mathbb{R}^n$, ve druhém případě jde o vektor z $\mathbb{R}^m$. Vzhledem k tomu, že je z kontextu jasné, z kterých prostorů jsou uvedené vektory, používáme jeden symbol v obou případech, ačkoliv jde o rozdílné vektory, pokud $n \neq m$.

Vztah (9.8) je splněn právě tehdy, když platí

$$\lim_{h \rightarrow o} \frac{\|F(a+h) - F(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (9.9)$$

Ve výrazu (9.9) se dvakrát vyskytuje symbol normy. Podobně jako pro nulový vektor vyplývá z kontextu, že norma v čitateli je normou na prostoru $\mathbb{R}^m$ a norma ve jmenovateli je normou na prostoru $\mathbb{R}^n$.

9.2.3. Zobrazení F z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci právě tehdy, když každá jeho složka, tedy každé zobrazení F_i z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, má v bodě a totální diferenciál. Podívejme se postupně na obě implikace v předchozím tvrzení.

$\Rightarrow$ Necht L je derivace funkce F v bodě a . Podle Věty ?? platí (9.8) právě tehdy, když každá složka funkce, jejíž limitu počítáme, má limitu rovnou nule, tj. pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$\lim_{h \rightarrow o} \left(\frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{\|h\|} \right)_i = \lim_{h \rightarrow o} \frac{F_i(a+h) - F_i(a) - L_i(h)}{\|h\|} = 0. \quad (9.10)$$

Z druhé rovnosti plyne, že funkce F_i má v bodě a totální diferenciál rovný lineárnímu zobrazení L_i .

$\Leftarrow$ Definujme zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem $L(h) = (F'_1(a)(h), \dots, F'_m(a)(h))$. Zobrazení L je lineární, neboť $F'_1(a), \dots, F'_m(a)$ jsou lineární. Z definice totálního diferenciálu platí pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\lim_{h \rightarrow o} \frac{F_i(a+h) - F_i(a) - F'_i(a)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Podle Věty ?? dostáváme

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow o} \frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{\|h\|} \\ &= \lim_{h \rightarrow o} \left[\frac{F_1(a+h) - F_1(a) - F'_1(a)(h)}{\|h\|}, \dots, \frac{F_m(a+h) - F_m(a) - F'_m(a)(h)}{\|h\|} \right] \\ &= \underbrace{[0, \dots, 0]}_{m\text{-krát}} = o. \end{aligned}$$

Lineární zobrazení L je tedy derivace zobrazení F v bodě a .

9.2.4. Označení. (a) Z 9.2.3 plyne, že má-li F v bodě a derivaci $L = (L_1, \dots, L_m)$, pak je L_i totálním diferenciálem F_i v bodě a pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Totální diferenciál je určen jednoznačně, pokud existuje, a tedy derivace zobrazení F v bodě a je určena jednoznačně, pokud existuje. Tato úvaha nás opravňuje označit lineární zobrazení, které je derivací funkce F v bodě a , symbolem $F'(a)$.

(b) Pokud v Definici 9.2.1 položíme $m = 1$, pak je vztah (9.8) ekvivalentní s (9.2). V tomto případě tedy znovu definujeme pojem totálního diferenciálu. V dalším textu již nebudeme termín totální diferenciál používat a dáme přednost termínu derivace.

9.2.5. (a) Necht $a \in \mathbb{R}^n$ a $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je zobrazení, které je konstantní na jistém okolí bodu a . Pak $F'(a)$ je lineární zobrazení, které libovolnému vektoru $h \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje nulový vektor v prostoru $\mathbb{R}^m$. Stačí nalézt $\eta > 0$ a $b \in \mathbb{R}^m$ taková, že $F(x) = b$ pro každé $x \in B(a, \eta)$. Potom pro každé $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \eta$, platí

$$F(a+h) - F(a) - F'(a)(h) = b - b - o = o.$$

Odtud okamžitě plyne naše tvrzení.

(b) Je-li $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, pak v každém bodě $a \in \mathbb{R}^n$ platí $L'(a) = L$, neboť pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|L(a+h) - L(a) - L(h)\| = \|o\| = 0.$$

9.2.6 (geometrický význam derivace). Předpokládejme, že F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Na zobrazení F se můžeme dívat jako na m -tici funkcí $F_1, \dots, F_m$ a pro každou z těchto funkcí uvažovat její derivaci, pomocí které můžeme aproximovat její chování v okolí bodu a ve smyslu 9.1.15. Pomocí derivace $F'(a)$, která má složky $F'_1(a), \dots, F'_m(a)$, pak můžeme aproximovat chování funkce F v okolí bodu a , neboť můžeme aproximovat chování jednotlivých složek. Jinými slovy, definujeme-li funkci $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem $T(x) = F(a) + F'(a)(x - a)$, pak podle definice platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - T(x)}{\|x - a\|} = o.$$

Afinní funkce T , která je obecně jednodušší objekt než F , aproximuje velmi dobře funkci F v blízkosti bodu a . Vektor $F(x) - T(x)$ je totiž ve srovnání s velikostí vektoru $x - a$ malý.

9.2.7. Věta. Necht F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak je $F'(a)$ reprezentována maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Důkaz. Podle 9.2.3 víme, že pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ existuje derivace $F'_j(a)$ a je podle 9.1.17 reprezentována maticí $(\frac{\partial F_j}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial F_j}{\partial x_n}(a))$. Lineární zobrazení $F'(a)$ má složky $F'_j(a)$, $j = 1, \dots, m$, takže je reprezentováno maticí (9.11). ■

9.2.8. Označení. Matice reprezentující $F'(a)$ se nazývá **Jacobiho matice**. Pokud $m = n$, pak determinant Jacobiho matice nazýváme **Jacobián** a značíme ho $J_F(a)$, případně

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

9.2.9. Věta. Necht F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak je F spojitě v a .

Důkaz. Podle 9.2.3 existují derivace $F'_j(a)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, takže všechny funkce F_j jsou spojitě v a podle Věty 9.1.18. Odtud plyne podle Věty ?? spojitost F v a . ■

9.2.10. Věta. Necht F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ jsou spojitě v a pro každá $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Pak $F'(a)$ existuje.

Důkaz. Podle Věty 9.1.21 existují derivace $F'_1(a), \dots, F'_m(a)$. Z 9.2.3 dostáváme existenci $F'(a)$. ■

9.2.11. Lemma. Necht $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \|Lx\| \leq C \|x\|.$$

Důkaz. Necht matice $A = (a_{ji})_{\substack{j=1..m \\ i=1..n}} \in M(m \times n)$ reprezentuje L . Pak máme z Cauchyovy nerovnosti (Věta ??)

$$\begin{aligned} \|Lx\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^m (L(x)_j)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji}^2} \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Položíme-li

$$C = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji}^2},$$

dostáváme požadovaný výsledek. ■

9.2.12. Definice. Na množině $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zavedeme operace sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem. Pro $L, L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^n$ položíme

$$(L_1 + L_2)(x) = L_1(x) + L_2(x),$$

$$(cL)(x) = cL(x).$$

Vzhledem k těmto operacím tvoří $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektorový prostor nad reálnými čísly. Definujeme pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normu

$$\|L\| = \sup \left\{ \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\}.$$

9.2.13. Lemma. Vektorový prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je s výše definovanou normou normovaný lineární prostor.

Důkaz. Musíme ověřit, že zobrazení $L \mapsto \|L\|$ je norma na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Zjevně je norma nulového zobrazení rovna nule a $\|L\| = 0$ právě tehdy, když $\|L(x)\| = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, tj. když $L = 0$.

Snadno též odvodíme pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $c \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned} \|cL\| &= \sup \left\{ \frac{\|cL(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} \\ &= |c| \sup \left\{ \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} \\ &= |c| \|L\|. \end{aligned}$$

Zbývá ověřit trojúhelníkovou nerovnost. Pro $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ platí

$$\begin{aligned} \|L_1 + L_2\| &= \sup \left\{ \frac{\|L_1(x) + L_2(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|L_1(x)\| + \|L_2(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|L_1(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} + \sup \left\{ \frac{\|L_2(x)\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n, x \neq o \right\} \\ &= \|L_1\| + \|L_2\|, \end{aligned}$$

a tedy trojúhelníková nerovnost platí. ■

9.2.14. Povšimněme si, že pro každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\|L(x)\| \leq \|L\| \|x\|$. Zvolme $x \neq o$ v $\mathbb{R}^n$. Pak

$$\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} \leq \|L\|,$$

a tedy

$$\|L(x)\| \leq \|L\| \|x\|.$$

Pro $x = o$ platí nerovnost triviálně.

9.2.15. Lemma. Necht F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ mající derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Pak existují $C > 0$ a $\delta > 0$ taková, že

$$\forall h \in B(o, \delta): \|F(a+h) - F(a)\| \leq C \|h\|.$$

Důkaz. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $h \in B(o, \delta)$ platí

$$\|F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)\| \leq \|h\|.$$

Potom podle 9.2.14 máme pro každé $h \in B(o, \delta)$

$$\begin{aligned} \|F(a+h) - F(a)\| &\leq \|F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)\| + \|F'(a)(h)\| \\ &\leq \|h\| + \|F'(a)\| \|h\| = (1 + \|F'(a)\|) \|h\|. \end{aligned}$$

Číslo $C = 1 + \|F'(a)\|$ tedy vyhovuje požadované nerovnosti. ■

9.2.16. Věta (derivace složeného zobrazení). Necht F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, G je zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^s$, F má derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ a G má derivaci v bodě $b = F(a) \in \mathbb{R}^k$. Pak existuje derivace $(G \circ F)'(a)$ a platí

$$(G \circ F)'(a) = G'(b) \circ F'(a).$$

Důkaz. Díky Lemmatu 9.2.15 nalezneme $C \in \mathbb{R}$ a $\delta_0 > 0$ taková, že

$$\forall h \in B(o, \delta_0): \|F(a+h) - F(a)\| \leq C \|h\|. \quad (9.12)$$

Ukážeme, že lineární zobrazení $G'(b) \circ F'(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ je derivací zobrazení $G \circ F$ v bodě a . Necht $\varepsilon > 0$. Díky existenci derivace $G'(b)$ nalezneme $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall u \in B(o, \eta): \|G(b+u) - G(b) - G'(b)(u)\| \leq \varepsilon \|u\|. \quad (9.13)$$

Dále díky existenci derivace $F'(a)$ nalezneme $\delta \in (0, \frac{\eta}{C})$ takové, že platí

$$\forall h \in B(o, \delta): \|F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)\| \leq \varepsilon \|h\|. \quad (9.14)$$

Navíc dostáváme

$$\forall h \in B(o, \delta): \|F(a+h) - F(a)\| \leq C \|h\| < \eta. \quad (9.15)$$

Pak pro $h \in B(o, \delta)$ máme díky (9.13) a (9.15) odhad

$$\begin{aligned} &\|G(b + (F(a+h) - F(a))) - G(b) - G'(b)(F(a+h) - F(a))\| \\ &\leq \varepsilon \|F(a+h) - F(a)\| \leq C\varepsilon \|h\|. \end{aligned}$$

Dále pro $h \in B(o, \delta)$ platí z (9.14)

$$\begin{aligned} &\|G'(b)(F(a+h) - F(a)) - G'(b) \circ F'(a)(h)\| \\ &\leq \|G'(b)\| \|F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)\| \\ &\leq \varepsilon \|G'(b)\| \|h\|. \end{aligned}$$

Kombinací předcházejících dvou odhadů dostaneme

$$\begin{aligned} & \|G(F(a+h)) - G(F(a)) - G'(b) \circ F'(a)(h)\| \\ & \leq \|G(b + (F(a+h) - F(a))) - G(b) - G'(b)(F(a+h) - F(a))\| \\ & \quad + \|G'(b)(F(a+h) - F(a)) - G'(b) \circ F'(a)(h)\| \\ & \leq (C + \|G'(b)\|)\varepsilon \|h\|. \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. ■

9.2.17. Derivace $(G \circ F)'(a)$ je reprezentována součinem matic, které reprezentují $F'(a)$ a $G'(b)$. Tedy $(G \circ F)'(a)$ je reprezentována maticí

$$\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j} \right)_{\substack{l=1..s \\ j=1..k}} \cdot \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{\substack{j=1..k \\ i=1..n}}.$$

9.2.18. Věta (řetízkové pravidlo). Necht funkce $f_1, \dots, f_k$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ mají v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci a funkce g z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $b = (f_1(a), \dots, f_k(a))$ derivaci. Definujme funkci h z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ předpisem

$$h(x) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)).$$

Pak má funkce h v bodě a derivaci a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a). \quad (9.16)$$

Důkaz. Existence derivace plyne z Věty 9.2.16. Dle 9.2.17 platí (9.16), neboť

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(a) \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

■

9.2.19. Příklad. Necht $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci v každém bodě. Definujme $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$h(r, t) = f(r \cos t, r \sin t), \quad (r, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Potom pro $(r, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, t), \frac{\partial h}{\partial t}(r, t) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t), \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \right) \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) \cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \sin t, \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t)(-r \sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t)(r \cos t). \end{aligned}$$

9.2.20. Poznámka. Necht f_1, f_2 jsou funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, které mají v $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak platí

- (a) $(f_1 + f_2)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a)$,
- (b) $(f_1 f_2)'(a) = f_2(a) f_1'(a) + f_1(a) f_2'(a)$,
- (c) $(f_1/f_2)'(a) = f_2^{-2}(a) (f_2(a) f_1'(a) - f_1(a) f_2'(a))$, pokud $f_2(a) \neq 0$.

K důkazu (a) uvažujme $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$$

a $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pak $(g \circ f)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ a $g'(b) = (1, 1)$ pro každý bod $b \in \mathbb{R}^2$. V bodě a tedy platí

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)'(a) &= (g \circ f)'(a) \\ &= (1 \quad 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \right) \\ &= f_1'(a) + f_2'(a). \end{aligned}$$

Podobně postupujeme v případech (b) a (c) za pomoci funkcí $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$, respektive $g(y_1, y_2) = y_1/y_2$.

9.2.21. Věta (o přírůstku funkce). Necht f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, která má derivaci v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$. Necht $a, b \in G$ a úsečka L spojující body a, b je obsažena v G , tj. $\{ta + (1-t)b; t \in [0, 1]\} \subset G$. Pak existuje $c \in L$ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Důkaz. Definujme funkci $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$g(t) = f((1-t)a + tb), \quad t \in [0, 1].$$

Zobrazení $t \mapsto (1-t)a + tb$ má v každém bodě $\mathbb{R}$ derivaci, takže g je spojitě na $[0, 1]$ a v každém bodě $(0, 1)$ má derivaci. Potom podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) nalezneme $t_0 \in (0, 1)$ takové, že

$$g(1) - g(0) = g'(t_0),$$

neboli pro $c = (1 - t_0)a + t_0b$ máme

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= g(1) - g(0) = g'(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i) \\ &= f'(c)(b - a). \end{aligned}$$

■

9.2.22. Definice. Necht A je množina v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že je **konvexní**, pokud pro každé dva body z A platí, že úsečka je spojující je obsažena v A .

9.2.23. Příklad. Pro zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ nemusí analogie Věty 9.2.21 platit. Uvažujme zobrazení $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = (\cos t, \sin t)$$

Pak $F'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq 0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$,

$$F(2\pi) - F(0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0),$$

ale

$$F'(c)(2\pi - 0) = 2\pi(-\sin c, \cos c) \neq (0, 0), \quad c \in (0, 1).$$

9.2.24. Věta. Necht $K \in \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f: G \rightarrow \mathbb{R}^k$ je zobrazení, které má v každém bodě $x \in G$ derivaci splňující $\|f'(x)\| \leq K$. Potom platí

$$\forall a, b \in G: \|f(b) - f(a)\| \leq K \cdot \|b - a\|.$$

Důkaz. Zvolme $a, b \in G$. Pokud $f(a) = f(b)$, tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $f(a) \neq f(b)$ a položme

$$v = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|}.$$

Definujme funkci $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x) = \langle f(x), v \rangle = \sum_{j=1}^k f_j(x) v_j.$$

Potom platí

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = |\langle f(b) - f(a), v \rangle| = \|f(b) - f(a)\|.$$

Dále máme

$$\varphi'(x) = \sum_{j=1}^k v_j f'_j(x), \quad x \in G,$$

a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| \leq 1$, platí

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)(h)| &= \left| \sum_{j=1}^k v_j f'_j(x)(h) \right| = |\langle f'(x)(h), v \rangle| \\ &\leq \|f'(x)(h)\| \cdot \|v\| \leq \|f'(x)\| \cdot \|v\| \\ &\leq \|f'(x)\| \leq K. \end{aligned}$$

Tedy

$$\|\varphi'(x)\| = \sup \{ |\varphi'(x)(h)|; h \in \mathbb{R}^n, \|h\| \leq 1 \} \leq \sup \{ \|f'(x)\|; x \in G \} \leq K.$$

Podle Věty 9.2.21 nalezneme $c \in G$ splňující

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a).$$

Tedy

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| &= |\varphi'(c)(b - a)| \leq \|\varphi'(c)\| \cdot \|b - a\| \\ &\leq K\|b - a\|.\end{aligned}$$

■

9.3. Derivace vyšších řádů

9.3.1. Definice. Necht f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j -té proměnné v bodě a značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, pokud $i = j$. Analogicky značíme parciální derivace vyšších řádů.

9.3.2. Poznámka. Všimněte si pořadí symbolů

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a).$$

9.3.3. Definice. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že f je **třídy** C^k , pokud jsou všechny parciální derivace funkce f až do řádu k včetně spojité na G . Množinu všech funkcí $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^k označujeme $C^k(G)$ a klademe $C^\infty(G) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(G)$.

O funkci g řekneme, že je **třídy** C^k na G ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), pokud $g|_G \in C^k(G)$.

9.3.4. Příklad. Dokažte, že funkce $\pi_i(x) = x_i$, $x \in \mathbb{R}^n$, leží v množině $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Řešení.

♣

9.3.5. Poznámky. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

(a) Jestliže $f \in C^1(G)$, pak má dle Věty 9.1.21 derivaci v každém bodě G .

(b) Zřejmě platí

$$C^0(G) \supset C^1(G) \supset C^2(G) \supset \dots,$$

přičemž funkcemi třídy $C^0(G)$ se rozumí spojité funkce na G .

(c) Necht $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pokud $f, g \in C^k(G)$, pak i $f + g$, fg a cf , $c \in \mathbb{R}$, leží v $C^k(G)$. Je-li navíc g nenulová na G , tak i $f/g \in C^k(G)$. K ověření těchto tvrzení stačí použít vzorce pro výpočet derivace součtu, součinu, podílu a matematickou indukci dle k .

9.3.6. Definice. Necht $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Řekneme, že F je zobrazení **třídy** C^k , pokud jeho složky $f_1, \dots, f_m$ jsou třídy C^k .

9.3.7. Poznámka. Zobrazení třídy C^1 na otevřené množině G má derivaci v každém bodě množiny G .

9.3.8. Věta (skládání zobrazení třídy $\mathcal{C}^k$). Necht $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m, n, s \in \mathbb{N}$ a $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Necht $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: H \rightarrow \mathbb{R}^s$ jsou po řadě tříd $\mathcal{C}^k(G)$ a $\mathcal{C}^k(H)$ a platí $f(G) \subset H$. Pak zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

Důkaz. Označme $h = (h_1, \dots, h_s) = g \circ f$. Protože $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: H \rightarrow \mathbb{R}^s$ a $f(G) \subset H$, je zobrazení h definované na G . Dále budeme postupovat pomocí matematické indukce podle k . Předpokládejme nejprve, že $k = 1$. Pro každé $x \in G$ existují podle Věty 14.4 derivace $f'(x)$ a $g'(f(x))$. Podle Věty 14.11 pak platí pro každé $x \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah

$$\frac{\partial h_l}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x). \quad (9.17)$$

Funkce $x \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(x))$, $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité, a proto je funkce $\frac{\partial h_l}{\partial x_i}$ podle (9.17) spojitá. Odtud vyplývá, že zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na G .

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Stejně jako v předchozím případě platí pro každé $x \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah (9.17).

Necht $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$. Funkce $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ je třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na G . Funkce $x \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(x))$ je dle indukčního předpokladu třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na G , neboť funkce $y \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(y)$ je třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na H a $f \in \mathcal{C}^k(G) \subset \mathcal{C}^{k-1}(G)$. Podle výše uvedené poznámky (c) je funkce $x \mapsto \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(x)$ též třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na G . Tedy je funkce h třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

Je-li $k = \infty$, tvrzení plyne přímo z definice podle předchozího. ■

9.3.9. Věta (záměnnost parciálních derivací). Necht f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže obě funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v a , potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $n = 2$. Necht $a = [a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2$ a $\delta > 0$, je takové, že

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \subset \mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cap \mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Položme

$$W(t) = \frac{f(a_1 + t, a_2 + t) - f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2 + t) + f(a_1, a_2)}{t^2} \quad \text{pro } t \in (0, \delta).$$

Zvolme $t \in P_+(0, \delta)$. Položme

$$\varphi(x) = f(x, a_2 + t) - f(x, a_2) \quad \text{pro } x \in [a_1, a_1 + \delta].$$

Potom

$$W(t) = \frac{1}{t^2}(\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1))$$

a

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2) \quad \text{pro každé } x \in [a_1, a_1 + \delta].$$

Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi(t) \in (a_1, a_1 + t)$ takové, že

$$\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1) = \varphi'(\xi(t)) \cdot t.$$

Pak

$$W(t) = \frac{\varphi'(\xi(t))}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2) \right). \quad (9.18)$$

Protože $\frac{\partial f}{\partial x}$ má v bodě a totální diferenciál, existuje funkce $z_1: (-\delta, \delta)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \alpha, a_2 + \beta) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)\beta + z_1(\alpha, \beta) \quad \text{pro každé } [\alpha, \beta] \in (-\delta, \delta)^2 \quad (9.19)$$

a

$$\lim_{[\alpha, \beta] \rightarrow 0} \frac{z_1(\alpha, \beta)}{\|[\alpha, \beta]\|} = 0. \quad (9.20)$$

Dosaďme do (9.19) postupně $[\alpha, \beta] = [\xi(t) - a_1, t]$ a $[\alpha, \beta] = [\xi(t) - a_1, 0]$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2 + t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)(\xi(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)t + z_1(\xi(t) - a_1, t), \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)(\xi(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \cdot 0 + z_1(\xi(t) - a_1, 0). \end{aligned}$$

Díky tomu, že t bylo zvoleno libovolně, obdržíme kombinací posledních dvou rovností s (9.18) vztah

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) + \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t) - z_1(\xi(t) - a_1, 0)}{t} \quad \text{pro každé } t \in (0, \delta).$$

Pro každé $t \in (0, \delta)$ platí

$$\frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{t} = \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{\|[\xi(t) - a_1, t]\|} \cdot \frac{\|[\xi(t) - a_1, t]\|}{t}$$

a

$$\frac{\|[\xi(t) - a_1, t]\|}{t} \leq \frac{\sqrt{(\xi(t) - a_1)^2 + t^2}}{t} \leq \frac{\sqrt{t^2 + t^2}}{t} = \sqrt{2}.$$

Z (9.20) plyne, že

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{\|[\xi(t) - a_1, t]\|} = 0,$$

a tedy celkem

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{t} = 0.$$

Podobně odvodíme

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, 0)}{t} = 0.$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

Nyní vyjádříme funkci W jiným způsobem. Zvolme $t \in (0, \delta)$ a definujme

$$\psi(y) = f(a_1 + t, y) - f(a_1, y) \quad \text{pro } y \in [a_2, a_2 + \delta).$$

Potom

$$W(t) = \frac{\psi(a_2 + t) - \psi(a_2)}{t^2} \quad \text{pro } t \in (0, \delta).$$

Obdobně jako v první části důkazu odvodíme

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + \frac{z_2(t, \eta(t) - a_2) - z_2(0, \eta(t) - a_2)}{t}$$

pro nějaké $\eta(t) \in (a_2, a_2 + t)$, kde z_2 je funkce splňující

$$\lim_{[\alpha, \beta] \rightarrow o} \frac{z_2(\alpha, \beta)}{\|[\alpha, \beta]\|} = 0.$$

Odtud plyne podobně jako v předchozím případě

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).$$

Platí tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$. Definujme funkci $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x, y) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Položme dále

$$\gamma(x, y) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(x, y)), & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\gamma(x, y)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(x, y)), & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(x, y)). \end{aligned}$$

Zobrazení $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ má derivaci v každém bodě $\mathbb{R}^2$, a tedy $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ mají totální diferenciál v (a_i, a_j) . Odtud plyne tvrzení. ■

9.3.10. Parciální derivace nejsou obecně záměnné, jak ukazuje následující příklad.

9.3.11. Příklad. Dokažte, že funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

splňuje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Řešení. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Dále pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x,$$

takže

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$

Odtud plyne tvrzení. ♣

9.3.12. Důsledek. Necht $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

9.3.13. Důsledek. Necht $k, n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^k(G)$, $a \in G$, $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ je permutace a $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(k)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(a).$$

Důkaz. Je-li $k = 1$, tvrzení zřejmě platí. Pro $k > 1$ stačí tvrzení dokázat pro permutaci ve formě „sousední transpozice“, neboť každá permutace je konečnou kombinací sousedních transpozic. Necht $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Položme

$$\pi(\ell) = \begin{cases} j+1, & \text{jestliže } \ell = j, \\ j, & \text{jestliže } \ell = j+1, \\ \ell, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{pro } \ell \in \{1, \dots, k\}.$$

Označme

$$g = \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_{j-1}} \cdots \partial x_{i_1}}.$$

Potom $g \in \mathcal{C}^2(G)$, a tedy podle předcházejícího důsledku Věty 9.3.9 platí

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{j+1}} \partial x_{i_j}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_j} \partial x_{i_{j+1}}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{\pi(j+1)}} \partial x_{i_{\pi(j)}}}(a).$$

Odtud plyne tvrzení. ■

9.3.14. Definice. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $L: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ se nazývá **k -lineární**, jestliže

$$u \mapsto L(v^1, \dots, v^{i-1}, u, v^{i+1}, \dots, v^k)$$

je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$, $v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$. Množinu všech k -lineárních zobrazení z $(\mathbb{R}^n)^k$ do $\mathbb{R}^m$ značíme $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

9.3.15. Poznámka. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$. Pro $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ platí

$$B(u, v) = B\left(\sum_{i=1}^n u_i e^i, \sum_{j=1}^n v_j e^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j B(e^i, e^j).$$

Obdobně pro $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dostaneme

$$L(u^1, \dots, u^k) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n u_{i_1}^1 \cdots u_{i_k}^k L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k}). \quad (9.21)$$

Je-li $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $h \in \mathbb{R}^n$, potom zobrazení $(u^2, u^3, \dots, u^k) \mapsto L(h, u^2, \dots, u^k)$ patří do $\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

9.3.16. Lemma (norma obrazu při k -lineárním zobrazení). Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Potom existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \|u^1\|_{\mathbb{R}^n} \cdots \|u^k\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Důkaz. Položme

$$K = \max \{ \|L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k})\|; i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \}.$$

Pak dle (9.21) pro každá $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned} \|L(u^1, \dots, u^k)\| &\leq \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n |u_{i_1}^1 \cdots u_{i_k}^k| \|L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k})\| \leq K \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \|u^1\| \cdots \|u^k\| \\ &\leq Kn^k \|u^1\| \cdots \|u^k\|. \end{aligned}$$

Tedy stačí položit $C = Kn^k$. ■

9.3.17. Definice. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Pak **normou** zobrazení L rozumíme číslo

$$\|L\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \sup \left\{ \|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m}, \|u^1\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1, \dots, \|u^k\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1 \right\}.$$

9.3.18. Poznámka. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$. Potom $(\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)})$ tvoří normovaný lineární prostor.

9.3.19. Definice. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací k -tého řádu zobrazení f v bodě a** nazýváme k -lineární zobrazení L z $(\mathbb{R}^n)^k$ do $\mathbb{R}^m$ splňující

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

značíme $L = f^{(k)}(a)$.

9.3.20. Poznámky. (a) Povšimněme si, že přecházející definice má induktivní charakter, tj. k -tá derivace je definována na základě znalosti definice $(k-1)$ -ní derivace.

(b) Navíc je definice korektní, jelikož pro $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f^{(k-1)}(a+h), f^{(k-1)}(a), L(h, \cdot, \dots, \cdot) \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

a tedy

$$\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|$$

je dobře definovaný výraz.

9.3.21. Věta (derivace vyššího řádu a totální diferenciál). Necht $n, k \in \mathbb{N}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je k -tá derivace f v a . Potom mají všechny parciální derivace f řádu $(k-1)$ totální diferenciál v a a pro každé $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$L(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(a).$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí dle k . Pro $k = 1$ tvrzení plyne z definice.

Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a tvrzení platí pro $k-1$. Zvolme $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je k -tá derivace f v a . Nalezneme

$\delta > 0$ takové, že všechny parciální derivace f řádu $(k-1)$ existují na $B(a, \delta)$. Podle indukčního předpokladu pro $x \in B(a, \delta)$ a $[u^2, \dots, u^k] \in (\mathbb{R}^n)^{k-1}$ platí

$$f^{(k-1)}(x)(u^2, \dots, u^k) = \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x) u_{j_2}^2 \dots u_{j_k}^k,$$

a tedy zobrazení $g: B(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$g(x) = f^{(k-1)}(x)(e^{i_2}, \dots, e^{i_k})$$

splňuje

$$g(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(x) \quad \text{pro } x \in B(a, \delta).$$

Označme

$$w = (e^{i_2}, \dots, e^{i_k}).$$

Pak pro $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, $\|h\| < \delta$, platí

$$\begin{aligned} & \frac{|f^{(k-1)}(a+h)(w) - f^{(k-1)}(a)(w) - L(h, w)|}{\|h\|} \\ & \leq \frac{\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \dots, \dots)\|}{\|h\|}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{h \rightarrow o} \frac{|f^{(k-1)}(a+h)(w) - f^{(k-1)}(a)(w) - L(h, w)|}{\|h\|} = 0.$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{h \rightarrow o} \frac{|g(a+h) - g(a) - L(h, w)|}{\|h\|} = 0.$$

Tudíž pro $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{g(a + te^{i_1}) - g(a)}{t} - L(e^{i_1}, w) \right| = 0,$$

a tedy

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_{i_1}}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a + te^{i_1}) - g(a)}{t} = L(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_k}).$$

■

9.3.22. Poznámky. (a) Z předchozí věty plyne jednoznačnost $f^k(a)$, a tedy zpětně i korektnost tohoto značení.

(b) Je-li f funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a $a \in \mathbb{R}^n$, pak $f^k(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f_j^k(a)$ pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$.

9.3.23. Věta (symetrie derivace). Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(a)$ existuje. Potom je $f^{(k)}(a)$ symetrické zobrazení, tj. je-li $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ permutace, pak

$$f^{(k)}(a)(u^1, \dots, u^k) = f^{(k)}(a)(u^{\pi(1)}, \dots, u^{\pi(k)})$$

pro každá $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. Necht $f = (f_1, \dots, f_m)$ a $j \in \{1, \dots, m\}$. Stačí dokázat tvrzení pro f_j .

Díky Větě 9.3.21 stačí dokázat, že pro $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ a permutaci $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ platí

$$\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_{\pi(k)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(a). \quad (9.22)$$

Uvedený vztah stačí dokázat pouze pro sousední transpozice. Necht tedy $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$ a

$$\pi(s) = \begin{cases} \ell + 1, & s = \ell, \\ \ell, & s = \ell + 1, \\ s & \text{jinak,} \end{cases} \quad s \in \{1, \dots, k\}.$$

Potom funkce

$$g(x) = \frac{\partial^{\ell-1} f_j}{\partial x_{i_{\ell-1}} \dots \partial x_{i_1}}(x)$$

splňuje

$$g(x) = \frac{\partial^{\ell-1} f_j}{\partial x_{i_{\pi(\ell-1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(x)$$

na okolí bodu a . Funkce f má derivaci $(\ell+1)$ -ního řádu v a . Z Věty 9.3.21 tedy plyne, že funkce

$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_{i_\ell}}(x), \quad x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_{i_{\ell+1}}}(x)$$

mají derivaci v a . Podle Věty 9.3.9 tedy platí

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{\ell+1}} \partial x_{i_\ell}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_\ell} \partial x_{i_{\ell+1}}}(a).$$

Odtud plyne (9.22). ■

9.3.24. Věta (postačující podmínka pro existenci derivace vyššího řádu). Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^k(G)$ a $a \in G$. Potom $f^{(k)}(a)$ existuje.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $m = 1$. Použijeme matematickou indukci podle k . Pro $k = 1$ tvrzení platí díky Větě 14.4.

Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a že tvrzení platí pro $k - 1$. Označme $A = \{1, \dots, n\}^{k-1}$. Potom A je konečná množina, označme $\#A$ počet jejích prvků. Položme

$$g_\alpha = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \quad \text{pro } \alpha = (i_1, \dots, i_{k-1}) \in A.$$

Potom pro každé $\alpha \in A$ je g_α třídy $\mathcal{C}^1(G)$, a tedy g_α má na G totální diferenciál. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky tomu, že A je konečná, nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall \alpha \in A \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta : |g_\alpha(a+h) - g_\alpha(a) - g'_\alpha(a)(h)| < \varepsilon \|h\|.$$

Položme

$$L(h, v^1, \dots, v^{k-1}) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}(a) h_i v_{\alpha_1}^1 \dots v_{\alpha_{k-1}}^{k-1} \quad \text{pro } h \in \mathbb{R}^n \text{ a } (v^1, \dots, v^{k-1}) \in (\mathbb{R}^n)^{k-1}.$$

Potom $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a

$$L(h, v^1, \dots, v^{k-1}) = \sum_{\alpha \in A} g'_\alpha(a)(h) v_{\alpha_1}^1 \dots v_{\alpha_{k-1}}^{k-1}.$$

Zvolme $u^1, \dots, u^{k-1} \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|u^j\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1$ pro každé $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Označme $w = (u^1, \dots, u^{k-1})$. Potom pro každé $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \delta$, platí podle indukčního předpokladu a Věty 9.3.21

$$\begin{aligned} & f^{(k-1)}(a+h)(w) - f^{(k-1)}(a)(w) - L(h, w) \\ &= \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(a+h) u_{\alpha_1}^1 \dots u_{\alpha_{k-1}}^{k-1} - \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(a) u_{\alpha_1}^1 \dots u_{\alpha_{k-1}}^{k-1} - \sum_{\alpha \in A} g'_\alpha(a)(h) u_{\alpha_1}^1 \dots u_{\alpha_{k-1}}^{k-1} \\ &= \sum_{\alpha \in A} (g_\alpha(a+h) - g_\alpha(a) - g'_\alpha(a)(h)) u_{\alpha_1}^1 \dots u_{\alpha_{k-1}}^{k-1}. \end{aligned}$$

Odtud a z definice normy $(k-1)$ -lineárního zobrazení vyplývá, že

$$\begin{aligned} \|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} &\leq \sum_{\alpha \in A} |g_\alpha(a+h) - g_\alpha(a) - g'_\alpha(a)(h)| \\ &< (\#A) \varepsilon \|h\|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

a tudíž $L = f^{(k)}(a)$.

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ nalezneme podle z již dokázaného zobrazení $L_j \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ splňující

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f_j^{(k-1)}(a+h) - f_j^{(k-1)}(a) - L_j(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Položme $L = (L_1, \dots, L_m)$. Potom $L \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

takže $L = f^{(k)}(a)$. ■

9.3.25. Poznámka. Necht $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom je $f''(a)$ bilineární zobrazení reprezentované maticí

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

ve smyslu

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : f''(a)(u, v) = u^T \mathbb{H} v.$$

Matice $\mathbb{H}$ je symetrická.

9.3.26. Definice. Necht f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom matici $\mathbb{H}$ nazýváme **Hessovou maticí**.

9.3.27. Definice. Necht $k, n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(a)$ existuje. Potom **Taylorovým polynomem k -tého řádu** funkce f v bodě a rozumíme polynom n proměnných

$$T_k^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a, \dots, x-a),$$

přičemž vektor $(x-a, \dots, x-a)$ má j složek.

9.3.28. Věta (Lagrangeův tvar zbytku). Necht $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(G)$ a $a, x \in G$. Potom existuje ξ ležící na úsečce spojující body a a x takové, že

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x-a, \dots, x-a)$$

(přičemž vektor $(x-a, \dots, x-a)$ má $k+1$ složek).

Důkaz. Díky konvexitě a otevřenosti G nalezneme interval (α, β) splňující $[0, 1] \subset (\alpha, \beta)$ a takový, že

$$a + t(x-a) \in G \quad \text{pro každé } t \in (\alpha, \beta).$$

Položme

$$\varphi(t) = f(a + t(x-a)) \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Zobrazení $t \mapsto a + t(x - a)$ je třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, a tedy podle Věty 9.3.8 je φ třídy $\mathcal{C}^k(\alpha, \beta)$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku pro funkci jedné proměnné (Věta 6.4) existuje $\eta \in (0, 1)$ takové, že

$$\varphi(1) - T_k^{\varphi,0}(1) = \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!},$$

tedy

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}. \quad (9.23)$$

Použitím řetízkového pravidla dostaneme pro každé $t \in (\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a + t(x - a))(x_{i_1} - a_{i_1}) = f'(a + t(x - a))(x - a), \\ \varphi''(t) &= \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(a + t(x - a))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) = f''(a + t(x - a))(x - a, x - a), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pro každé $j \in \{1, \dots, k+1\}$ a $t \in (\alpha, \beta)$ platí

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}(t) &= \sum_{i_j=1}^n \cdots \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j} \cdots \partial x_{i_1}}(a + t(x - a))(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_j} - a_{i_j}) \\ &= f^{(j)}(a + t(x - a))(x - a, \dots, x - a). \end{aligned}$$

Dosazením do (9.23) dostaneme podle definice Taylorova polynomu

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a + \eta(x - a))(x - a, \dots, x - a).$$

Položme $\xi = a + \eta(x - a)$. Potom ξ leží na úsečce spojující body a a x a splňuje požadované tvrzení. ■

9.3.29. Věta (Peanův tvar zbytku). Necht $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a f je třídy $\mathcal{C}^k$ na jistém okolí a . Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{\|x - a\|^k} = 0.$$

Důkaz. Pro $k = 0$ tvrzení triviálně platí. Předpokládejme, že $k \geq 1$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f \in \mathcal{C}^k(B(a, \delta))$. Zvolme $x \in B(a, \delta)$. Protože množina $B(a, \delta)$ je otevřená a konvexní, můžeme podle Věty 9.3.28 nalézt $\xi(x)$ ležící na úsečce spojující a a x takové, že

$$f(x) = T_{k-1}^{f,a}(x) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi(x))(x - a, \dots, x - a).$$

Potom platí

$$\begin{aligned} f(x) - T_k^{f,a}(x) &= \frac{1}{k!} \left(f^{(k)}(\xi(x)) - f^{(k)}(a) \right) (x - a, \dots, x - a) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) \right) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} &\left| f(x) - T_k^{f,a}(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) \right) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}) \right| \\ &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) \right| \|x - a\|^k. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ platí

$$0 \leq \frac{|f(x) - T_k^{f,a}(x)|}{\|x - a\|^k} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) \right|.$$

Všechny parciální derivace až do řádu k včetně jsou spojité v a , a tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) \right| = 0,$$

neboť $\|\xi(x) - a\| \leq \|x - a\|$. Odtud plyne tvrzení. ■

9.3.30. Poznámka. Symbol o můžeme zřejmým způsobem definovat i pro funkce více proměnných. Pak lze tvrzení předcházející věty psát ve tvaru

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + o(\|x - a\|^k), \quad x \rightarrow a.$$

9.4. Věty o implicitně zadaných funkcích

Před formulací hlavních výsledků této části připomeňme, že symbol $\exists!$ znamená „existuje právě jeden“ (vizte Definici 1.1.21).

9.4.1. Věta (o implicitně zadané funkci). Necht $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a necht platí:

- (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
- (b) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
- (c) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \text{kde } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a } x \in U.$$

Důkaz. Existence φ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$. Díky spojitosti funkce $\frac{\partial F}{\partial y}$ v bodě $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\xi_1 > 0$ taková, že

$$\forall [x, y] \in B(\tilde{x}, \delta_1) \times [\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1] : \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0.$$

Funkce $t \mapsto F(\tilde{x}, t)$ je rostoucí na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$. Máme proto

$$F(\tilde{x}, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \text{a} \quad F(\tilde{x}, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Díky spojitosti F nalezneme $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ takové, že

$$\forall x \in B(\tilde{x}, \delta_2) : \quad F(x, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \& \quad F(x, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Položme $U = B(\tilde{x}, \delta_2)$ a $V = (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$. Zvolme $x \in U$. Funkce $t \mapsto F(x, t)$ je na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$ rostoucí, spojitá a splňuje $F(x, \tilde{y} - \xi_1) < 0$ a $F(x, \tilde{y} + \xi_1) > 0$. To znamená, že existuje právě jedno $y \in (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$ takové, že $F(x, y) = 0$.

Spojitosť φ . Zvolme $x^* \in U$. Budeme dokazovat, že φ je spojitá v x^* . Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme

$$G^* = U \times ((\varphi(x^*) - \varepsilon, \varphi(x^*) + \varepsilon) \cap V)$$

a $F^* = F|_{G^*}$. Potom je G^* otevřená a platí

$$F^* \in \mathcal{C}^k(G^*), \quad F^*(x^*, \varphi(x^*)) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F^*}{\partial y}(x^*, \varphi(x^*)) > 0.$$

Podle již dokázaného existují okolí $U^* \subset \mathbb{R}^n$ bodu x^* a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\varphi(x^*)$ taková, že $U^* \times V^* \subset G^*$ a

$$\forall x \in U^* \exists! y \in V^* : F^*(x, y) = 0.$$

Odtud plyne

$$\varphi(U^*) \subset V^* \subset (\varphi(x^*) - \varepsilon, \varphi(x^*) + \varepsilon).$$

Tím je dokázána spojitost φ v bodě x^* .

Platí $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x^* \in U$. Nalezneme $\delta > 0$ a $\eta > 0$ taková, že $B(x^*, \delta) \subset U$, $\varphi(B(x^*, \delta)) \subset V$ a

$$B(x^*, \delta) \times \varphi(B(x^*, \delta)) \subset B([x^*, \varphi(x^*)], \eta) \subset G.$$

Zvolme $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. K němu nalezneme $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ležící na úsečce spojující body $[x^*, \varphi(x^*)]$ a $[x^* + te^i, \varphi(x^* + te^i)]$ takové, že

$$0 = F(x^* + te^i, \varphi(x^* + te^i)) - F(x^*, \varphi(x^*)) = F'(\xi(t))(te^i, \varphi(x^* + te^i) - \varphi(x^*)).$$

Tedy platí

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t)) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))(\varphi(x^* + te^i) - \varphi(x^*)).$$

Odtud vyplývá, že

$$\frac{\varphi(x^* + te^i) - \varphi(x^*)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))}.$$

Platí $\lim_{t \rightarrow 0} \xi(t) = [x^*, \varphi(x^*)]$, neboť

$$\|\xi(t) - [x^*, \varphi(x^*)]\| \leq |t| + |\varphi(x^* + te^i) - \varphi(x^*)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

Tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*, \varphi(x^*))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, \varphi(x^*))}. \quad (9.24)$$

Platí $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$. Pro $k = 1$ jsme tvrzení již dokázali. Předpokládejme, že platí pro nějaké $k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Zobrazení $x \mapsto [x, \varphi(x)]$ je tedy třídy $\mathcal{C}^{k-1}(U)$. Funkce $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}$ jsou třídy $\mathcal{C}^{k-1}(G)$, a tedy podle Věty 9.3.8 a (9.24) jsou také funkce $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ třídy $\mathcal{C}^{k-1}(U)$. Proto je φ třídy $\mathcal{C}^k(U)$. ■

9.4.2. Příklad. Uvažujme množinu

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) = 0\}.$$

Ukažte, že v jistém okolí bodu $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ lze množinu M popsat jako graf nějaké funkce φ proměnné x . Spočítejte též $\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Řešení. Položme ve Větě 9.4.1

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) \quad \text{a} \quad [\tilde{x}, \tilde{y}] = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}].$$

Pak

- (i) $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,
- (ii) $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (2(x^2 + y^2)2y + 4y)|_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = 4 \neq 0$.

Tedy dle Věty 9.4.1 existuje na nějakém okolí bodu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ funkce φ třídy C^∞ , která splňuje $F(x, \varphi(x)) = 0$. Dále platí

$$\begin{aligned} \varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2}) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})} \\ &= \left(-\frac{(2(x^2 + y^2)2y + 4y)}{2(x^2 + y^2)2x - 4x} \right) \Big|_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = 0. \end{aligned}$$

♣

9.4.3. Věta (o implicitně zadaných funkcích). Necht' $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F: G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a necht' platí:

- (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
- (b) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = o$,
- (c)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = o$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle m . Je-li $m = 1$, platí tvrzení podle Věty 9.4.1.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Dokažme ho pro $m + 1$. Necht' F a $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ splňují předpoklady věty, kde m je nahrazeno $(m + 1)$. Matice

$$A_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix}$$

je regulární dle předpokladu.

Ukážeme, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $A_F = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ označuje jednotkovou matici typu $M((m + 1) \times (m + 1))$. Uvažujme zobrazení $L: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $L(y) = (A_F)^{-1}y$. Toto zobrazení je lineární bijekce $\mathbb{R}^{m+1}$ na $\mathbb{R}^{m+1}$ a je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}^{m+1}$. Dále uvažujme zobrazení $T: G \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $T = L \circ F$. Zobrazení T má následující vlastnosti:

- $T \in \mathcal{C}^k(G)$,
- $\forall [x, y] \in G: T(x, y) = o \Leftrightarrow F(x, y) = o$,
- $A_T = A_F^{-1} \circ A_F = \mathbb{I}$.

První dvě vlastnosti jsou zřejmě splněny. Ověříme třetí vlastnost. Zobrazení $y \mapsto F(\tilde{x}, y)$ má derivaci v bodě $\tilde{y}$ reprezentovanou maticí A_F . Zobrazení $y \mapsto T(\tilde{x}, y) = L \circ F(\tilde{x}, y)$ má podle věty o derivaci složeného zobrazení (Věta 14.10) v bodě $\tilde{y}$ derivaci reprezentovanou maticí $(A_F)^{-1}A_F = \mathbb{I}$. Protože

$$F_{m+1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 \neq 0,$$

existuje dle Věty 9.4.1 okolí $U^* \subset \mathbb{R}^{n+m}$ bodu $[\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}_{m+1}$ takové, že

$$\forall [x, y_1, \dots, y_m] \in U^* \exists! y_{m+1} \in V^* : F_{m+1}(x, y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) = 0.$$

Označme tento bod symbolem $\psi(x, y_1, \dots, y_m)$. Pak $\psi \in \mathcal{C}^k(U^*)$. Definujme $H: U^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem

$$H_i(x, y_1, \dots, y_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_m, \psi(x, y_1, \dots, y_m)), \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Pak $H \in \mathcal{C}^k(U^*)$ podle Věty 9.3.8 a platí $H(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = o$. Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) &= \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) + \frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) \\ &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

neboť

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Můžeme tedy aplikovat indukční předpoklad na H v bodě $[\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$. Nalezneme okolí $S \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $T \subset \mathbb{R}^m$ bodu $[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ taková, že $S \times T \subset U^*$ a

$$\forall x \in S \exists! [y_1, \dots, y_m] \in T: H(x, y_1, \dots, y_m) = o$$

Označme $\varphi_i(x) = y_i, i \in \{1, \dots, m\}$, a $\varphi_{m+1}(x) = \psi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$. Potom $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1})$ je třídy $\mathcal{C}^k$ na S a pro každé $x \in S$ platí

$$\begin{aligned} F_i(x, \varphi(x)) &= F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x)) \\ &= F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \psi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))) \\ &= \begin{cases} H_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) = 0, & i \in \{1, \dots, m\}, \\ 0, & i = m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nalezneme okolí $V \subset T \times V^* \subset \mathbb{R}^{m+1}$ bodu $\tilde{y}$ a okolí $U \subset \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$. Jestliže $[x, y] \in U \times V$ splňuje $F(x, y) = o$, pak $x \in S$ a $y \in T \times V^*$, a tedy $[x, y_1, \dots, y_m] \in S \times T \subset U^*$. Potom $y_{m+1} = \psi(x, y_1, \dots, y_m)$, neboť $y_{m+1} \in V^*$. Dále $y_i = \varphi_i(x), i \in \{1, \dots, m\}$, takže $y_{m+1} = \varphi_{m+1}(x)$. Odtud plyne tvrzení. ■

9.4.4 (vzorec pro výpočet parciálních derivací). I v případě věty o implicitních funkcích je možné odvodit analogii vzorce (9.24), tj. explicitní vzorec pro hodnotu parciálních derivací vypočtených funkcí. Necht $n, m, p, G, \tilde{x}, \tilde{y}$ a F jsou jako ve znění Věty 9.4.3, podle které existuje okolí U bodu $\tilde{x}$ a okolí V bodu $\tilde{y}$ taková, že platí

$$\forall x \in U \exists! y \in V: F(x, y) = o.$$

Označme toto y jako $\varphi(x)$. Pak víme, že platí $\varphi \in C^p(U)$. Ukážeme, jak lze vypočítat parciální derivace složek funkce φ . Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ (číslo proměnné podle které budeme derivovat). Potom pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ má parciální derivace funkce $x \mapsto F_j(x, \varphi(x))$ podle proměnné x_i tvar

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x)$$

pro každé $x \in U$. Protože platí $F_j(x, \varphi(x)) = 0$ pro každé $x \in U$, musí být právě uvedená derivace rovna nule. Za x dosadíme $\tilde{x}$, potom $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$ a dostáváme tedy soustavu m rovnic

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

kde neznámými jsou hodnoty $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x})$, $k = 1, \dots, m$. Soustavu můžeme přepsat tedy jako

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) &= -\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_2}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) &= -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) &= -\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})). \end{aligned}$$

Hodnotu $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x})$ můžeme vypočítat pomocí Cramerova pravidla takto

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & -\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & -\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \end{vmatrix}}.$$

Matice ve výše uvedeném vzorci se liší pouze ve vyznačeném k -tém sloupci.

9.4.5. Příklad. Jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \exp(u/x) \cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ \exp(u/x) \sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $[x, y] \mapsto u(x, y)$, $[x, y] \mapsto v(x, y)$ třídy C^∞ . Spočítejte parciální derivace u a v v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Definujme $F: \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ jako $F = (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x, y, u, v) = \exp(u/x) \cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$F_2(x, y, u, v) = \exp(u/x) \sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Pak F je třídy C^∞ na $(0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $F(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) = [0, 0]$. Dále máme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \exp(u/x) \cos(v/y) & -\frac{1}{y} \exp(u/x) \cos(v/y) \\ \frac{1}{x} \exp(u/x) \sin(v/y) & \frac{1}{y} \exp(u/x) \sin(v/y) \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Díky Větě 9.4.3 tedy existují na nějakém okolí U bodu $[1, 1]$ funkce $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^∞ splňující

$$F_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) = F_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0.$$

Derivováním těchto vztahů podle x dostáváme

$$\exp(u/x) \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2} \cos(v/y) + \exp(u/x) (-\sin(v/y)) \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$\exp(u/x) \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2} \sin(v/y) + \exp(u/x) \cos(v/y) \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Dosazením $x = y = 1, u(1, 1) = 0$ a $v(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ dostaneme soustavu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = 0,$$

jejímž řešením je

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

Výpočet parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 1)$ a $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 1)$ by proběhl obdobně. ♣

9.5. Lokální extrémy funkce více proměnných

9.5.1. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$, $a \in M$ a f je funkce z P do $\mathbb{R}$ splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **maxima (minima) na M** , jestliže platí

$$\forall x \in M : f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **lokálního maxima (lokálního minima) na M** , jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \cap M : f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **ostrého lokálního maxima (ostrého lokálního minima) na M** , jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \cap M) \setminus \{a\} : f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

9.5.2. Poznámka. Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + th \in G$ pro $|t| < \delta$ a definujeme funkci $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a + th)$. Potom $g'(0) = f'(a)(h)$ a $g''(0) = f''(a)(h, h)$.

9.5.3. Věta (nutná podmínka existence lokálního extrému). Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Necht funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Důkaz. Položme $g(t) = f(a + te^j)$. Pak má g v bodě 0 lokální extrém, a tedy $g'(0)$ buď neexistuje nebo je rovna 0. Odtud plyne tvrzení. ■

9.5.4. Věta (elipticita pozitivně definitní kvadratické formy). Necht $n \in \mathbb{N}$ a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n : Q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Důkaz. Jest

$$Q(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

pro vhodná $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy je zobrazení Q spojitě na $\mathbb{R}^n$. Označme

$$S = \{h \in \mathbb{R}^n; \|h\| = 1\}$$

a

$$\varepsilon = \inf\{Q(h); h \in S\}.$$

Množina S je omezená a uzavřená, a tedy je podle Věty 8.6.9 kompaktní. Podle Věty 8.6.15 tedy existuje $h_0 \in S$ takové, že $Q(h_0) = \text{arepsilonpsilon}$. Odtud a z pozitivní definitnosti Q vyplývá, že $\varepsilon > 0$. Tvrzení věty zřejmě platí pro $h = o$. Zvolme $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$. Potom

$$Q(h) = Q\left(\|h\| \frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

■

9.5.5. Věta (podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému). Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $\nabla f(a) = 0$. Potom platí:

- (a) je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ pozitivně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního minima;
- (b) je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ negativně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního maxima;
- (c) je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ indefinitní, pak funkce f nenabývá v bodě a lokálního extrému.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $h \mapsto f''(a)(h, h)$ je pozitivně definitní. Podle Věty 9.5.4 nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall h \in \mathbb{R}^n: f''(a)(h, h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Označme

$$\omega(x) = \frac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{\|x - a\|^2}, \quad x \in G \setminus \{a\}.$$

Podle Věty 9.3.29 platí $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta): \omega(x) > -\frac{\varepsilon}{4}.$$

Potom pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{1}{2}f''(a)(x - a, x - a) &= f(x) - f(a) - \frac{1}{2}f''(a)(x - a, x - a) \\ &> -\frac{\varepsilon}{4}\|x - a\|^2. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí

$$f(x) - f(a) > \frac{1}{2}f''(a)(x - a, x - a) - \frac{1}{4}\varepsilon\|x - a\|^2 \geq \frac{1}{4}\varepsilon\|x - a\|^2 > 0.$$

Tedy f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního minima.

Obdobně lze dokázat tvrzení (b).

(c) Díky tomu, že kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ je indefinitní, nalezneme $h^1, h^2 \in \mathbb{R}^n$ taková, že

$$f''(a)(h^1, h^1) > 0 \quad \text{a} \quad f''(a)(h^2, h^2) < 0.$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (-\delta, \delta)$ platí $a + th^1 \in G$ a $a + th^2 \in G$. Pro $t \in (-\delta, \delta)$ položme $g_1(t) = f(a + th^1)$ a $g_2(t) = f(a + th^2)$. Potom

$$g_1'(0) = f'(a)(h^1) = 0, \quad g_1''(0) = f''(a)(h^1, h^1) > 0.$$

Tedy g_1 má v 0 ostré lokální minimum. Obdobně lze dokázat, že g_2 má v 0 ostré lokální maximum. Odtud plyne, že f nemá v a lokální extrém. ■

9.5.6. Poznámka. Je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ semidefinitní, pak pouze na základě této informace nelze rozhodnout, zda má f v a extrém, případně jakého typu, jak ilustrují příklady $f(x, y) = \pm x^4 \pm y^4$.

9.5.7. Příklad. Nalezněte lokální extrémy funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y - y^2.$$

Řešení. Z rovnic

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2x - 2y$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 2x - 2y$$

dostáváme, že $x = y$. Tedy máme rovnici

$$4x^3 - 4x = 0.$$

Body splňující nutnou podmínku extrému jsou tedy $[-1, -1]$, $[0, 0]$, $[1, 1]$. Protože

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 2 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 2,$$

máme

$$f''([1, 1]) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, f''([0, 0]) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, f''([-1, -1]) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že v bodech $[1, 1]$ a $[-1, -1]$ je druhá derivace f pozitivně definitní, má v těchto bodech f lokální minimum. V bodě $[0, 0]$ lze pomocí vektorů $(1, 1)$ a $(1, -1)$ odvodit indefinitnost $f''(0, 0)$. Tedy f nemá extrém v $[0, 0]$. ♣

9.5.8. Věta (Lagrangeova věta o multiplikátorech). Necht $m, n \in \mathbb{R}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f, g_1, \dots, g_m: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,

$$M = \{z \in G; g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

a bod $\tilde{z}$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- (a) vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ jsou lineárně závislé;
- (b) existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ splňující

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{z}) = 0.$$

Důkaz. Předpokládejme, že výrok (a) neplatí. Označme $s = n - m$ a $g = (g_1, \dots, g_m)$. Pišme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m$, přičemž proměnné prostoru $\mathbb{R}^s$ značíme x a proměnné prostoru $\mathbb{R}^m$ značíme y . Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\tilde{z}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\tilde{z}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\tilde{z}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\tilde{z}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

a tedy dle Věty 9.4.3 existují okolí $U \subset \mathbb{R}^s$ bodu $\tilde{x} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_s]$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y} = [\tilde{z}_{s+1}, \dots, \tilde{z}_n]$ taková, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ (označme jej $\varphi(x)$) splňující

$$g(x, \varphi(x)) = 0.$$

Definujme funkci $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\psi(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Protože $\varphi \in C^1(U)$, platí $\psi \in C^1(U)$. Funkce ψ má v bodě $\tilde{x}$ zřejmě lokální extrém. Podle Věty 9.5.3 tedy platí $\nabla \psi(\tilde{x}) = 0$. Zvolme $j \in \{1, \dots, s\}$. Potom

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i}(\tilde{z}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}). \quad (9.25)$$

Funkce $x \mapsto g(x, \varphi(x))$ je konstantní na U , a tedy

$$\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\tilde{z}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) = 0, \quad l \in \{1, \dots, m\}, \quad j \in \{1, \dots, s\}. \quad (9.26)$$

Označme

$$u^j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\tilde{x})) \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

a

$$H = \text{Lin}[u^1, \dots, u^s].$$

Zřejmě platí $\dim H = s$. Tedy $\dim H^\perp = m$. Podle (9.26) máme

$$\nabla g_l(\tilde{z}) \in H^\perp, \quad l \in \{1, \dots, m\},$$

takže vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ tvoří bázi $H^\perp$. Z (9.25) vyplývá, že $\nabla f(\tilde{z}) \in H^\perp$. Odtud plyne, že $\nabla f(\tilde{z})$ je lineární kombinací vektorů $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$, takže platí výrok (b). ■

9.6. Regulární zobrazení

9.6.1. Definice. Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ a f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je **difeomorfismus** na G , jestliže je prosté na G , $f(G)$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(G))$.

9.6.2. Věta (o lokálním difeomorfismu). Necht $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na jistém okolí V bodu a . Jestliže $J_f(a) \neq 0$, pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu a takové, že $f|_U$ je difeomorfismus na U .

Důkaz. Položme $G = \mathbb{R}^n \times V$, $b = f(a)$ a definujme funkci $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$F(y, x) = f(x) - y.$$

Potom $F \in \mathcal{C}^1(G)$, $F(b, a) = 0$ a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(b, a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(b, a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(b, a) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(b, a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podle Věty 9.4.3 existují okolí $U_1 \subset V$ bodu a a okolí $W \subset \mathbb{R}^n$ bodu b taková, že pro každé $y \in W$ existuje právě jedno $x \in U_1$ (označme $x = \varphi(y)$) takové, že $F(y, x) = o$. Navíc platí $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a

$$o = F(y, \varphi(y)) = f(\varphi(y)) - y, \quad y \in W.$$

Tedy

$$f(\varphi(y)) = y \quad \text{pro každé } y \in W.$$

Zobrazení f je tudíž prosté na množině $U_1 \cap f^{-1}(W)$. Položme $U = U_1 \cap f^{-1}(W)$. Pak U je otevřená množina, $a \in U \subset V$ a $(f|_U)^{-1} = \varphi \in \mathcal{C}^1(W)$. ■

9.6.3. Definice. Necht $n \in \mathbb{N}$, a $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je **regulární**, jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a pro každé $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

9.6.4. Věta (vztah difeomorfismu a regulárního zobrazení). Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pak f je difeomorfismus na G právě tehdy, když je regulární a prosté.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že f je na G difeomorfismus. Potom f je zřejmě prosté a třídy $\mathcal{C}^1$ na G . Pro $a \in G$ platí

$$\text{Id}(a) = \text{Id}'(a) = (f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(f(a)) \circ f'(a),$$

a proto je $f'(a)$ regulární v každém bodě $a \in G$. Tedy je jacobíán $f'(a)$ nenulový v každém bodě $a \in G$.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že f regulární a prosté na G . Potom $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Zvolme $y \in f(G)$. K němu nalezneme $x \in G$ splňující $f(x) = y$. Podle Věty 9.6.2 existuje otevřená množina $U \subset G$ obsahující x taková, že $f|_U$ je difeomorfismus. Tedy $f(U)$ je otevřená a $y \in f(U) \subset f(G)$. Tudíž je $f(G)$ otevřená. Navíc je $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(U))$. Protože y bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(G))$. ■

9.7. Teoretické příklady

9.7.1. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

a

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}y}{e^{-\frac{2}{x^2}}+y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

- (a) Funkce f je spojitá v počátku vzhledem k ose x i y , ale není v počátku spojitá.
 (b) Funkce g je spojitá v počátku vzhledem ke každé přímce počátkem procházející, ale není v počátku spojitá.
 (c) Funkce h je spojitá v počátku vzhledem ke každé křivce tvaru $y = c|x|^d$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in (0, \infty)$, ale h není spojitá v počátku.
 (d) Funkce f , g , i h mají v počátku obě parciální derivace.

Řešení. (a) Položme

$$\varphi(x) = f(x, 0), \quad x \in \mathbb{R},$$

tj. $\varphi(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Zjevně existuje $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ a rovná se 0. Obdobně odvodíme, že $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$. Blížíme-li se však k počátku po přímce $y = x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ tedy neexistuje.

(b) Zjevně platí, že

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(0, y) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0).$$

Pro přímku tvaru $y = cx$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, cx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^2 x^3}{x^4 + c^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^2 x}{x^2 + c^2} = 0.$$

Ale

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ tedy neexistuje.

(c) Zřejmě máme $\lim_{y \rightarrow 0} h(0, y) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} h(x, 0)$. Necht' $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $d \in (0, \infty)$. Pak pro křivku $y = c|x|^d$ dle Příkladu ?? platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, c|x|^d) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c e^{-\frac{1}{x^2}} |x|^d}{e^{-\frac{2}{x^2}} + c^2 |x|^{2d}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c e^{-\frac{1}{x^2}} |x|^{-d}}{e^{-\frac{2}{x^2}} |x|^{-2d} + c^2} = 0. \end{aligned}$$

Funkce h však není spojitá v počátku, neboť vzhledem ke křivce $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, e^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{-\frac{2}{x^2}} + e^{-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ tedy neexistuje.

(d) Tvrzení je zřejmé z faktu, že všechny tři funkce jsou nulové na osách x a y . ♣

9.7.2. Příklad. Necht $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ a f je reálná funkce definována $\mathbb{R}^2 \setminus [a, b]$ mající vlastní limitu v $[a, b]$. Necht pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ a pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. Pak

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y).$$

Řešení. Označme pro $x \in \mathbb{R}$ funkci $\varphi_x(y) = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{b\}$, a pro $y \in \mathbb{R}$ necht $\psi_y(x) = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Dle předpokladu existují pro $x, y \in \mathbb{R}$ limity $\lim_{y \rightarrow b} \varphi_x(y)$ a $\lim_{x \rightarrow a} \psi_y(x)$. Označme je symboly $\varphi_x(b)$ a $\psi_y(a)$.

Necht $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Najdeme $r \in (0, \infty)$ takové, že $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ pro $(x, y) \in B((a, b), r) \setminus \{(a, b)\}$. Vezměme $\delta \in (0, \infty)$ takové, že $(a - \delta, a + \delta) \times (b - \delta, b + \delta) \subset B((a, b), r)$. Necht $x \in P^\delta(a)$ je pevné. Najdeme $r_x \in (0, \infty)$ takové, že $B((x, b), r_x) \subset B((a, b), r)$. Pak pro $y \in \mathbb{R}$ splňující $(x, y) \in B((x, b), r_x)$ platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Tedy pro hodnotu $\varphi_x(b)$ máme odhad

$$L - \varepsilon \leq \varphi_x(b) \leq L + \varepsilon.$$

Tedy pro $x \in P^\delta(a)$ platí

$$|\varphi_x(b) - L| \leq \varepsilon,$$

tj.

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \varphi_x(b) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y).$$

Obdobně odvodíme, že $L = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. ♣

9.7.3. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{y}) + y \sin(\frac{1}{x}), & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} + y \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

a

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

- (a) Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ existuje, ale limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ neexistují.
- (b) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = 0$ existuje, ale limity $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ neexistují.
- (c) Limita $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) = 0$ existuje, ale limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y)$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ neexistují.

Řešení. (a) Jelikož

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y|, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

máme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Na druhou stranu však pro x, y nenulové limity $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ neexistují.

(b) Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} g(0, y).$$

Na druhou stranu však platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ proto neexistuje.

Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ však existuje limita

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Tedy $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = 0$.

Zřejmě však pro žádné $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ neexistuje $\lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$.

(c) Důkaz tvrzení je analogický důkazu tvrzení (b). ♣

9.7.4. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} y + x \sin\left(\frac{1}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

a

$$h(x, y) = \begin{cases} x + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

- (a) Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existují a rovnají se.
- (b) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ existují a rovnají se.
- (c) Limita $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y)$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ existují a rovnají se.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z Příkladu 9.7.1(a).

Tvrzení (b) a (c) se dokáží obdobně jako v Příkladu 9.7.3. ♣

9.7.5. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

- (a) Limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existují a nerovnájí se. Navíc neexistuje $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
 (b) Limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$ existují a rovnají se, ale $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ neexistuje.

Řešení. (a) Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ neexistuje dle Příkladu 9.7.2.

(b) Zřejmě platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y),$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ tedy neexistuje dle Heineovy věty pro metrické prostory (Věta 8.4.11) a Příkladu 9.7.2. ♣

9.7.6. Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f existují $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, ale nerovnájí se.

Řešení. Zřejmě $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Spočtěme dále pro body (x, y) mimo počátek derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= xy \frac{-4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1. \end{aligned}$$

♣

9.7.7. Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ukažte, že f je má ostré lokální minimum v počátku vzhledem ke každé přímce procházející počátkem, ale nemá v počátku lokální minimum.

Řešení. Pro přímku $x = 0$ platí $f(0, y) = y^2$, což je funkce mající v počátku ostré minimum. Pro přímku $y = 0$ platí $f(x, 0) = 3x^4$, což je opět funkce mající v počátku ostré minimum. Je-li přímka $y = cx$ pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dána, platí

$$g(x) = f(x, cx) = (cx - x^2)(cx - x^3) = c^2x^2 - 4cx^3 + 3x^4.$$

Protože $g'(0) = 0$ a $g''(0) = 2c^2 > 0$, má funkce g v počátku ostré lokální minimum.

Funkce f však nemá v počátku lokální minimum, neboť pro křivku $y = 2x^2$ platí

$$g(x) = f(x, 2x^2) = -x^2,$$

tj. g má v počátku ostré maximum. ♣

9.7.8. parciální diferenciál

9.8. Početní příklady k funkcím více proměnných

9.8.1. Příklad. U následujících množin $A \subset \mathbb{R}$ určete vnitřek, uzávěr a hranici:

$$A = \mathbb{N}, \quad A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Řešení. (a) Pokud $A = \mathbb{N}$, pak $\text{Int } A = \emptyset$. Zjevně totiž dle Věty 1.6.32 vidíme, že žádný interval v $\mathbb{R}$ není obsažen v A . Dále si uvědomíme, že A je uzavřená. Vezmeme totiž libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ bodů v A konvergující k nějakému $x \in \mathbb{R}$. Jelikož je $\{x_n\}$ cauchyovská a vzdálenost libovolných dvou různých prvků A je alespoň 1, musí být $\{x_n\}$ od jistého indexu konstantní. Tedy zřejmě $x \in A$. To podle definice znamená, že A je uzavřená. Konečně $\partial A = A$, neboť

$$\partial A \subset \partial A \cup A = \overline{A} = A$$

a obrácená inkluze $A \subset \partial A$ plyne z faktu $\text{Int } A = \emptyset$.

(b) Necht $A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$. Stejně jako výše odvodíme z Věty 1.6.32, že $\text{Int } A = \emptyset$. Dále platí $\partial A = \{0\} \cup A$. Vskutku, posloupnost $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ konverguje k 0 a je obsažena v A a $0 \notin A$, a proto $0 \in \partial A$. Na druhou stranu máme z faktu $\text{Int } A = \emptyset$, že $A \subset \partial A$. Proto $\{0\} \cup A \subset \partial A$. Pro důkaz druhé inkluze uvažujme bod $x \notin \{0\} \cup A$. Pokud $x < 0$, pak interval $B(x, \frac{|x|}{2})$ neprotíná A , a tedy $x \notin \partial A$. Pokud $x > 0$, vezmeme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ splňující $\frac{1}{n_0} < x - \delta < x$. Pak interval $(x - \delta, x + \delta)$ protíná A v konečné množině, a tedy existuje $\eta \in (0, \delta)$ takové, že $(x - \eta, x + \eta) \cap A = \emptyset$. Proto $x \notin \partial A$. Tím je druhá inkluze ukázána. Uzávěr A je tedy roven $\overline{A} = A \cup \partial A = \{0\} \cup A$. ♣

9.8.2. Příklad. U následujících množin $A \subset \mathbb{R}^2$ určete vnitřek, uzávěr a hranici:

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \leq 0\}, \quad A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\},$$

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}.$$

Řešení. (a) V prvním případě platí

$$\text{Int } A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}.$$

Vskutku, označme $G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}$. Pak pro kanonické projekce $\pi_x, \pi_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$G = \pi_x^{-1}((0, \infty)) \cap \pi_y^{-1}((-\infty, 0)),$$

a tedy je díky Příkladu 8.4.3 a Větě 8.4.6 množina G otevřená. Jelikož $G \subset A$, dle Věty 8.3.15 plyne $\text{Int } A \supset G$.

Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $a = [x, y] \in \text{Int } A \setminus G \subset A \setminus G$. Pak $x > 0$ a $y = 0$. Posloupnost bodů $\{[x, \frac{1}{n}]\}$ pak neleží v A a konverguje k a , tedy $a \notin \text{Int } A$, což je spor. Proto $\text{Int } A = G$.

Dále máme

$$\overline{A} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \leq 0\}.$$

Vskutku, označme $F = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \leq 0\}$. Pak jako výš odvodíme, že F je uzavřená, a jelikož obsahuje A , platí $\overline{A} \subset F$ (vizte Větu 8.3.28(g)). Necht' nyní $a \in F$ je dáno. Pak body $[x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v A konvergují k a . Tedy $a \in \overline{A}$.

Konečně určíme ∂A . Pokud $a = [x, y] \in \partial A$, pak $a \in \overline{A} \setminus \text{Int } A = F \setminus G$, a tedy $x \geq 0$, $y \leq 0$ a alespoň jedno z čísel x, y je nulové. Obráceně, necht' $a = [x, y]$, kde $x \geq 0$, $y \leq 0$ a $xy = 0$. Necht' například $x = 0$. Pak body $[\frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v A konvergují k a . Dále body $[-\frac{1}{n}, y]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v doplňku A konvergují k a . Tedy $a \in \partial A$. Podobně se ověří, že $a \in \partial A$ v případě $y = 0$. Tedy

$$\partial A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \leq 0, xy = 0\}.$$

(b) Necht'

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\}.$$

Jelikož je funkce $f: [x, y] \mapsto x^2 + e^y$ spojitá, je množina

$$A = f^{-1}((17, \infty))$$

otevřená (vizte Větu 8.4.6). Proto $\text{Int } A = A$.

Označme

$$F = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y \geq 17\}.$$

Pak $\overline{A} = F$. Vskutku, množina F je uzavřená (to opět plyne z Věty 8.4.6), obsahuje A , a tedy $\overline{A} \subset F$. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme $a = [x, y] \in F$. Pokud $a \in A$, je zjevně $a \in \overline{A}$. Necht' tedy $a \in F \setminus A$, tj. $x^2 + e^y = 17$. Pak body $[x, y + \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, splňují

$$17 = x^2 + e^y < x^2 + e^{y+\frac{1}{n}},$$

tj. leží v A . Jelikož tyto body konvergují k a , leží a v $\overline{A}$.

Hranice A je pak rovna množině

$$H = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y = 17\}.$$

Vskutku,

$$\partial A \subset \overline{A} \setminus \text{Int } A = F \setminus A = H.$$

Na druhou stranu, je-li $a = [x, y] \in H$ dáno, dle předchozího již víme, že $a \in \overline{A}$. Jelikož $a \notin A$, je i v $\overline{\mathbb{R}^2} \setminus A$. Tedy $a \in \partial A$ a $H = \partial A$.

(c) Necht

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}.$$

Postupem analogickým k přechodnému odvodíme, že A je uzavřená. Dokážeme, že $\partial A = A$. Vskutku, je-li $[x, y] \in A$ dáno, body $[x, y + \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, splňují

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{n}\right)^2 + 2x\left(y + \frac{1}{n}\right) = 5 + \frac{1}{n}\left(2x + 2y + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy všechny až nejvýše na jeden leží mimo množinu A . Jelikož konvergují k a , je $a \in \partial A$.

Na závěr si uvědomme, že vztah $\overline{A} = A = \partial A$ implikuje $\text{Int } A = \emptyset$. ♣

9.8.3. Příklad. U množiny

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y > 0, z \geq 0, x + y = 2\}$$

určete vnitřek, uzávěr a hranici.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že $\text{Int } A = \emptyset$. Vskutku, pokud $a = [x, y, z] \in A$, pak body $[x + \frac{1}{n}, y, z]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v doplňku A a konvergují k a . Tedy $a \notin \text{Int } A$ a $a \in \partial A$. Dále označme

$$F = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 2\}.$$

Pak platí $\partial A = \overline{A} = F$. Vskutku, F je uzavřená množina, neboť obsahuje A a pro spojitou funkci $f: [x, y, z] \mapsto x + y$ platí

$$F = \pi_x^{-1}([0, \infty)) \cap \pi_y^{-1}([0, \infty)) \cap \pi_z^{-1}([0, \infty)) \cap f^{-1}(\{2\}).$$

Tedy

$$\partial A \subset \overline{A} \subset F.$$

Mějme $a = [x, y, z] \in F$ dáno. Pomocí bodů $[x + \frac{1}{n}, y, z]$, $n \in \mathbb{N}$, jako výše odvodíme, že $a \in \overline{\mathbb{R}^3} \setminus A$. Pokud $a \in A$, je dle přechodného prvkem ∂A . Pokud $a \in F \setminus A$, pak $z \geq 0$, $x \geq 0$, $y = 0$ a $x + y = 2$, tj. $x = 2$. Body $[x - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, z]$, $n \in \mathbb{N}$, pak leží v A a konvergují k a . Proto $a \in \overline{A}$. Jelikož $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^3} \setminus A$, máme $F \subset \partial A$. ♣

9.8.4. Příklad. Necht $[a, b] \in \mathbb{R}^2$. Spočítejte limitu

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [a, b]} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Funkce $f: [x, y] \mapsto x$ a $g: [x, y] \mapsto y$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$ dle Příkladu 8.4.3. Tedy dle Věty 8.4.17 máme

$$\begin{aligned}\lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} \sqrt{x^2 + y^2} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} \sqrt{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} f(x, y)\right)^2 + \left(\lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} g(x, y)\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

♣

9.8.5. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Položíme-li ve funkci $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $y = 0$, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Obdobně pro $x = 0$ máme

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Dle Heineovy věty 8.4.11 tedy limita neexistuje.

♣

9.8.6. Příklad. Spočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y)$, kde

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}.$$

Řešení. Jelikož

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} |y| = 0$$

a platí

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| \leq |y|,$$

dostáváme $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = 0$.

♣

9.8.7. Příklad. Spočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y)$, kde

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}.$$

Řešení. Povšimneme si, že k bodu $[0, 0]$ se můžeme blížit po ose y zprava a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 1.$$

K bodu $[0, 0]$ se však můžeme blížit i po přímce $y = x$ a pak dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x + x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \sqrt{2}.$$

Podle Věty 8.4.11 tedy limita neexistuje. ♣

9.8.8. Příklad. Spočtěte $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y)$, kde

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}.$$

Řešení. Zadanou funkci můžeme odhadnout

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Jelikož $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, je zadaná limita rovna 0. ♣

9.8.9. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{\sqrt{x^6 + y^6}}}.$$

Řešení. Nejprve si rozmyslíme, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $[x, y] \in P(o, \delta)$ platí odhad

$$\log(1 + x^2 y^2) \leq 2x^2 y^2. \quad (9.27)$$

Vskutku, díky platnosti vztahu $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ lze nalézt $\eta > 0$ takové, že $\log(1 + t) \leq 2t$ pro libovolné $t \in P(0, \eta)$. Jelikož $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} x^2 y^2 = 0$, existuje $\delta > 0$ splňující $x^2 y^2 \in B(0, \eta)$ kdykoliv $[x, y] \in B(o, \delta)$. To je však již hledané δ , neboť pokud $[x, y] \in P(o, \delta)$ splňuje $xy = 0$, pak nerovnost (9.27) zjevně platí. Pokud $xy \neq 0$, je $x^2 y^2 \in P(0, \eta)$, a tedy (9.27) platí díky volbě η .

Nyní můžeme pro $[x, y] \in P(o, \delta)$ odhadnout

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\sqrt{x^6 + y^6}} \log(1 + x^2 y^2) \leq \frac{2x^2 y^2}{\sqrt{x^6 + y^6}} \leq \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}} \\ &\leq \frac{x^4}{\sqrt{x^6}} + \frac{y^4}{\sqrt{y^6}} \leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

Jelikož limita posledního výrazu v bodě $[0, 0]$ je 0, dostáváme z Věty 8.4.18 rovnost $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = e^0 = 1$.

(Poznamenejme, že výpočet je možno zjednodušit použitím odhadu $\log(1 + t) \leq t$, $t \in (0, \infty)$.) ♣

9.8.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Pišme $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \varphi(t)$, kde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = 0$. Pak

$$\frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2}.$$

Jelikož

$$0 \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x^2} \right|$$

a pravá strana konverguje k 0 pro x jdoucí k 0, máme $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} = 0$.
Obdobně odvodíme nulovost limity druhého členu.

Celkem tedy vyjde

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

♣

9.8.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}}.$$

Řešení. Nejprve si všimneme rovnosti

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} \right| = \frac{|x| y^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} = \sqrt{\frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6}}.$$

Dále platí

$$\left| \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6} \right| = \frac{x^2 |y|^3}{x^4 + y^6} \cdot |y| = \frac{x^2 |y|^3}{(x^2)^2 + (|y|^3)^2} \cdot |y| \leq |y|,$$

nebot

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1, \quad a, b \geq 0, [a, b] \neq [0, 0].$$

Tedy

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} = 0.$$

♣

9.8.12. Příklad. Rozhodněte, zda lze funkci $\frac{\sin xy}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Uvažujme spojitou funkci $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou jako

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Pak je funkce

$$f(x, y) = g(xy) \cdot y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

spojitá dle Věty 8.4.17 a pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, platí

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = \frac{\sin xy}{x}, & y \neq 0, \\ 0 = \frac{\sin xy}{x}, & y = 0. \end{cases}$$

Funkce f je tak spojitě rozšíření zadaná funkce na $\mathbb{R}^2$. ♣

9.8.13. Příklad. Spočítejte parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 \sin y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

v každém bodě roviny $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Necht $a = [a, b]$ je daný bod v $\mathbb{R}^2$. Spočteme nejprve $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Podle 9.1.9 platí pro funkci

$$g_1(t) = f(t, b) = t^2 \sin b, \quad t \in \mathbb{R},$$

vztah $g'_1(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = g'_1(a) = [t \mapsto t^2 \sin b]'_{t=a} = [t \mapsto 2t \sin b]_{t=a} = 2a \sin b.$$

Analogicky máme pro funkci

$$g_2(t) = f(a, t) = a^2 \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

vztah $g'_2(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = g'_2(b) = [t \mapsto a^2 \sin t]'_{t=b} = [t \mapsto a^2 \cos t]_{t=b} = a^2 \cos b.$$

♣

9.8.14. Příklad. Spočítejte parciální derivace funkce

$$f(x, y, z) = x^{y^z}, \quad [x, y, z] \in (0, \infty)^3,$$

a najděte rovnici tečné nadroviny ke grafu f v bodě $[2, 1, 2]$.

Řešení. Funkci f vyjádříme jako

$$f(x, y, z) = e^{y^z \log x} = e^{e^{z \log y} \log x}.$$

Tedy pro $[x, y, z] \in (0, \infty)^3$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}([x, y, z]) &= e^{e^{z \log y} \log x} \cdot e^{z \log y} \cdot \frac{1}{x} = y^z \cdot x^{y^z-1} \\ \frac{\partial f}{\partial y}([x, y, z]) &= e^{e^{z \log y} \log x} \cdot \log x \cdot e^{z \log y} \cdot \frac{z}{y} = x^{y^z} y^z \frac{z \log x}{y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}([x, y, z]) &= e^{e^{z \log y} \log x} \cdot \log x \cdot e^{z \log y} \cdot \log y = x^{y^z} y^z \log x \log y. \end{aligned}$$

Parciální derivace jsou zjevně spojité na $(0, \infty)^3$, a tedy v každém bodě definičního oboru existuje derivace (Věta 9.1.21). Z právě provedených výpočtů plyne, že

$$\nabla f([2, 1, 2]) = [1, 4 \log 2, 0].$$

Dle 9.1.15 je tedy rovnice tečné nadroviny rovna

$$\begin{aligned} t(x, y, z) &= 2 + 1(x - 2) + 4 \log 2(y - 1) + 0(z - 2) \\ &= 2 + (x - 2) + 4 \log 2(y - 1), \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

♣

9.8.15. Příklad. Zjistěte, ve kterých bodech existují parciální derivace a derivace funkce

$$f(x, y) = |x| |y|, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. Pro body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ mimo souřadnicové osy platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x, y]) = (\operatorname{sign} x) |y|, \quad \frac{\partial f}{\partial y}([x, y]) = |x| \operatorname{sign} y.$$

Tyto funkce jsou spojité v každém bodě mimo souřadnicové osy, a tedy v nich existuje derivace. Dle Věty 9.1.16 platí

$$\begin{aligned} f'(x, y): (h_1, h_2) &\mapsto \langle \nabla f(x, y), h \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}([x, y])h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}([x, y])h_2 \\ &= ((\operatorname{sign} x)y |y|)h_1 + (|x| \operatorname{sign} y)h_2, \quad ([h_1, h_2] \in \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na body ležící na ose x , tj. na body tvaru $[x, 0]$, kde $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x, 0]) = [t \mapsto f(t, 0)]'_{t=x} = [t \mapsto 0]'_{t=x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Naproti tomu pro $x \neq 0$ parciální derivace podle y v bodě $[x, 0]$ neexistuje, neboť pro funkci

$$g(t) = f(x, t) = |x| |t|, \quad t \in \mathbb{R},$$

platí

$$g'_+(0) = |x|, \quad g'_-(0) = -|x|,$$

což implikuje neexistenci

$$\frac{\partial f}{\partial y}([x, 0]) = g'(0).$$

V bodech $[x, 0]$, $x \neq 0$, tak neexistuje ani derivace.

Pro body tvaru $[0, y]$, $y \in \mathbb{R}$, podobně jako výše odvodíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}([0, y]) = 0$ a že $\frac{\partial f}{\partial x}([0, y])$ neexistuje, pokud $y \neq 0$. To opět implikuje neexistenci derivace v bodech $[0, y]$, $y \neq 0$.

Zbývá nám vyšetřit bod $[0, 0]$. Z předchozího víme, že parciální derivace f v $[0, 0]$ jsou nulové. Dle Věty 9.1.16 je tak jediným kandidátem na derivaci nulové zobrazení. Dle definice tak derivace existuje právě tehdy, když

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{f([0, 0] + [x, y]) - f([0, 0]) - \langle [0, 0], [x, y] \rangle}{\|[x, y]\|} = 0.$$

Tedy zkoumáme výraz

$$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|.$$

Ten má však dle Příkladu 9.8.8 limitu rovnou nule. Tedy derivace f v bodě $[0, 0]$ je rovne $[0, 0]$. ♣

9.8.16. Příklad. Zjistěte, ve kterých bodech existují parciální derivace a derivace funkce

$$f(x, y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. V bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ mimo přímku $y = -x$ máme spojitě parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x, y]) = \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5 + y^5)^4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}([x, y]) = \frac{y^4}{\sqrt[5]{(x^5 + y^5)^4}},$$

a tedy v těchto bodech existuje derivace a je roven $\nabla f([x, y])$.

Uvažujme nyní bod $a = (a, -a)$, kde $a \neq 0$. Pak pro funkci

$$g(x) = \sqrt[5]{x^5 - a^5}$$

platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = [x \mapsto f(x, -a)]'_{x=a} = g'(a).$$

Derivace $g'(a)$ je však nevlastní, neboť díky spojitosti g lze odvodit

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5 - a^5)^4}} = \infty.$$

Obdobně obdržíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ neexistuje.

Zbývá vyšetřit bod $[0, 0]$. Pro něj platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}([0, 0]) = [x \mapsto f(x, 0)]'_{x=0} = \left[x \mapsto \sqrt[5]{x^5} \right]'_{x=0} = 1$$

a podobně $\frac{\partial f}{\partial y}([0, 0]) = 1$. Pokud tedy existuje derivace, je reprezentován vektorem $[1, 1]$. Nutnou a postačující podmínkou pro jeho existenci je nulovost limity

$$\begin{aligned} & \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{f([0, 0] + [x, y]) - f([0, 0]) - \langle [1, 1], [x, y] \rangle}{\|[x, y]\|} \\ &= \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{\sqrt{x^5 + y^5} - (x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Uvažujme-li přímku $y = x$, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^5 + x^5} - (x + x)}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{2x^5} - 2x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Dle Věty 8.4.11 tak derivace v $[0, 0]$ neexistuje. ♣

9.8.17. Příklad. Zjistěte, zdali má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^4}{x^4 + y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

totální diferenciál v $[0, 0]$.

Řešení. Jelikož

$$x \mapsto f(x, 0) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

a

$$y \mapsto f(0, y) = y^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

máme $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Existence totálního diferenciálu tak odvisí od nulovosti limity

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\frac{x^5+y^4}{x^4+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{y^4 - xy^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Uvažujeme-li přímku $y = x$, obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^4 - x^3}{(x^4 + x^2)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - 1}{\sqrt{2}(x^2 + 1)} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Tedy totální $f'(0)$ neexistuje. ♣

9.8.18. Příklad. Spočítejte parciální derivace a totální diferenciál funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Ukažte navíc, že parciální derivace f nejsou spojité v počátku.

Řešení. Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x, y]) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} 2x$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}([x, y]) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} 2y.$$

Obě parciální derivace jsou spojité funkce na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$, a proto podle Věty 9.1.21 existuje totální diferenciál pro všechna $[x, y] \neq [0, 0]$. Ten má tvar

$$f'(x, y): [h_1, h_2] \mapsto \left(\left[\frac{\partial f}{\partial x}([x, y]), \frac{\partial f}{\partial y}([x, y]) \right], [h_1, h_2] \right), \quad [h_1, h_2] \in \mathbb{R}^2.$$

V bodě $[0, 0]$ spočteme parciální derivace dle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

a analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial y}(o) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin(\frac{1}{t^2}) - 0}{t} = 0.$$

Ukažme nyní, že $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v počátku. Již však její restrikce na přímku $y = 0$ není spojitá, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}([x, 0]) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x^2} - x^2 \left(\cos \frac{1}{x^2} \right) \frac{2x}{x^4} \right)$$

neexistuje vlastní. (K tomu stačí uvažovat body $[\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0]$, $n \in \mathbb{N}$.)

Přesto v bodě o existuje totální diferenciál

$$f'(0, 0)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(o)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(o)h_2 = 0h_1 + 0h_2.$$

Vskutku, pro nulové lineární zobrazení máme totiž

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

Jelikož

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

je limita nulová. Tím je existence totálního diferenciálu ověřena. ♣

9.8.19. Příklad. Ukažte, že funkci

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2 + xy}}$$

lze spojitě rozšířit do bodu $[0, 0]$ a že má v tomto bodě totální diferenciál.

Řešení. Nejprve ukážeme, že $x^2 + y^2 + xy > 0$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Vyjádříme totiž bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$ v polárních souřadnicích jako

$$[x, y] = [r \cos \alpha, r \sin \alpha], \quad r > 0, \alpha \in [0, 2\pi).$$

Pak

$$x^2 + y^2 + xy = r^2 + r^2 \cos \alpha \sin \alpha = r^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) > 0.$$

(Mohli bychom též použít odhad $x^2 + y^2 + xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.)

Dále odhadneme

$$x^2 + y^2 + xy \leq x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq 2(x^2 + y^2),$$

a tedy

$$0 \leq e^{-\frac{1}{x^2 + y^2 + xy}} \leq e^{-\frac{1}{2(x^2 + y^2)}}.$$

Jelikož

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{2t}}}{t} = 0,$$

existuje $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \in P([0, 0], \delta)$ platí

$$0 \leq e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}} \leq e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}} \leq (x^2 + y^2).$$

Tedy vidíme, že danou funkci lze spojitě dodefinovat v bodě $[0, 0]$ hodnotou 0.

Parciální derivace v počátku spočteme z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(o) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = 0$$

a analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(o) = 0$.

Existence totálního diferenciálu je pak ekvivalentní s nulovostí limity

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'(0, 0)(x, y)}{\|[x, y]\|} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jelikož pro $[x, y] \in P(o, \delta)$ platí

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

je daná limita nulová. Tedy totální diferenciál funkce f v počátku existuje. ♣

9.8.20. Příklad. Ukažte, že totální diferenciál funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y(|x| + |y|)}{x^4 + y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

v počátku neexistuje.

Řešení. Jelikož je funkce f nulová na osách, jsou parciální derivace f v počátku nulové. Totální diferenciál v o tak existuje právě tehdy, když je limita

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{f(x, y)}{\|[x, y]\|} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y(|x| + |y|)}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

nulová. Uvažujeme-li však parabolu $y = x^2$, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 x^2(|x| + |x^2|)}{(x^4 + x^4) \sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x + x^2}{2x \sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + x}{2 \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Totální diferenciál v počátku proto neexistuje. ♣

9.8.21. Příklad. Spočtěte totální diferenciál funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + y} \log(x^2 + y^2), & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

všude, kde existuje.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že f je spojitá na $\mathbb{R}^2$. K tomu je třeba ověřit, že $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x,y) = 0$. To však plyne z odhadu

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \sqrt[3]{|x^2| + |y|} \log(x^2 + y^2) \leq \sqrt[3]{|x| + |y|} |\log(x^2 + y^2)| \\ &\leq \sqrt[6]{2(x^2 + y^2)} |\log(x^2 + y^2)| \end{aligned}$$

platného pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ splňující $|x| \leq 1$ a z faktu $\lim_{r \rightarrow 0+} r^{\frac{1}{6}} |\log r| = 0$.

V každém bodě $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujícím $y \neq -x^2$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) &= \frac{1}{3} (x^2 + y)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + y^2) + \sqrt[3]{x^2 + y} \frac{2x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) &= \frac{1}{3} (x^2 + y)^{-\frac{2}{3}} \log(x^2 + y^2) + \sqrt[3]{x^2 + y} \frac{2y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní bod $a = (a, -a^2)$, kde $a \neq 0$ a $a^2 + a^4 \neq 1$. Protože

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x}([x, -a^2]) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{3} (x^2 - a^2)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + a^4) + \sqrt[3]{x^2 - a^2} \frac{2x}{x^2 + a^4} \right)$$

neexistuje vlastní, neexistuje ani

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x}([x, -a^2]).$$

Podobně neexistuje $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, protože

$$\lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{\partial f}{\partial y}([a, y]) = \lim_{y \rightarrow -a^2} \left(\frac{1}{3} (a^2 + y)^{-\frac{2}{3}} 2a \log(a^2 + y^2) + \sqrt[3]{a^2 + y} \frac{2a}{a^2 + y^2} \right)$$

neexistuje vlastní.

Uvažujme nyní bod o . Pak $x \mapsto f(x, 0) = \sqrt[3]{x^2} \log x^2$, a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(o) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2} \log t^2}{t}$$

neexistuje vlastní. Podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(o) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t} \log t^2}{t}$$

neexistuje.

Konečně vezmeme do úvahy bod $a = (a, -a^2)$, kde $a^2 + a^4 = 1$. Počítejme $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ jako limitu partiálních derivací. Pak

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x}([x, -a^2]) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{3} (x^2 - a^2)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + a^4) + \sqrt[3]{x^2 - a^2} \frac{2x}{x^2 + a^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{3} (x^2 - a^2)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + a^4) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x \log(x^2 + a^4)}{3} \cdot \frac{x^2 + a^4 - 1}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = 0,\end{aligned}$$

neboť dle Věty 5.4.1(a) platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + a^4 - 1}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x}{\frac{2}{3} 2x (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{3}}} = 0.$$

Podobně pro $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(a) &= \lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{\partial f}{\partial y}([a, y]) = \lim_{y \rightarrow -a^2} \left(\frac{1}{3} (a^2 + y)^{-\frac{2}{3}} \log(a^2 + y^2) + \sqrt[3]{a^2 + y} \frac{2y}{a^2 + y^2} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{1}{3} (a^2 + y)^{-\frac{2}{3}} \log(a^2 + y^2) \\ &= \lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{1}{3} \frac{\log(a^2 + y^2)}{a^2 + y^2 - 1} \cdot \frac{a^2 + y^2 - 1}{(a^2 + y)^{\frac{2}{3}}} = 0,\end{aligned}$$

jelikož

$$\lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{a^2 + y^2 - 1}{(a^2 + y)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{2y}{\frac{2}{3} (a^2 + y)^{-\frac{1}{3}}} = 0.$$

Zbývá vyšetřit existenci totálního diferenciálu v bodě $a(a) = (a, -a^2)$, kde $a^2 + a^4 = 1$. Dle předchozího výpočtu je kandidát na $f'(a)$ roven 0. Vyšetřujeme

tedy výraz

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f([a, -a^2] + [x, y]) - f([a, -a^2])}{\|[x, y]\|} \right| \\
 &= \left| \frac{\sqrt[3]{(a+x)^2 + (-a^2+y)^2} \log((a+x)^2 + (-a^2+y)^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\
 &= \left| \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2ax + y^2} \log(x^2 + y^2 + 2ax - 2a^2y + 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\
 &\leq \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2ax + y^2} |x^2 + y^2 + 2ax - 2a^2y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\sqrt[3]{x^2 + 2ax + y^2} ((x^2 + y^2) + 2|a|(|x| + |a||y|)) \right) \\
 &\leq \sqrt[3]{x^2 + 2ax + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^2 + 2ax + y^2} \frac{|2a| \max\{1, |a|\} (|x| + |y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}},
 \end{aligned}$$

přičemž jsme použili odhad $\log(t+1) \leq t$, $t \in (-1, \infty)$. Poslední výraz však konverguje k 0 pro $[x, y] \rightarrow [0, 0]$, neboť

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \sqrt[3]{x^2 + 2ax + y^2} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{2}.$$

Tím je existence totálního diferenciálu v bodě a dokázána. ♣

9.8.22. Příklad. Vypočítejte derivaci $D_v f(1, 1, 2)$ funkce

$$f(x, y, z) = x^y + y^z, \quad [x, y, z] \in (0, \infty)^3,$$

kde $v = [1, 1, 1]$.

Řešení. Funkce f má zřejmě všechny parciální derivace na svém definičním oboru, a tedy existuje $\nabla f(1, 1, 2) = f'(1, 1, 2)$. Jelikož $f'(1, 1, 2)(v) = D_v f(1, 1, 2)$ (vizte Větu 9.1.26), stačí nalézt $\nabla f(1, 1, 2)$. Protože na $\mathcal{D}(f)$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x + zy^{z-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^z \log y,$$

máme

$$\nabla f(1, 1, 2) = [1, 2, 0].$$

Proto

$$D_v f(1, 1, 2) = \langle [1, 2, 0], [1, 1, 1] \rangle = 3. \quad \text{♣}$$

9.8.23. Příklad. Necht $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R})$. Vyjádřete parciální derivace funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pomocí parciálních derivací funkce g , pokud

$$f(x, y) = g(x + y, x - y), \quad f(x, y) = g(\sin x, xy), \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. (a) Uvažujme zobrazení $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované jako $h(x, y) = [x + y, x - y]$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. To má složky $h_1(x, y) = x + y$ a $h_2(x, y) = x - y$. Funkce h je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, a tak dle řetízkového pravidla (Věta 9.2.18) platí

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j g(h(x, y)) \partial_1 h_j(x, y) \\ &= \partial_1 g(x + y, x - y) \cdot 1 + \partial_2 g(x + y, x - y) \cdot 1\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j g(h(x, y)) \partial_2 h_j(x, y) \\ &= \partial_1 g(x + y, x - y) \cdot 1 + \partial_2 g(x + y, x - y) \cdot (-1).\end{aligned}$$

(b) Podobně jako výše počítáme pro $h(x, y) = [\sin x, xy]$, $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j g(h(x, y)) \partial_1 h_j(x, y) \\ &= \partial_1 g(\sin x, xy) \cdot \cos x + \partial_2 g(\sin x, xy) \cdot y\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j g(h(x, y)) \partial_2 h_j(x, y) \\ &= \partial_1 g(\sin x, xy) \cdot 0 + \partial_2 g(\sin x, xy) \cdot x.\end{aligned}$$

♣

9.8.24. Příklad. Necht $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Vyjádřete parciální derivace funkce $g(x, y) = f(x, y)^{f(y, x)}$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, pomocí parciálních derivací f a hodnot f .

Řešení. Uvažujme zobrazení $h(x, y) = [f(x, y), f(y, x)]$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, a funkci $u(x, y) = x^y$, $[x, y] \in (0, \infty)^2$. Pak platí $g = u \circ h$. Dle Věty 9.2.16 platí

$$g'(x, y) = u'(h(x, y)) \circ h'(x, y), \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Máme

$$\begin{aligned}u'(a, b) &= [ba^{b-1}, a^b \log a], \quad [a, b] \in (0, \infty)^2, \\ h'_1(x, y) &= [\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)]\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_1 h_2(x, y) &= \partial_1 f(y, x) \cdot 0 + \partial_2 f(y, x) \cdot 1 = \partial_2 f(y, x), \\ \partial_2 h_2(x, y) &= \partial_1 f(y, x) \cdot 1 + \partial_2 f(y, x) \cdot 0 = \partial_1 f(y, x),\end{aligned}$$

tj.

$$h'_2(x, y) = [\partial_2 f(y, x), \partial_1 f(y, x)].$$

Tedy

$$g'(x, y) = (ba^{b-1} \quad a^b \log a)_{[a,b]=[f(x,y),f(y,x)]} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) & \partial_2 f(x, y) \\ \partial_2 f(y, x) & \partial_1 f(y, x) \end{pmatrix},$$

tj.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(y, x) \cdot f(x, y)^{f(y,x)-1} \cdot \partial_1 f(x, y) + f(x, y)^{f(y,x)} \cdot \log f(x, y) \cdot \partial_2 f(y, x),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(y, x) \cdot f(x, y)^{f(y,x)-1} \cdot \partial_2 f(x, y) + f(x, y)^{f(y,x)} \cdot \log f(x, y) \cdot \partial_1 f(y, x).$$

♣

9.8.25. Příklad. Necht existuje $f'(1, 1)$ a $g(x, y) = f(f(y, x), f(x, y))$. Určete $g'(1, 1)$, pokud $f(1, 1) = \partial_1 f(1, 1) = 1$ a $\partial_2 f(1, 1) = 2$.

Řešení. Zobrazení $h(x, y) = [f(y, x), f(x, y)]$ splňuje $h(1, 1) = [1, 1]$, přičemž dle Věty 9.2.16 existuje i $h'(1, 1)$ a $g'(1, 1)$. Dále platí

$$g'(1, 1) = (f \circ h)'(1, 1) = f'(h(1, 1)) \circ h'(1, 1) = f'(1, 1) \circ h'(1, 1).$$

Jelikož

$$f'(1, 1) = [\partial_1 f(1, 1), \partial_2 f(1, 1)] = [1, 2]$$

a

$$\partial_1 h_1(x, y) = \partial_1 f(y, x) \cdot 0 + \partial_2 f(y, x) \cdot 1 = \partial_2 f(y, x),$$

$$\partial_2 h_1(x, y) = \partial_1 f(y, x) \cdot 1 + \partial_2 f(y, x) \cdot 0 = \partial_1 f(y, x),$$

$$h'_2(x, y) = [\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)],$$

tj.

$$h'(x, y) = \begin{pmatrix} h'_1(x, y) \\ h'_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f(y, x) & \partial_1 f(y, x) \\ \partial_1 f(x, y) & \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Proto

$$g'(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

♣

9.8.26. Příklad. Vypočítejte $g'(1, 1)$, pokud pro $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derivace $g'(1, 1)$ existuje a funkce $f(r, \alpha) = g(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ splňuje $f'(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = [0, 4]$.

Řešení. Zobrazení $h(r, \alpha) = [r \cos \alpha, r \sin \alpha]$ splňuje $h(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = [1, 1]$ a

$$h'(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix},$$

tj.

$$h'(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Z Věty 9.2.16 tak máme

$$\begin{aligned} (0 \quad 4) &= f' \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right) = g'(1, 1) \circ h' \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right) \\ &= (\partial_1 g(1, 1) \quad \partial_2 g(1, 1)) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \partial_1 g(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} + \partial_2 g(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 \\ -\partial_1 g(1, 1) + \partial_2 g(1, 1) &= 4, \end{aligned}$$

jejímž řešením je dvojice

$$g'(1, 1) = [-2, 2].$$

♣

9.8.27. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy) + \cos(xy) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x . Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě π a nalezněte tečnou přímku ke grafu této funkce v bodě $[\pi, 0]$.

Řešení. Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Funkce F je zjevně třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a platí $F(\pi, 0) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = [\cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x]_{[x,y]=[\pi,0]} = \pi \neq 0.$$

Dle Věty 9.4.1 tak existuje interval $(\pi - \delta, \pi + \delta)$ a interval $(-\delta, \delta)$ tak, že pro každé $x \in B(\pi, \delta)$ existuje právě jedno $y \in B(0, \delta)$ splňující $F(x, y) = 0$. Označme tuto funkci definovanou na $B(\pi, \delta)$ jako φ . Dle Věty 9.4.1 je φ třídy $C^\infty(B(\pi, \delta))$, $\varphi(\pi) = 0$ a splňuje vztah

$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) - 1 = 0, \quad x \in B(\pi, \delta).$$

Dvojnásobným derivováním této rovnice obdržíme postupně pro $x \in B(\pi, \delta)$ rovnosti

$$\begin{aligned} \cos(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi') - \sin(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi') &= 0, \\ -\sin(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi')^2 + \cos(x\varphi) \cdot (2\varphi' + x\varphi'') &= 0, \\ -\cos(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi')^2 - \sin(x\varphi) \cdot (2\varphi' + x\varphi'') &= 0, \end{aligned}$$

kde píšeme $\varphi, \varphi', \varphi''$ místo $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$. Dosadíme-li bod $x = \pi$, dostáváme $\varphi'(\pi) = \varphi''(\pi) = 0$. Tedy tečná přímka ke grafu φ v bodě π má tvar

$$t(x) = \varphi(\pi) + \varphi'(\pi)(x - \pi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.8.28. Příklad. Dokažte, že množina

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; e^y + \log x + xy = 0\}$$

je grafem nějaké funkce f třídy C^2 na $(0, \infty)$.

- (a) Najděte nulový bod x_0 funkce f a $f'(x_0)$.
- (b) Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (c) Dokažte, že f nabývá absolutního minima právě v jednom bodě.

Řešení. Pro pevné $x \in (0, \infty)$ uvažujme funkci $f_x(y) = e^y + \log x + xy$, $y \in \mathbb{R}$. Jelikož $f'_x(y) = e^y + x$, je f_x rostoucí na $\mathbb{R}$. Dále platí $\lim_{y \rightarrow -\infty} f_x(y) = -\infty$ a $\lim_{y \rightarrow \infty} f_x(y) = \infty$. Existuje tedy právě jedno $y(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ takové, že $f_x(y(x)) = 0$. Množina A je tedy grafem funkce f . Jelikož pro funkci $F(x, y) = e^y + \log x + xy$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^y + x > 0$, popisuje rovnice $F(x, y) = 0$ lokálně funkci třídy C^∞ . Tedy f je nekonečně diferencovatelná funkce na $(0, \infty)$.

- (a) Pokud $f(x) = 0$, pak z rovnice

$$e^{f(x)} + \log x + xf(x) = 0 \quad (9.28)$$

vidíme, že $x = e^{-1}$. Derivováním této rovnice obdržíme

$$e^{f(x)} f'(x) + \frac{1}{x} + f(x) + xf'(x) = 0, \quad (9.29)$$

což po dosazení $x = e^{-1}$ dává $f'(e^{-1}) = -\frac{e^2}{e+1}$. Funkce f je tak kladná na $(0, e^{-1})$ a záporná na (e^{-1}, ∞) .

- (b) Jelikož

$$|f(x)| = \left| \frac{-e^{f(x)} - \log x}{x} \right| \leq \frac{e^{f(x)}}{x} + \frac{|\log x|}{x} \leq \frac{1}{x} + \frac{|\log x|}{x}, \quad x \in (e^{-1}, \infty),$$

je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Dále ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$. Vskutku, pokud by tomu tak nebylo, existuje posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konvergující k 0 taková, že $\{f(x_n)\}$ je omezená. Limitním přechodem v (9.28) pak dostaneme $-\infty = 0$, což je spor. Proto $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$.

(c) Jelikož $f(e^{-1}) = 0$, $f(x) < 0$ pro $x \in (e^{-1}, \infty)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, existuje alespoň jeden bod, kde funkce nabývá svého absolutního minima. Předpokládejme, že existují dva takové body $x_1 < x_2$. Pak $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ a $f(x_1) = f(x_2)$. Z rovnice (9.29) nyní plyne

$$\frac{1}{x_1} + f(x_1) = 0 = \frac{1}{x_2} + f(x_2),$$

tedy $x_1 = x_2$. To je však spor s naším předpokladem.

♣

9.8.29. Příklad. Uvažujte množinu

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0\}.$$

- (a) Ukažte, že $A \cap \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$ je grafem funkce f , která je třídy $C^\infty((0, \infty))$.
 (b) Ukažte, že f je klesající a $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$.
 (c) Existuje $a > 0$ a funkce $f_1: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$, $f_2, f_3: [0, a] \rightarrow [0, \infty)$ takové, že množina $A \cap \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ je sjednocením grafů f_1, f_2, f_3 a $f_1 < 0$ na $(0, \infty)$ a $0 < f_2 < f_3$ na $(0, a)$.
 (d) Funkce f_1, f_2, f_3 jsou třídy C^∞ na vnitřku svého definičního oboru.
 (e) Ukažte, že jsou funkce f_1, f_2, f_3 spojité a vyšetřete jejich supremum a infimum.

Řešení. (a) Pro pevné $x < 0$ uvažujeme funkci $f_x(y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $y \in \mathbb{R}$. Pak $f'_x(y) = 3y^2 - 2x > 0$, $\lim_{y \rightarrow 0+} f_x(y) = x^3 < 0$ a $\lim_{y \rightarrow \infty} f_x(y) = \infty$. Existuje tedy právě jeden bod $y(x) = f(x) \in (0, \infty)$ splňující

$$x^3 + f(x)^3 - 2xf(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0). \quad (9.30)$$

(b) Ukažme, že $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, existuje posloupnost $\{x_n\}$ záporných čísel konvergující k 0 zleva taková, že $f(x_n) \rightarrow M \in (0, \infty]$. Pak ale z rovnice

$$f(x)(f(x)^2 - 2x) = -x^3$$

plyne $M^3 = 0$, což je spor.

Podobně ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Jinak by totiž existovala posloupnost $\{x_n\}$ záporných čísel konvergující do $-\infty$ taková, že $f(x_n) \rightarrow M \in [0, \infty)$. Pak ale z (9.30) máme

$$f(x_n) = \frac{-x_n^3}{f(x_n)^2 - 2x_n} = \frac{x_n^2}{2 - \frac{f(x_n)}{x_n}},$$

což v limitním přechodu dá rovnost $M = \infty$.

Dále si uvědomme, že z Věty 9.4.1 plyne, že $f \in C^\infty((-\infty, 0))$. Vskutku, funkce $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a splňuje $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2x > 0$ kdykoliv $x < 0$. Tedy rovnice $F(x, y) = 0$ lokálně určuje nekonečně diferencovatelnou funkci. Proto je f třídy C^∞ .

Vzhledem k vypočteným limitám funkce f musí existovat bod, kde je její derivace záporná. Předpokládejme, že v nějakém bodě $a < 0$ platí $f'(a) = 0$. Pak derivováním rovnice (9.30) dostáváme

$$3x^2 + 3f(x)^2 f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0),$$

což po dosazení $x = a$ implikuje rovnost $2f(a) = 3a^2$. Další dosazení do (9.30) dává rovnici,

$$x^3 + \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3 - 2x\frac{3}{2}x^2 = 0$$

jež nemá řešení v intervalu $(-\infty, 0)$. Proto $f'(x) \neq 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$. Z Darbouxovy vlastnosti derivace (vizte Větu ??) nyní plyne, že f' je záporná na $(-\infty, 0)$. Z výše uvedených vlastností nyní plyne, že f je klesající $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$.

(c) Pro pevné $x \geq 0$ opět uvažujeme funkci $f_x(y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $y \in \mathbb{R}$. Pokud $x = 0$, má funkce $f_x(y)$ jediný kořen, a to 0. Nechtě tedy $x > 0$. Pak

$\lim_{y \rightarrow -\infty} f_x(y) = 0$ a $\lim_{y \rightarrow \infty} f_x(y) = \infty$. Dále $f'_x(y) = 0$ právě tehdy, když $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x}$. Označme $y_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}x}$ a $y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}x}$. Pak f_x má v y_1 lokální maximum, y_2 lokální minimum, f_x roste na $(-\infty, y_1]$ a $[y_2, \infty)$ a klesá na $[y_1, y_2]$. Dále platí $f_x(y_1) > f_x(0) > 0$. Položme $a = \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$. Pokud $x < a$, je $f_x(y_2) < 0$, pokud $x = a$, platí $f_x(y_2) = 0$ a pokud $x > a$, platí $f_x(y_2) > 0$. Z těchto informací nyní plyne, že pro interval $(0, a)$ má rovnice $f_x(y) = 0$ tři kořeny $f_1(x) < 0 < f_2(x) < f_3(x)$, pro $x = a$ má dva kořeny $f_1(x) < 0 < f_2(x) = f_3(x)$ a pro $x > a$ má pouze jeden kořen $f_1(x) < 0$.

(d) Nekonečná diferencovatelnost funkcí f_1, f_2, f_3 nyní plyne z Věty 9.4.1, neboť pro funkci $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ platí $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2x = 0$ v nějakém bodě $[x, y] \in A$ právě tehdy, když $[x, y] = [a, \sqrt{\frac{2}{3}a}]$.

(e) Uvažujme libovolnou funkci f_i . Pak pro její derivaci platí

$$3x^2 + 3f_i(x)^2 f'_i(x) - 2f_i(x) - 2xf'_i(x) = 0, \quad x \in \text{Int } \mathcal{D}(f_i).$$

Pokud $f'_i(x) = 0$ pro nějaké x , pak x splňuje $f_i(x) = \frac{3}{2}x^2$. Po dosazení do rovnice $x^3 + f_i^3(x) - 2xf_i(x) = 0$ pak dostáváme $x = \frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$ a $f_i(x) = \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$. Přímým výpočtem vidíme, že $\frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$ je největší z tří kořenů funkce $f_{\frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}}(y)$, a proto pouze funkce f_3 má v nějakém bodě nulovou derivaci (konkrétně v bodě $b = \frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$).

Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 0+} f_i(x) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, pro nějaké $i \in \{1, 2, 3\}$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konvergující k 0, pro niž $f(x_n) \rightarrow M \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$. Z rovnice $x_n^3 + f_i(x_n)(f_i^2(x_n) - 2x_n) = 0$ pak ale plyne limitním přechodem $M^3 = 0$, což je spor.

Podobně ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = -\infty$. Kdyby tomu tak nebylo, nalezneme posloupnost $\{x_n\}$ konvergující do ∞ , pro niž $f_1(x_n) \rightarrow M \in (-\infty, 0]$. Pak z rovnosti

$$f_1(x) = \frac{-x^3}{f_1^2(x) - 2x} = \frac{-x^2}{\frac{f_1(x)}{x} - 2}$$

plyne limitním přechodem $M = \infty$, tj. spor.

Z výše uvedených faktů nyní máme, že $f'_1 < 0$ na $(-\infty, 0)$, $f'_2 > 0$ na $(0, a)$ a $f'_3 > 0$ na $(0, b)$.

Dále ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow a-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{3}a}$. K tomuto účelu nejdříve dokážeme omezenost množiny A v prvním kvadrantu. Necht' tedy $[x, y] \in A$ splňuje $x \geq 0, y \geq 0$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $\max\{x, y\} > 0$. Pak máme

$$0 = x^3 + y^3 - 2xy \geq (\max\{x, y\})^3 - 2(\max\{x, y\})^2,$$

neboli

$$2(\max\{x, y\})^2 \geq (\max\{x, y\})^3.$$

To implikuje $\max\{x, y\} \leq 2$. Dostáváme tedy, že funkce f_2 i f_3 jsou omezené.

Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost v $[0, a)$ konvergující k a . Pokud $f_2(x_n) \not\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}a}$, existuje

podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a $M \neq \sqrt{\frac{2}{3}a}$ takové, že $f_2(x_{n_k}) \rightarrow M$. Limitním přechodem v rovnosti $x^3 + f_2^3(x_{n_k}) - 2xf(x_{n_k}) = 0$ pak máme, že M je nezáporným kořenem funkce f_a různým od $\sqrt{\frac{2}{3}a}$. To je však spor s úvahami v (c). Tedy $f(x_n) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}a}$.

Podobně se ukáže, že $\lim_{x \rightarrow a-} f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{3}a}$.

Nyní již můžeme učinit závěr. Funkce f_1 je klesající a $\mathcal{H}(f_1) = (-\infty, 0]$, $\mathcal{H}(f_2) = [0, \sqrt{\frac{2}{3}a}]$ a $\mathcal{H}(f_3) = [0, f_3(b)] = [0, \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}]$. ♣

9.8.30. Příklad. Dokažte, že existuje okolí V bodu $[3, -2, 2]$ takové, že množina $\{[x, y, z] \in V; z^3 - xz + y = 0\}$ je grafem funkce $z = z(x, y)$. Vypočítejte tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě $[3, -2, 2]$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}([3, -2])$.

Řešení. Použijeme Větu 9.4.1 pro funkci $F(x, y, z) = z^3 - xz + y$ a bod $[3, -2, 2]$. Zjevně je F třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F(3, -2, 2) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(3, -2, 2) = [3z^2 - x]_{[x,y,z]=[3,-2,2]} = 9 \neq 0.$$

Předpoklady Věty 9.4.1 jsou tak splněny, a tedy máme existenci požadovaného okolí V . Tedy $z = z(x, y): U \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce třídy C^∞ definovaná na nějakém okolí U obsahujícím bod $[3, -2]$ a splňující $F(x, y, z(x, y)) = 0$ spolu s podmínkou $z(3, -2) = 2$.

Derivujeme rovnost $z^3 - xz + y = 0$ podle x a podle y na U . Dostáváme tak

$$0 = 3z^2 z_x - z - xz_x \quad \text{a} \quad 3z^2 z_y - xz_y + 1 = 0. \quad (9.31)$$

Po dosazení $[x, y, z] = [3, -2, 2]$ máme $z_x(3, -2) = \frac{2}{9}$ a $z_y(3, -2) = -\frac{1}{9}$. Tedy tečná nadrovina t k funkci z v bodě $[3, -2, 2]$ je

$$t(x, y, z) = 2 + \frac{2}{9}(x - 3) - \frac{1}{9}(y + 2), \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Derivujeme-li druhou rovnici v (9.31) podle y , dostáváme

$$6z(z_y)^2 + 3z^2 z_{yy} - xz_{yy} = 0.$$

Po dosazení $[x, y, z] = [3, -2, 2]$ a $z_y = -\frac{1}{9}$ vyjde $z_{yy}(3, -2) = -\frac{4}{243}$. ♣

9.8.31. Příklad. Necht' je funkce $z = z(x, y)$ třídy C^1 na nějakém okolí U bodu $[a, b]$ a splňuje na něm rovnici $z = x + \arctg \frac{y}{z-x}$.

- Vyjádřete z_x pomocí x, y a $z(x, y)$ na U .
- Ukažte, že pro každý bod $[a, b]$, kde $b > 0$, existuje U a $z(x, y)$ s výše uvedenými vlastnostmi.

Řešení. (a) Necht' $[x, y, z]$ splňuje rovnici $z = x + \arctg \frac{y}{z-x}$. Pokud $y = 0$, $z = x$ a pravá strana rovnosti není definována. Tedy $y \neq 0$. Jelikož $z - x = \arctg \frac{y}{z-x}$, je $z - x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Proto

$$y = (z - x) \operatorname{tg}(z - x) > 0$$

(funkce $u \operatorname{tg} u$ je kladná na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Derivujeme-li rovnost $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ podle x , dostáváme

$$z_x = 1 - \frac{y(z_x - 1)}{(z - x)^2 + y^2}.$$

Úpravou obdržíme

$$z_x((z - x)^2 + y^2 + y) = (z - x)^2 + y^2 + y,$$

tj. $z_x = 1$ (díky předchozím úvahám víme, že $(z - x)^2 + y^2 + y > 0$).

(b) Necht $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ splňující $b > 0$ je dáno. Uvažujme funkci $f(z) = -z + a + \operatorname{arctg} \frac{b}{z-a}$. Pak f je spojitá na (a, ∞) a splňuje $\lim_{z \rightarrow a+} f(z) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = -\infty$. Existuje tedy $c \in (a, \infty)$ splňující $f(c) = 0$. Uvažujme nyní bod $[a, b, c]$ a funkci $F(x, y, z) = -z + x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pak $F(a, b, c) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí $[a, b, c]$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}([a, b, c]) = -1 - \frac{b}{(c-a)^2 + b^2} < 0.$$

Dle Věty 9.4.1 existuje požadované okolí bodu $[a, b, c]$ a příslušná funkce z . ♣

9.8.32. Příklad. Ukažte, že existují funkce $u = u(x, y)$ a $v(x, u)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1 , splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Dále vypočítejte $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [1, 2, 0, 0]$ a funkci

$$F: [x, y, u, v] \mapsto \left[xe^{u+v} + 2uv - 2, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x \right].$$

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí a a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(a) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,2,0,0]} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 9.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1, 2]$ a V obsahující $[0, 0]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x, y)$ a $v(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Derivujeme-li nyní vztahy

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv - 2 &= 0 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x &= 0 \end{aligned} \tag{9.32}$$

podle x , dostáváme

$$\begin{aligned} e^{u+v} + x e^{u+v} (u_x + v_x) + 2u_x v + 2u v_x &= 0 \\ y e^{u-v} (u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2} (u_x(1+v) - u v_x) - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení $[x, y, u, v] = [1, 2, 0, 0]$ máme systém

$$\begin{aligned} u_x + v_x &= -1 \\ u_x - 2v_x &= 2, \end{aligned}$$

jehož řešením je $u_x(1, 2) = 0$ a $v_x(1, 2) = -1$.

Zderivováním (9.32) podle y dostaneme

$$\begin{aligned} x e^{u+v} (u_y + v_y) + 2u_y v + 2u v_y &= 0 \\ e^{u-v} + y e^{u-v} (u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2} (u_y(1+v) - u v_y) &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení máme rovnice

$$\begin{aligned} u_y + v_y &= 0 \\ y_y - 2v_y &= -1. \end{aligned}$$

Řešení je $u_y(1, 2) = -\frac{1}{3}$ a $v_y(1, 2) = \frac{1}{3}$.

Proto $u'(1, 2) = [0, -\frac{1}{3}]$ a $v'(1, 2) = [-1, \frac{1}{3}]$. ♣

9.8.33. Příklad. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$, $t(x, y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1, -1]$ a splňují rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0,$$

spolu se vztahy $z(1, -1) = 2$, $t(1, -1) = 0$.

Spočtěte $z''(1, -1)$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [1, -1, 2, 0]$ a funkci

$$F: [x, y, z, t] \mapsto \left[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3, x + y + z - t - 2 \right].$$

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^4$ a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(a) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{[x,y,z,t]=[1,-1,2,0]} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 9.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1, -1]$ a V obsahující $[2, 0]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $z(x, y)$ a $t(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Derivujeme-li nyní rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\x + y + z - t - 2 &= 0\end{aligned}$$

podle x , máme

$$\begin{aligned}2x - z z_x - 3t^2 t_x &= 0 \\1 + z_x - t_x &= 0.\end{aligned}\tag{9.33}$$

Po dosazení $[x, y, z, t] = [1, -1, 2, 0]$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}-2z_z &= 0 \\z_x - t_x &= -1,\end{aligned}$$

jejímž řešením je $z_x(1, -1) = 1$ a $t_x(1, -1) = 2$.

Zderivováním podle y dostáváme

$$\begin{aligned}2y - z z_y - 3t^2 t_y &= 0 \\1 + z_y - t_y &= 0.\end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme $z_y(1, -1) = -1$, $t_y(1, -1) = 0$.

Obdržené vztahy znovu zderivujeme podle x , y a (9.33) podle y a dostaneme

$$\begin{aligned}2 - (z_x)^2 - z z_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2 t_{xx} &= 0 \\z_{xx} - t_{xx} &= 0, \\2 - (z_y)^2 - z z_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2 t_{yy} &= 0 \\z_{yy} - t_{yy} &= 0,\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}-z_y z_x - z z_{xy} - 6t t_y t_x - 3t^2 t_{xy} &= 0 \\z_{xy} - t_{xy} &= 0.\end{aligned}$$

Po dosazení vyjde $z_{xx}(1, -1) = t_{xx}(1, -1) = \frac{1}{2}$, $z_{yy}(1, -1) = t_{yy}(1, -1) = \frac{1}{2}$ a $z_{xy}(1, -1) = t_{xy}(1, -1) = \frac{1}{2}$. Tedy

$$z''(1, -1): [h_1, h_2] \mapsto \frac{1}{2}h_1^2 + h_1 h_2 + \frac{1}{2}h_2^2.$$

♣

9.8.34. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3$$

definují na jistém okolí bodu $[3, 3]$ funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ třídy C^∞ , které splňují $u(3, 3) = 2$, $v(3, 3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3, 3)$, pokud $z = 2uv$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [3, 3, 2, 1]$ a funkci

$$F: [x, y, u, v] \mapsto [x - u - v^2, y - u^2 + v^3].$$

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^4$ a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(a) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[3,3,2,1]} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 9.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[3, 3]$ a V obsahující $[2, 1]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x, y)$ a $v(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Vzhledem k tomu, že

$$z_{xy} = 2(u_{xy}v + u_xv_y + u_yv_x + uv_{xy}), \quad (9.34)$$

potřebujeme vypočítat jednotlivé derivace u a v . K tomuto účelu derivujeme rovnice

$$u + v^2 = x$$

$$u^2 - v^3 = y$$

podle x a podle y . Dostaneme tak systémy

$$u_x + 2vv_x = 1$$

$$2uu_x - 3v^2v_x = 0$$

a

$$u_y + 2vv_y = 0$$

$$2uu_y - 3v^2v_y = 1.$$

Po dosazení máme

$$u_x(3, 3) = \frac{3}{11}, v_x(3, 3) = \frac{4}{11}, u_y(3, 3) = \frac{2}{11}, v_y(3, 3) = -\frac{1}{11}.$$

Dalším derivováním obdržíme soustavu

$$u_{yx} + 2v_xv_y + 2vv_{yx} = 0$$

$$2u_xu_y + 2uu_{yx} - 6vv_xv_y - 3v^2v_{yx} = 0,$$

jejímž řešením po dosazení je

$$u_{yx}(3, 3) = \frac{224}{11^3}, \quad v_{yx}(3, 3) = -\frac{68}{11^3}.$$

Díky záměnnosti parciálních derivací můžeme dosadit do (9.34) a obdržet $z_{xy}(3, 3) = \frac{26}{121}$. ♣

9.8.35. Příklad. Necht' C^1 -funkce $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje rovnici

$$xu_y - yu_x = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje na $\mathbb{R}^2$ funkce $u^*(r, \alpha) = u(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, $(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Výsledek použijte k nalezení nějakého nekonstantního řešení původní rovnice.

Řešení. Pomocí Věty 9.2.18 máme

$$\begin{aligned}u_r^* &= u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha \\u_\alpha^* &= u_x(-r \sin \alpha) + u_y(r \cos \alpha).\end{aligned}$$

Vyjádříme u_x a u_y a dostáváme

$$\begin{aligned}-ru_x &= -r \cos \alpha u_r^* + \sin \alpha u_\alpha^* \\ru_y &= r \sin \alpha u_r^* + \cos \alpha u_\alpha^*.\end{aligned}$$

Pro $r \neq 0$ tak platí

$$\begin{aligned}-u_x &= -\cos \alpha u_r^* + \frac{1}{r} \sin \alpha u_\alpha^* \\u_y &= \sin \alpha u_r^* + \frac{1}{r} \cos \alpha u_\alpha^*.\end{aligned}$$

Tedy pro $r \neq 0$ platí

$$0 = xu_y - yu_x = r \cos \alpha u_x - r \sin \alpha u_y = ru_\alpha^*.$$

Tedy $u_\alpha^* = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Jelikož je u^* třídy C^1 , platí tato rovnost na $\mathbb{R}^2$.

Nyní stačí zvolit funkci nezávislou na α , například $u^*(r, \alpha) = r^2$. Pak $u(x, y) = x^2 + y^2$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, je nekonstantní řešení zadané rovnice.

♣

9.8.36. Příklad. Necht' C^2 -funkce $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje Laplaceovu rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje funkce $u^*(r, \alpha) = u(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ na množině $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Řešení. Z Příkladu 9.8.35 víme, že

$$\begin{aligned}\partial_1 u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) &= \cos \alpha u_r^*(r, \alpha) - \frac{1}{r} \sin \alpha u_\alpha^*(r, \alpha) \\ \partial_2 u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) &= \sin \alpha u_r^*(r, \alpha) + \frac{1}{r} \cos \alpha u_\alpha^*(r, \alpha).\end{aligned}$$

Označíme $f(x, y) = \partial_1 u(x, y)$ a

$$f^*(r, \alpha) = f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \partial_1 u(r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Dosazením do přechozích vztahů za $u = f$ dostáváme

$$\begin{aligned}
 \partial_{11}u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) &= \partial_1 (\partial_1 u(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) = \partial_1 (f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) \\
 &= \frac{\partial f^*}{\partial r}(r, \alpha) \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial f^*}{\partial \alpha}(r, \alpha) \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} (f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \alpha u_r^*(r, \alpha) - \frac{\sin \alpha}{r} u_\alpha^*(r, \alpha) \right) \\
 &\quad - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\cos \alpha u_r^*(r, \alpha) - \frac{\sin \alpha}{r} u_\alpha^*(r, \alpha) \right) \\
 &= \cos \alpha \left(\cos \alpha u_{rr}^* + \frac{\sin \alpha}{r^2} u_\alpha^* - \frac{\sin \alpha}{r} u_{\alpha r}^* \right) \\
 &\quad - \frac{\sin \alpha}{r} \left(u_{r\alpha}^* \cos \alpha - \sin \alpha u_r^* - \frac{\sin \alpha}{r} u_{\alpha\alpha}^* - \frac{\cos \alpha}{r} u_\alpha^* \right) \\
 &= u_{rr}^* \cos^2 \alpha - \frac{2}{r} u_{r\alpha}^* \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{r^2} u_{\alpha\alpha}^* \sin^2 \alpha \\
 &\quad + \frac{1}{r} u_r^* \sin^2 \alpha + \frac{2}{r^2} u_\alpha^* \sin \alpha \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

Obdobně vyjde

$$\begin{aligned}
 \partial_{22}u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) &= u_{rr}^* \sin^2 \alpha + \frac{2}{r} u_{r\alpha}^* \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{r^2} u_{\alpha\alpha}^* \cos^2 \alpha \\
 &\quad - \frac{2}{r^2} u_\alpha^* \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{r} u_r^* \cos^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

Tedy dostáváme rovnost

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_{11}u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) + \partial_{22}u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \\
 &= u_{rr}^* + \frac{1}{r^2} u_{\alpha\alpha}^* + \frac{1}{r} u_r^*.
 \end{aligned}$$

♣

9.8.37. Příklad.

9.8.38. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně omezená a uzavřená, tj. kompaktní (Věta 8.6.9). Funkce f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^2$, a tedy nabývá na M svého minima a maxima. Máme $\text{Int } M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}$. Bod podezřelý z extrému ležící v $\text{Int } M$ musí splňovat $\nabla f(x, y) = [0, 0]$ (vizte Větu 9.5.3), tj.

$$[2x - y, 2y - x] = [0, 0].$$

To nastává právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$.

Další body podezřelé z extrému budeme hledat na $\partial M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 1\}$. Hranici M můžeme popsat pomocí čtyř úseček, například

$$M_1 = \{[x, 1-x]; x \in [0, 1]\}.$$

Pak funkce $g(x) = f(x, 1-x)$ má tvar

$$g(x) = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 3x^2 - 3x + 1, \quad x \in [0, 1],$$

která má body podezřelé z extrému v krajních bodech intervalu $[0, 1]$ a dále v bodě, kde $g'(x) = 0$, tj. v bodě $\frac{1}{2}$. Celkově dostáváme $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $[1, 0]$, $[0, 1]$ jako body, kde f může nabývat extrému na M .

Podobným způsobem popíšeme zbývající hrany ∂M a dostaneme další body

$$[-1, 0], [0, -1], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}].$$

Porovnáním hodnot funkce f ve všech podezřelých bodech zjistíme, že $\min f(M) = f(0, 0) = 0$ a

$$\max f(M) = f(1, 0) = f(0, 1) = f(-1, 0) = f(0, -1) = 1.$$

♣

9.8.39. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud $a > 0, b > 0$ a

$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní, takže C^∞ funkce f na ní nabývá svých extrémů. Jelikož $\nabla f(x, y) = [\frac{1}{a}, \frac{1}{b}]$, žádný bod podezřelý z extrému neleží v $\text{Int } M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. Parametrizujeme ∂M jako dvě půlkružnice

$$M_1 = \{[x, \sqrt{1-x^2}]; x \in [0, 1]\}, \quad M_2 = \{[x, -\sqrt{1-x^2}]; x \in [0, 1]\}.$$

Pak funkce $f|_{M_1}$ má tvar

$$g(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{b}, \quad x \in [0, 1].$$

Její derivace je rovna

$$g'(x) = \frac{1}{a} - \frac{x}{b\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0, 1).$$

Tedy pokud $g'(x) = 0$, pak $x = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Máme tedy podezřelé body $[\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Zahrneme ještě do úvahy krajní body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.

Při vyšetřování f na M_2 nám vyjdou body $[\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Porovnáním hodnot ve všech podezřelých bodech zjistíme, že

$$\begin{aligned}\min f(M) &= f\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \\ \max f(M) &= f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.\end{aligned}$$

♣

9.8.40. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z, \quad M = \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Množina M není omezená. Vzhledem k tomu, že

$$f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,$$

nabývá f svého minima $\min f(M) = -14$ v bodě $[-1, -2, 3]$. Jelikož

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, -2, 3) = \infty,$$

supremum f na M je rovno ∞ .

♣

9.8.41. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Řešení. Funkce f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$ a $\overline{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Ze spojitosti f na $\mathbb{R}^3$ plyne rovnost $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Vyšetříme nejprve body podezřelé z extrému, které leží v $\text{Int } \overline{M} = M$. V těchto bodech musí být $\nabla f(x, y, z) = 0$, tj.

$$e^{-(x+2y+3z)} [1 - (x + y + z), 1 - 2(x + y + z), 1 - 3(x + y + z)] = 0.$$

Tato soustava však nemá řešení, a tedy v M žádný bod podezřelý z extrému neleží.

Uvažujme nyní jednu ze „stěn“ tvořící ∂M , například

$$M_1 = \{[x, y, 0]; x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Pak máme funkci $g(x, y) = f(x, y, 0) = (x + y)e^{-(x+2y)}$ na $N = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$. Jako výše dostaneme, že g nemá v $\text{Int } N$ podezřelý bod. Musíme tedy uvažovat $\partial N = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \{[x, 0]; x \geq 0\}, \quad N_2 = \{[0, y]; y \geq 0\}.$$

Funkce $h(x) = g(x, 0) = xe^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, má bod podezřelý z extrému v 0 a v bodě, kde $h'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0$, tj. v $x = 1$. Dostáváme tak body

$$[0, 0, 0], [1, 0, 0].$$

V množině N_2 dostáváme další podezřelý bod $[0, \frac{1}{2}, 0]$. Tím máme vyřešenu otázku množiny N .

Zbývající stěny tvořící ∂M poskytnou bod $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Funkce f je zjevně nezáporná na $\overline{M}$, tedy

$$\inf f(M) = \min f(\overline{M}) = f(0, 0, 0) = 0.$$

Zbývá dokázat, že

$$\sup f(M) = \max f(\overline{M}) = f(1, 0, 0) = e^{-1}.$$

K tomuto účelu uvažujme odhad

$$f(x, y, z) \leq \frac{x + y + z}{e^{x+y+z}}, \quad [x, y, z] \in \overline{M}. \quad (9.35)$$

Jelikož $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{e^r} = 0$, existuje $r > 1$ takové, že $\frac{r}{e^r} < e^{-1}$. Uvažujme množinu

$$K = \{[x, y, z] \in \overline{M}; x + y + z \leq r\}.$$

Pak K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f tedy nabývá na K svého maxima, přičemž z výpočtů výše a (9.35) plyne, že $\max f(K) = f(1, 0, 0)$. Díky (9.35) dále máme, že $\max f(K) = \max f(\overline{M})$. Tím je důkaz dokončen. ♣

9.8.42. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M , kde

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z, \quad M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$. Proto nabývá na M svých extrémů. Pokud $x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ splňují $z_1 < z_2$, pak $f(x, y, z_1) < f(x, y, z_2)$. Tedy f nabývá své maximum na $M_1 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{1\}$ a minimum na $M_2 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{-1\}$.

K určení maxima tak vyšetřujeme maximum funkce $g(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 1$ na množině $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Jelikož $g(x, y) = 2 \operatorname{dist}([x, y], [0, 0])^2 + 1$, vidíme, že body v $[-1, 1] \times [-1, 1]$ nejvzdálenější od počátku jsou $[1, 1]$, $[-1, 1]$, $[-1, -1]$, $[1, -1]$.

Podobně postupujeme při hledání minima a dospějeme k bodu $[0, 0]$. Tedy

$$\min f(M) = f(0, 0, -1) = -1,$$

$$\max f(M) = f(1, 1, 1) = f(1, -1, 1) = f(-1, -1, 1) = f(-1, 1, 1) = 5. \quad \clubsuit$$

9.8.43. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M , kde

$$f(x, y) = x + y, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená. Díky Příkladu 9.8.29 víme, že M je omezená a tedy je kompaktní. Funkce f je spojitá, a tedy nabývá na M svých extrémů. Použijeme Větu 9.5.8 pro $G = \mathbb{R}^2$, $m = 1$ a $g(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Platí

$$\nabla g(x, y) = (3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x),$$

a tedy $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$. Tím jsme získali podezřelý bod z extrému prvního druhu. Protože $\nabla f(x, y) = (1, 1)$, dostáváme soustavu

rovníc

$$1 + \lambda(3x^2 - 2y) = 0$$

$$1 + \lambda(3y^2 - 2x) = 0$$

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0.$$

Z první rovnice plyne, že $\lambda \neq 0$. Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$3x^2 - 3y^2 = 2y - 2x,$$

tj.

$$(x - y)(3(x + y) + 2) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze body v prvním kvadrantu, plyne odtud $y = x$. Po dosazení do třetí rovnice obdržíme

$$x = y = 0 \quad \text{nebo} \quad x = y = 1.$$

Tedy

$$\max f(M) = f(1, 1) = 2, \quad \min f(M) = f(0, 0) = 0.$$

♣

9.8.44. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y) = xyz, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Použijeme Větu 9.5.8 pro funkci f a vazební funkce $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $g_2(x, y, z) = x + y + z$. Jelikož

$$\nabla g_1(x, y, z) = 2[x, y, z], \quad \nabla g_2(x, y, z) = [1, 1, 1],$$

jsou vektory $[x, y, z]$ a $[1, 1, 1]$ lineárně závislé právě tehdy, když $x = y = z$. Takový bod však splňuje rovnice $g_1(x, x, x) = 3x^2 - 1 = 0$ a $g_2(x, x, x) = 3x = 0$, což nelze.

Jelikož $\nabla f(x, y, z) = [yz, xz, xy]$, řešíme tuto soustavu rovnic:

$$yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 = 0$$

$$xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 = 0$$

$$xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + y + z = 0.$$

Odečtením první rovnice od druhé dostáváme

$$-z(x - y) + 2\lambda_1(x - y) = 0.$$

Odtud plyne, že musí být $x = y$ nebo $z = 2\lambda_1$. Podobně odečtením třetí rovnice od druhé obdržíme

$$-x(y - z) + 2\lambda_1(y - z) = 0.$$

Toto dává $x = 2\lambda_1$ nebo $y = z$. Dostáváme proto, že musí být buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na případ $x = y$. Z páté rovnice máme

$z = -2x$, což po dosazení do čtvrté rovnice dá $6x^2 = 1$. K bodům $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ dopočítáme y a z . Případy $y = z$ a $z = x$ pak vyřešíme obdobně. Obdržíme tak tyto podezřelé body:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Výpočtem hodnot f v jednotlivých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodech z prvního řádku a minima v bodech druhého řádku. ♣

9.8.45. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nabývá tak na M svých extrémů. Povšimneme si, že bod $[x, y, z] \in M$ splňuje $x \geq 0$ a zároveň pro něj platí $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Označme $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Pak lze M popsat jako

$$\{[a, y, z] \in \mathbb{R}^3; a = y^2 + z^2\}.$$

Tedy extremalizujeme funkci

$$g(y, z) = f(a, y, z) = a^2 + 2az + y^2 + z$$

na kružnici

$$N = \{[y, z] \in \mathbb{R}^2; a = y^2 + z^2\}.$$

Na tuto úlohu použijeme Větu 9.5.8. Vazební podmínka $g(y, z) = y^2 + z^2 - a$ má gradient roven $\nabla g(y, z) = [2y, 2z]$, který je roven 0 pouze v počátku, což však není prvek N . Musíme tedy vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} 2y + \lambda 2y &= 0 \\ 2a + 1 + \lambda 2z &= 0 \\ y^2 + z^2 &= a. \end{aligned}$$

Z první rovnice odvodíme $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. Pokud $y = 0$, z třetí rovnice máme $z = \pm\sqrt{a}$. Pokud $\lambda = -1$, druhá rovnice implikuje $z = a + \frac{1}{2}$. Dosadíme-li do třetí rovnice, máme

$$y^2 = a - z^2 = a - \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = -a^2 - \frac{1}{4} < 0,$$

což je nemožné.

Dostali jsem tedy dva podezřelé body

$$[a, 0, \sqrt{a}], \quad [a, 0, -\sqrt{a}].$$

Dosazením zjistíme, že v prvním bodě nabývá f maxima a v druhém minima. ♣

9.8.46. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y, z) = 10z + x - y, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y \geq 0\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Rozdělíme M na množiny

$$M_1 = \text{Int } M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y > 0\},$$

$$M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y > 0\},$$

$$M_3 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y = 0\},$$

$$M_4 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}.$$

Jelikož $\nabla f = [1, -1, 10]$, nemá dle Věty 9.5.3 funkce f v M_1 bod podezřelý z extrému.

Použijeme nyní Větu 9.5.8 pro

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + y > 0\}$$

a vazební funkci $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Jelikož $\nabla g(z, y, z) = [2x, 2y, 2z]$, je ∇g nenulový na množině $\{x \in G; g(x) = 0\}$. Musíme tak vyřešit soustavu

$$1 - 2\lambda x = 0$$

$$-1 - 2\lambda y = 0$$

$$10 - 2\lambda z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Zjevně platí $\lambda \neq 0$. Dostáváme tak

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{-1}{2\lambda}, \quad z = \frac{5}{\lambda}.$$

Tedy

$$x + y = 0,$$

což znamená, že $[x, y, z] \notin G$. Nemáme tak žádný podezřelý bod ležící v množině M_2 .

Uvažujme nyní množinu M_3 . Pro body $[x, y, z] \in M_3$ platí $y = -x$, tj. $2x^2 + z^2 < 1$. Extremalizujeme tak funkci

$$h(x, z) = 10z + 2x$$

na množině

$$N = \{[x, z] \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + z^2 < 1\}.$$

Jelikož $\nabla h = [2, 10]$, nemá h v N bod podezřelý z extrému.

Zbývá nám tak množina M_4 . Použijeme-li rovnost $y = -x$, dostáváme extremalizaci funkce

$$h(x, z) = 10z + 2x$$

na množině

$$N = \{[x, z] \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + z^2 = 1\}.$$

Evidentně neexistují v N podezřelé body prvního druhu. Řešíme tak soustavu

$$2 - \lambda 4x = 0$$

$$10 - \lambda 2z = 0$$

$$2x^2 + z^2 = 1.$$

Z první a druhé rovnice máme $\lambda \neq 0$, a tedy $x = \frac{1}{2\lambda}$, $z = \frac{5}{\lambda}$. Po dosazení do třetí rovnice dostáváme

$$\lambda^2 = \frac{51}{2}.$$

Máme tak body

$$\left[\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}} \right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}} \right].$$

V prvním z nich má f maximum o hodnotě $\sqrt{102}$, v druhém minimum o hodnotě $-\sqrt{102}$. ♣

9.8.47. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y) = y, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně uzavřená a f třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Množina M je též omezená. Vskutku, uvažujme libovolné $a = [x, y] \in M$. Zapišme ho v polárních souřadnicích jako $[r \cos \alpha, r \sin \alpha]$, kde $r \geq 0$ a $\alpha \in [0, 2\pi)$. Pak a splňuje rovnici

$$0 = r^4 - 2r^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Uvažujeme-li $a \neq o$, máme rovnost

$$r^2 = 2 \cos(2\alpha).$$

Tedy $r \leq \sqrt{2}$. Proto je množina M obsažena v kruhu o středu o a poloměru $\sqrt{2}$.

Funkce f tak nabývá na M svých extrémů. Pro vazební funkci $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ platí

$$\nabla g(x, y) = [4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 + 1)] = o$$

právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$.

Dále řešíme soustavu

$$\lambda 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$1 - \lambda 4y(x^2 + y^2 + 1) = 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$$

První dvě rovnice implikují $\lambda \neq 0$. Pokud $x = 0$, pak ze třetí rovnice plyne $y = 0$. Pak však neplatí druhá rovnice. Tedy $x \neq 0$, což dává $x^2 + y^2 = 1$. Ze třetí rovnice tak máme $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$, což spolu s rovností $x^2 + y^2 = 1$ dává body

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right], \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right], \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right], \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right].$$

Tedy

$$\min f(M) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

a

$$\max f(M) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

9.8.48. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y) = x^2 + y, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}.$$

Řešení. Nejprve ověříme, že (zřejmě) uzavřená množina M je omezená. Necht' $\{[x_n, y_n]\}$ je libovolná posloupnost bodů v M splňující $\|[x_n, y_n]\| \rightarrow \infty$. Pokud $y_{n_k} \rightarrow \infty$ pro nějakou podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ (připomeňme, že $y_n \geq 0$ dle definice M), platí

$$0 = x_{n_k}^2 + 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \geq 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \rightarrow \infty,$$

což je zřejmý spor. Tedy $\{y_n\}$ je omezená posloupnost. Pak je ale i $\{x_n\}$ omezená, neboť v případě nějaké podposloupnosti $\{x_{n_k}\}$ splňující $|x_{n_k}| \rightarrow \infty$ máme

$$0 = x_{n_k}^2 + 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \rightarrow \infty,$$

tedy opět spor. Proto je M omezená množina.

Rozdělíme M na množiny

$$M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y > 0\},$$

$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y = 0\} = \{[0, 0]\}.$$

Pro množinu M_1 použijeme Větu 9.5.8, kde

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y > 0\}.$$

Snadno zjistíme, že podezřelé body prvního druhu neexistují. Řešíme tak soustavu

$$2x + \lambda 2x = 0$$

$$1 + \lambda(12y^2 - 4) = 0$$

$$4y^3 - 4y + x^2 = 0.$$

Pokud $x = 0$, máme z třetí rovnice $y = 1$, tj. bod $[0, 1]$. Pokud $x \neq 0$, platí $\lambda = -1$.

Tedy druhá rovnice dává $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Z třetí rovnice pak dopočteme body

$$\left[\sqrt{\frac{7}{6}}\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \right], \quad \left[-\sqrt{\frac{7}{6}}\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \right].$$

Maximum nabývá f v těchto bodech, minimum pak v $[0, 0]$.

♣

9.8.49. Příklad. Nalezněte $C^2(\mathbb{R}^2)$ -funkci $z(x, y)$ splňující

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = x + y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

přičemž pro ni platí $z(x, 0) = x$ a $z(0, y) = y^2$.

Řešení. Funkce

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi_0(y),$$

kde φ_0 je spojitě diferencovatelná funkce, zjevně splňuje $u_x = x + y$. Tedy

$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} + \varphi(y) + \psi(x),$$

kde φ je primitivní k φ_0 , $\varphi(0) = 0$ a ψ je třídy C^1 , splňuje $z_y = u$. Tedy $z_{yx} = x + y$.

Jelikož

$$x = z(x, 0) = \psi(x)$$

a

$$y^2 = z(0, y) = \varphi(y),$$

máme

$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} + y^2 + x.$$

♣

9.8.50. Příklad. Rozviňte funkci $f(x, y) = x^y$ do Taylorova polynomu řádu 2 na okolí bodu $[1, 1]$.

Řešení. Počítejme pro $[x, y] \in (0, \infty)^2$:

$$f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \log x$$

a dále

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy} = (1 + y \log x)x^{y-1}, \quad f_{yy} = x^y \log^2 x.$$

Tedy $f(1, 1) = 1$, $\nabla f(1, 1) = [1, 0]$ a

$$f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto

$$T_2^{f, [1, 1]}(x, y) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1).$$

♣

9.8.51. Příklad. Vyšetřete extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \log x - 10 \log y, \quad [x, y] \in (0, \infty)^2.$$

Řešení. Máme

$$\nabla f(x, y) = \left[2x + y - \frac{4}{x}, 2y + x - \frac{10}{y} \right].$$

Soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y &= \frac{4}{x} \\ x + 2y &= \frac{10}{y} \end{aligned}$$

upravíme na soustavu

$$\begin{aligned} 2x^2 + yx &= 4 \\ xy + 2y^2 &= 10. \end{aligned}$$

Odečtením rovnic dostáváme $y^2 - x^2 = 3$, tj. $y = \sqrt{3 + x^2}$. Po dosazení do druhé rovnice máme

$$2(3 + x^2) + x\sqrt{3 + x^2} = 10.$$

Řešením této rovnice je bod $x = 1$, a tedy $y = 2$.

Dále je

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$f''(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Z pozitivní definitnosti této matice nyní vyplývá, že f má v $[1, 2]$ lokální minimum o hodnotě $m = 7 - 10 \log 2$. Ukážeme, že se jedná o globální minimum.

Jelikož

$$f(x, y) \geq x \left(x - 4 \frac{\log x}{x} \right) + y \left(y - 10 \frac{\log y}{y} \right),$$

existuje $c_1 > 0$ takové, že pokud $\max\{x, y\} \geq c_1$, pak $f(x, y) > m$. Dále platí

$$f(x, y) > -4 \log x - 10 \log y,$$

a tedy existuje $c_2 \in (0, c_1)$ takové, že $f(x, y) > m$ kdykoliv $0 < \min\{x, y\} < c_2$. Tedy $f(x, y) > m$, kdykoliv $[x, y] \in (0, \infty)^2 \setminus ((c_2, c_1) \times (c_2, c_1))$. Na kompaktní množině $[c_2, c_1] \times [c_2, c_1]$ nabývá f svého minima. Vzhledem k předchozím úvahám je bod $[1, 2]$ jediný kandidát na toto minimum.

Tedy f má vskutku v $[1, 2]$ globální minimum. Zjevně také platí $\sup f(\mathcal{D}(f)) = \infty$. ♣

9.8.52. Příklad. Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Jelikož

$$\nabla f(x, y, z) = [3x^2 - 3y - 3z, 3y^2 - 3x - 3z, 3z^2 - 3x - 3y],$$

řešíme soustavu

$$\begin{aligned}x^2 &= y + z \\y^2 &= x + z \\z^2 &= x + y.\end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$x^2 - y^2 = y - x.$$

Tedy $x = y$ nebo $x + y = -1$. V prvním případě mám ze třetí rovnice $y = \frac{z^2}{2}$, což po dosazení do druhé rovnice dává

$$\frac{z^4}{4} = \frac{z^2}{2} + z.$$

Pokud $z = 0$, máme podezřelý bod $[0, 0, 0]$. V opačném případě platí

$$0 = z^3 - 2z - 4 = (z - 2)(z^2 + 2z + 2),$$

tj. $z = 2$ a máme bod $[2, 2, 2]$. Pokud $x + y = -1$, máme ve třetí rovnici vztah $z^2 = -1$, což nelze. Tedy body $[0, 0, 0]$ a $[2, 2, 2]$ jsou jediné podezřelé z lokálního extrému.

Jelikož

$$f''(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & -3 \\ -3 & -3 & 6z \end{pmatrix},$$

platí

$$f''(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

První matici upravíme pomocí symetrických elementárních úprav na matici

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, a tedy f nemá v $[0, 0, 0]$ lokální extrém. Druhou matici převedeme na

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & \frac{45}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{54}{5} \end{pmatrix},$$

což je pozitivně definitní matice. Funkce f má tak v $[2, 2, 2]$ lokální minimum. ♣

9.8.53. Příklad. Necht $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Z = \mathbb{R}$, ϱ a σ jsou eukleidovské metriky na $\mathbb{R}^2$ a τ je eukleidovská metrika na $\mathbb{R}$. Necht zobrazení $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definováno předpisem

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{pokud buď } x \neq 0 \text{ nebo } y \neq 0; \\ 0, & \text{pokud } x = y = 0. \end{cases}$$

(a) Necht $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x, kx) = 0.$$

(b) Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x, x^2) = \frac{1}{2}.$$

9.9. Početní příklady k metrickým prostorům

9.9.1. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}.$$

Řešení. Víme, že polynomy jsou spojité funkce, a proto je $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ spojitá funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$. Zadaná množina se dá zapsat jako

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: f(x, y) \in [36, \infty)\} = f^{-1}([36, \infty)).$$

Z Příkladu 8.3.2(a) víme, že interval $[36, \infty)$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$. Podle Věty 8.4.6 je tedy M uzavřená množina, neboť je to vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.

Zadaná množina je elipsa, a proto je omezená. Formálně můžeme například ze zadané nerovnosti usoudit $x^2 \leq 9x^2 + 4y^2 \leq 36$, a tedy $x \in [-6, 6]$. Podobně z nerovnosti $y^2 \leq 9x^2 + 4y^2 \leq 36$ odvodíme $y \in [-6, 6]$. Tedy $M \subset [-6, 6]^2 \subset B([0, 0], 10)$, což ukazuje omezenost M . ♣

9.9.2. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: xy > 1\}.$$

Řešení. Funkce $f(x, y) = xy$ je polynom, a tedy spojitá funkce. Zadaná množina se dá napsat jako $M = f^{-1}((1, \infty))$. Množina $(1, \infty)$ je otevřená, a tedy podle Příkladu 8.3.8 je M otevřená jakožto vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení.

Pro $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, snadno vidíme, že $[k, k] \in M$, ale $\text{dist}([k, k], [0, 0]) \rightarrow \infty$. Zadaná množina není tedy obsažena v žádné kouli, a proto není omezená. ♣

9.9.3. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + 6x + y^2 - 8y + z^2 + 10z = 0\}.$$

Řešení. Funkce $f(x, y, z) = x^2 + 6x + y^2 - 8y + z^2 + 10z$ je polynom, a tedy spojitá funkce. Zadaná množina se dá napsat jako $M = f^{-1}(\{1\})$. Jednobodová množina $\{1\}$ je uzavřená, a tedy podle Věty 8.4.6 je M uzavřená jakožto vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.

Zadanou rovnost si můžeme přepsat jako

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = 50,$$

odkud snadno vidíme

$$|x + 3| \leq \sqrt{50}, |y - 4| \leq \sqrt{50} \text{ a } |z + 5| \leq \sqrt{50}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} M &\subset [-3 - \sqrt{50}, -3 + \sqrt{50}] \times [4 - \sqrt{50}, 4 + \sqrt{50}] \times [-5 - \sqrt{50}, -5 + \sqrt{50}] \\ &\subset B([0, 0, 0], 30) \end{aligned}$$

z čehož dostaneme omezenost M . ♣

9.9.4. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ a } x + y \geq 1\}.$$

Řešení. Zdefinujme si množiny

$$M_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \text{ a } M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y \geq 1\}.$$

Snadno vidíme, že $M = M_1 \cap M_2$. Funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ je spojitá, a tedy je $M_1 = f^{-1}([1, \infty))$ uzavřená množina podle Věty ????. Dále $g(x, y, z) = x + y$ je spojitá funkce, a tedy je $M_2 = g^{-1}([1, \infty))$ uzavřená množina podle Věty ????. Podle Věty ??? je tedy i $M = M_1 \cap M_2$ uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin. Z

$$M \subset M_1 = \overline{B([0, 0, 0], 1)} \subset B([0, 0, 0], 2)$$

snadno dostáváme omezenost M . ♣

9.9.5. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5 \text{ a } xy + xz + yz = 8\}.$$

Řešení. Zdefinujme si množiny

$$M_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5\} \text{ a } M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : xy + xz + yz = 8\}.$$

Snadno vidíme, že $M = M_1 \cap M_2$. Funkce $f(x, y, z) = x + y + z = 5$ je spojitá, a tedy je $M_1 = f^{-1}(\{5\})$ uzavřená množina podle Věty ????. Dále $g(x, y, z) = xy + xz + yz$ je spojitá funkce, a tedy je $M_2 = g^{-1}(\{8\})$ uzavřená množina podle Věty ????. Podle Věty ??? je tedy i $M = M_1 \cap M_2$ uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin.

Důkaz omezenosti této množiny je trochu složitější. Ze zadaných dvou rovností snadno usoudíme, že

$$9 = 25 - 16 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Zadaná M je tedy podmnožina sféry se středem v $[0, 0, 0]$ a poloměru 3. Odtud ihned vidíme, že $M \subset B([0, 0, 0], 4)$, odkud plyne omezenost M . ♣

Literatura

1. A. Anzenbacher, *Úvod do filozofie*, SPN, Praha 1990.
2. Archimédés, *O měření kruhu*, přibližně 250 př. n. l.
3. B. Balcar, P. Štěpánek, *Téorie množin*, Academia, 2005.
4. J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress 2010.
5. K. M. Ball, *Strange curves, counting rabbits, and other mathematical explorations*, Princeton University Press, 2003.
6. J. H. Conway, *The weird and wonderful chemistry of radioactive decay*, Open Problems in Communication and Computation, T.M. Cover and B. Gopinath, eds., Springer, 1987, pp. 173--188.
7. J. H. Conway a R.K. Guy, *The book of numbers*, New York: Copernicus 1996.
8. B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003.
9. A. Gelfond, *Sur le septieme Probleme de Hilbert*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. **7** (1934), 623--630.
10. P. Hájek, P. Habala, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces*, Matfyzpress 1996.
11. A. M. Gleason, *Fundamentals of abstract analysis*, Addison-Wesley 1966.
12. P. R. Halmos, *Measure theory*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York 1950.
13. P. R. Halmos, *Naive set theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg 1974.
14. V. Jarník, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
15. V. Jarník, *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1956.
16. V. Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
17. T. Jech, *Set theory*, Springer 2002.
18. A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer 1995.
19. J. Lukeš, J. Malý, *Measure and integral*, Matfyzpress.
20. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1964.
21. T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I.*, J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 65--69.
22. A. Sochor, *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001.
23. R. Smullyan, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Mladá Fronta, 1986.
24. A. Tarski, *Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd*, Academia, Praha 1969.
25. B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z. **32** (1930), 474--475.
26. L. Zajíček, *Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, Matfyzpress, 2000.
27. L. Zajíček, *Vybrané partie z matematické analýzy pro 2. ročník*, Matfyzpress, 2007.