

9. URČITÝ INTEGRÁL – ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY.

Opakuj. Necht' $F(x)$ je definována v (a, b) . Má-li výraz

$$F(b-) - F(a+) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x)$$

smysl, nazýváme ho zobecněným přírůstkem funkce $F(x)$ od a do b . Značíme $[F(x)]_a^b$ nebo $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

Definice. Necht' $f(x)$ je definována v (a, b) , a necht' $F(x)$ je p.f. k $f(x)$ v (a, b) . Potom Newtonův integrál funkce $f(x)$ od a do b definujeme jako

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b,$$

má-li pravá strana smysl. Je-li $b < a$, definujeme $(\mathcal{N}) \int_a^b f = -(\mathcal{N}) \int_b^a f$, a dále klademe $(\mathcal{N}) \int_a^a f = 0$.

Terminologie a značení. Množinu těch funkcí, pro které Newtonův integrál od a do b existuje a je konečný (neboli konverguje), značíme $\mathcal{N}(a, b)$. Množinu těch funkcí, pro které integrál existuje (a může být konečný nebo nekonečný), značíme $\mathcal{N}^*(a, b)$.

Poznámka. [Základní vlastnosti N.i.] Necht' $f(x), g(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

① [linearita]

$$(\mathcal{N}) \int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha (\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx + \beta (\mathcal{N}) \int_a^b g(x) dx,$$

má-li pravá strana smysl.

② [intervalová aditivita] Necht' $f(x)$ je spojitá v bodě $c \in (a, b)$. Potom

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx = (\mathcal{N}) \int_a^c f(x) dx + (\mathcal{N}) \int_c^b f(x) dx,$$

má-li pravá strana smysl.

③ [monotonie] (i) Je-li $f \geq 0$, pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

(ii) Obecněji, je-li $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in (a, b)$, je

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx \geq (\mathcal{N}) \int_a^b g(x) dx.$$

(iii)

$$\left| (\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx \right| \leq (\mathcal{N}) \int_a^b |f(x)| dx.$$

(Mají-li všechny uvedené integrály smysl.)

* **Věta 9.7.** [Per-partes pro N.i.] Necht' existují vlastní $u'(x)$, $v'(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Potom

$$(\mathcal{N}) \int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - (\mathcal{N}) \int_a^b u(x)v'(x) dx,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ① $(\mathcal{N}) \int_0^1 x^p \ln x dx = -1/(p+1)^2$, pro $p > -1$

② $(\mathcal{N}) \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx = n!/a^{n+1}$, pro $n \geq 0$ celé, $a > 0$ libovolné.

* **Věta 9.8.** [Substituce pro N.i.] Necht' $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, necht' $\varphi(u) : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ je ryze monotónní, vzájemně jednoznačná funkce, a necht' $\varphi'(u)$ existuje konečná a nenulová všude v (α, β) . Potom

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx = (\mathcal{N}) \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du,$$

má-li jedna strana smysl (pak ho má i druhá a rovnají se).

Poznámka. Pravou stranu lze napsat i jako

$$\int_{\varphi^{-1}(a+)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

tj. bez absolutní hodnoty, ale pak je třeba zachovat pořadí mezí.

10. ŘADY

Definice. Necht' $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$. Symbol (1) $\sum_{k=1}^\infty a_k$ se nazývá řada. Posloupnost $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, kde

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady (1). Jestliže existuje (konečná nebo nekonečná) limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, pak číslo s nazveme součtem řady (1). Píšeme

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = s.$$

Terminologie: pokud $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada konverguje. V opačném případě diverguje. Divergence řady tedy nastane, pokud buď $s_n \rightarrow \pm\infty$ (řada diverguje do $\pm\infty$), nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje (řada osciluje).

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

③ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $q \in (-1, 1)$

④ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ osciluje

Věta 10.1. [Nutná podmínka konvergence.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Potom $a_k \rightarrow 0$.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ diverguje, pokud $|q| \geq 1$.

Věta 10.2. [Aritmetika řad.] Jsou dány řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ a čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

má-li pravá strana smysl. Speciálně, konvergují-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, pak také $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergují.

Lemma 10.1. Nechť a_k, b_k se liší jen v konečně členech. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Lemma 10.2. Nechť $a_k \geq 0$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když má omezené částečné součty.

Věta 10.3. [Srovnávací kritérium - nelimitní verze.] Jsou dány řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde $a_k, b_k \geq 0$. Nechť existuje $c > 0$, n_0 takové, že $a_k \leq c b_k$ pro $\forall k \geq n_0$. Potom:

(i) pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;

(ii) pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Věta 10.4. [Podílové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow q$ pro $k \rightarrow \infty$. Potom:

(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;

(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje.

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konverguje.

Poznámka. Pokud $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow 1$, nelze obecně nic říci. Například řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverguje, pro obě přitom platí $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow 1$.

* **Věta 10.5.** [Odmocninové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\sqrt[k]{a_k} \rightarrow q$ pro $k \rightarrow \infty$. Potom:

(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;

(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Tvrzení. Nechť $a_k > 0$, nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow q$ pro $k \rightarrow \infty$. Potom $\sqrt[k]{a_k} \rightarrow q$ pro $k \rightarrow \infty$.

Věta 10.6. [Integrální kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $a_k \geq 0$. Nechť existuje funkce $f(x)$ spojitá, nezáporná a nerostoucí v $[1, \infty)$ taková, že $a_k = f(k)$ pro $\forall k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $(\mathcal{N}) \int_1^{\infty} f(x) dx < +\infty$.

Příklady. ① Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje, právě když $a > 1$.

② Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\sqrt[3]{k})$ konverguje.

Definice. Řekneme, že a_k je řádově rovno b_k pro $k \rightarrow \infty$, jestliže $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}$ existuje a je konečná a nenulová. Značíme $a_k \sim b_k$.

Věta 10.7. [Srovnávací kritérium - limitní verze.] Nechť $a_k, b_k > 0$, nechť $a_k \sim b_k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$ diverguje.

② $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}$ konverguje.

Věta 10.8. [Raabeho kritérium.] Nechť $a_k > 0$, nechť $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \rightarrow p$. Potom:

(i) je-li $p > 1$, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;

(ii) je-li $p < 1$, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Poznámky. • uvažme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Protože $a_{k+1}/a_k = (k/(k+1))^2 \rightarrow 1$, podílové kritérium neumí rozhodnout; zato Raabe dává $k(a_k/a_{k+1} - 1) \rightarrow 2$, tj. řada konverguje. Vidíme, že Raabe je silnější (jemnější) nástroj než podílové kritérium.

• pokud $k(a_k/a_{k+1} - 1) \rightarrow 1$, nelze pomocí Raabeho kritéria rozhodnout.

Poznámky k $\mathbb{C}$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, kde $i^2 = -1$, $x, y \in \mathbb{R}$. Značíme $x = \operatorname{Re} z$ (reálná část), $y = \operatorname{Im} z$ (imaginární část).

Definujeme $\bar{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené), $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$ (absolutní hodnota).

Platí:

(i) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$

(ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ pro $\forall z, w \in \mathbb{C}$

Konvergence v $\mathbb{C}$: pro $z_n, z \in \mathbb{C}$ píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ neboli $z_n \rightarrow z$, jestliže (formálně stejně jako v $\mathbb{R}$): $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) : n \geq n_0 \implies |z - z_n| < \varepsilon$.

Ekvivalentně: $z_n \rightarrow z$ platí, právě když $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z$.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pokud s_n (posloupnost částečných součtů) má limitu v $\mathbb{C}$.

Ekvivalentně: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (v $\mathbb{C}$), právě když $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují (v $\mathbb{R}$). V takovém případě platí:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k.$$

Opakuji. Řekneme, že posloupnost $\{b_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je Cauchyovská), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)[|b_m - b_n| < \varepsilon]. \quad (\text{BC})$$

Dokázali jsme (viz Věta 7.5 v ZS), že posloupnost $\{b_n\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje, právě když splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku. Tato věta platí i pro posloupnosti v $\mathbb{C}$ a mnoha jiných prostorech (uvidíme v Kapitole 13).

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (\forall p \in \mathbb{N}) \left[\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right]. \quad (\text{BC-r})$$

Pozorování. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje (BC-r), právě když s_n (posloupnost částečných součtů) splňuje (BC).

Věta 10.9. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady (BC-r).

Věta 10.10. [O absolutní konvergenci.] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Potom také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, tak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (která konverguje díky předchozí větě) nazveme *absolutně konvergentní*.

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, a zároveň $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverguje, potom řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazveme *neabsolutně konvergentní*.

* **Věta 10.11.** [Leibnizovo kritérium.] Nechť $b_k \rightarrow 0$ a nechť $\{b_k\}$ je od jistého indexu monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ konverguje.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^\alpha}$ konverguje absolutně pro $\alpha > 1$ a neabsolutně pro $\alpha \in (0, 1]$.

Lemma 10.3. [Abelova parciální sumace.] Nechť $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pro $m > n$ definujme $\tilde{s}_m = \sum_{k=n+1}^m a_k$. Potom $\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = \tilde{s}_m b_{m+1} + \sum_{k=n+1}^m \tilde{s}_k (b_k - b_{k+1})$ pro $\forall m > n$.

Analogie. Per-partes $\int ab = \tilde{s}b + \int \tilde{s}(-b)'$, kde $\tilde{s} = \int a$, tj. suma místo integrálu, difference místo derivace.

Věta 10.12. [Dirichletovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) má omezené částečné součty. Nechť $b_k \rightarrow 0$ a nechť posloupnost $\{b_k\}$ je od jistého indexu monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

* **Lemma 10.4.** Nechť $x \neq 2m\pi$. Potom

$$\sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$\sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Důsledek. Necht' $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2m\pi$. Potom řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ mají omezené částečné součty.

Věta 10.13. [Abelovo kritérium.] Necht' $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) konverguje. Necht' posloupnost $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ je omezená, a od jistého indexu monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Poznámka. Předpoklad monotonie (Věty 10.8, 10.12, 10.13) je podstatný a nelze ho vynechat. (Stačí však monotonie od jistého indexu).

Stejně tak je podstatný předpoklad $a_k > 0$, $b_k > 0$ ve Větě 10.7. (Stačilo by obecněji, že a_k , b_k nemění znamení od jistého indexu).

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}+(-1)^k}$ diverguje.

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \arctg k}{k}$ konverguje.

Definice. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a \geq 0 \end{cases}$$

tzv. kladnou resp. zápornou část čísla a .

Poznámka. Platí: $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ a $0 \leq a^+$, $a^- \leq |a|$.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$ konverguje absolutně.

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje neabsolutně.

Definice. Necht' $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. Necht' existuje $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné zobrazení takové, že $a_k = b_{\varphi(k)}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se nazve přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Věta 10.14. Necht' $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je libovolné přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Necht' buď (i) $a_k \geq 0$, nebo (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně (kde $a_k \in \mathbb{C}$). Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

* **Věta 10.15.** Necht' $a_k \in \mathbb{R}$, necht' $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně, necht' $s \in \mathbb{R}^*$ je libovolné. Potom existuje přerovnání, jehož součet je s .

Poznámka. Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$. Je správná úvaha "nejdříve sečtu všechny kladné členy, pak všechny záporné, pak to složím a mám výsledek"? Formálně jde o rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Pro absolutně konvergentní řady to platí. V případě neabsolutně konvergentní řady ne: napravo totiž je $+\infty - \infty$.

Věta 10.16. [Cauchyův součin řad.] Necht' řady $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergují absolutně. Pro $k = 0, 1, \dots$ označme $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$. Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

a řada vlevo konverguje absolutně.

Příklad. Označ $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Tato řada konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$ a platí $E(z) \cdot E(w) = E(z+w)$ pro $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

11. MOCNINNÉ ŘADY.

Definice. Mocninnou řadou rozumíme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (M).$$

kde z_0 je střed řady, c_k jsou koeficienty řady; řadu chápeme jako funkci proměnné z . Předpokládáme $c_k, z_0, z \in \mathbb{C}$. Platí úmluva $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$, tj. řada vypadá $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$.

Poznámky. • mocninná řada ... zobecněný polynom

• mnoho funkcí se dá napsat jako součet mocninné řady, např. $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$ pro $|z| < 1$.

Věta 11.1. [Poloměr konvergence.] Je dána mocninná řada (M). Potom existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí:

- (i) pokud $|z - z_0| < R$, tak (M) konverguje absolutně;
- (ii) pokud $|z - z_0| > R$, tak (M) diverguje.

Terminologie. Číslo R z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence řady. Množina $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ resp. $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = R\}$ se nazývá kruh resp. kružnice konvergence. Zjevně může existovat jen jedno číslo R , které splní obě vlastnosti (i), (ii) - tj. poloměr konvergence je určen jednoznačně.

Věta 11.2. Je dána řada (M). Nechť $c_k \neq 0$ a nechť $|\frac{c_{k+1}}{c_k}| \rightarrow r$. Potom $R = \frac{1}{r}$ (s úmluvou $\frac{1}{+\infty} = 0, \frac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Příklady. ① $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$... $R = 1$, na kružnici konvergence řada diverguje

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$... $R = 1$, na kružnici konvergence řada konverguje absolutně

Věta 11.3. Je dána řada (M). Nechť $\sqrt[k]{|c_k|} \rightarrow r$. Potom $R = \frac{1}{r}$ (s úmluvou $\frac{1}{+\infty} = 0, \frac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Poznámka. Jedním z hlavních cílů kapitoly je dokázat rovnost

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Formálně jde o "derivování řady člen po členu", neboli o záměnu $\sum$ a $\frac{d}{dz}$.

Řada vpravo je také mocninná řada - můžeme ji přepsat jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z - z_0)^k, \quad \tilde{c}_k = (k+1)c_{k+1}.$$

Lemma 11.1. Řady $(M_1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ a $(M_2) \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důsledek. Také řady $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k (z - z_0)^{k-2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$ mají stejný poloměr konvergence jako řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$.

Heslo: formálním derivováním/integrovaním člen po členu se nemění poloměr konvergence.

Věta 11.4. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$. Označme

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Potom $F'(z) = f(z)$ pro $\forall z \in U(z_0, R)$, kde $U(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$.

Poznámky. • funkce $F(z)$, $f(z)$ jsou pro $z \in U(z_0, R)$ korektně definovány, neboť dané řady konvergují absolutně (Lemma 11.1.)

• tvrzení platí ve smyslu derivace podle komplexní proměnné, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \left[0 < |h| < \delta, h \in \mathbb{C} \implies \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon \right],$$

kde $z \in U(z_0, R)$ je libovolné.

• speciální případ je i derivace podle reálné proměnné, tj. $F'(x) = f(x)$, pro každé x z intervalu $(-R, R)$

Důsledky. Na množině $U(z_0, R)$ platí:

• funkce $F(z)$ je nekonečně diferencovatelná a $F''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k (z - z_0)^{k-2}$, $F^{(3)}(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)c_k (z - z_0)^{k-3}$ atd.

• funkce $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$ je primitivní funkce k $F(z)$, tj. $\Phi'(z) = F(z)$

Příklad. $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Potom $E'(z) = E(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

Věta 11.5. Nechť řada $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Potom $F^{(k)}(z_0) = k! c_k$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$

Důsledek. Nechť řada $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Potom n -tý Taylorův polynom funkce $F(z)$ o středu z_0 je roven n -tému částečnému součtu řady příslušné mocninné řady.

Věta 11.6. Nechť řady $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ a $\tilde{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z - z_0)^k$ mají kladný poloměr konvergence. Nechť $F(z) = \tilde{F}(z)$ na jistém $U(z_0)$. Potom $c_k = \tilde{c}_k$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$

Důsledek. Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = 0$ pro $\forall z$ z nějakého $U(z_0)$. Potom $c_k = 0$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$

Poznámka. Srovnej s příbuznou větou: nechť $p, \tilde{p}$ jsou polynomy, nechť $p(x) = \tilde{p}(x)$ pro nekonečně x . Potom $p, \tilde{p}$ jsou identické, tj. mají stejné koeficienty.

* **Věta E.** Existuje funkce $\exp x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, splňující:

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

2. $\exp x$ je rostoucí a spojitá v $\mathbb{R}$;

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Funkce $\exp x$ je těmito vlastnostmi určena jednoznačně.

Poznámka. V důkaze předchozí věty položíme

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$$

podobně definujeme

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

a dokážeme Větu C, s využitím následujícího Lemmatu.

Lemma 11.2. Pro $\forall x, y \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} \exp(x + iy) &= \exp(x) [\cos y + i \sin y], \\ \sin x &= \frac{1}{2i} [\exp(ix) - \exp(-ix)] = \frac{1}{i} \sinh(ix), \\ \cos x &= \frac{1}{2} [\exp(ix) + \exp(-ix)] = \cosh(ix). \end{aligned}$$

Definice. Funkce $F(z)$ se nazve analytická v bodě z_0 , jestliže existují $c_k \in \mathbb{C}$ tak, že $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ na jistém $U(z_0)$.

Funkce se nazve analytická v množině Ω , je-li analytická v každém bodě Ω .

Příklad. Funkce $\exp(z)$ je analytická v $\mathbb{C}$, neboť lze psát $\exp z = \exp z_0 \exp(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp z_0}{k!} (z - z_0)^k$.

12. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE.

Úmluva. V celé kapitole jsou I, J otevřené intervaly.

Definice. Nechť $F(x, y, z_1, \dots, z_n)$ je reálná funkce $(n + 2)$ proměnných, která není konstantní vůči z_n . Potom výraz

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n pro neznámou funkci y proměnné x .

Řešením rovnice (1) rozumíme funkci $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, která má vlastní derivace až do řádu n všude v I , a

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

pro každé $x \in I$.

Definice. Necht' $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou dvě řešení, přičemž interval $\tilde{I}$ je striktně větší než I , a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in I$.

Potom $\tilde{y}$ se nazve prodloužením y , a naopak y se nazve restrikcí $\tilde{y}$.

Příklad. Funkce $y_1(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0)$, $y_2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ a

$$y_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

jsou všechny řešení rovnice $y' = 2\sqrt{y}$. Vidíme, že y_2 , y_3 jsou dvě různá prodloužení řešení y_1 . V bodě $x = 0$ nastává větvení (nejednoznačnost).

Definice. Obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu rozumíme výraz

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2)$$

kde $F = F(x, y, z)$ je nekonstantní vůči z . Řešením rovnice (2) je funkce $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž $y'(x)$ existuje vlastní všude v I a $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ pro $\forall x \in I$.

Definice. Lineární ODR 1. řádu rozumíme

$$y' + a(x)y = b(x). \quad (3)$$

Věta 12.1. [Řešení lineární ODR 1. řádu.] Je dána rovnice (3). Necht' $a(x)$, $b(x)$ jsou spojitě v I , necht' $A(x) = \int a(x) dx$, $B(x) = \int b(x) \exp A(x) dx$ v I . Necht' $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom

$$y(x) = \exp(-A(x)) [B(x) + c]$$

je řešení rovnice (3) v I . Naopak: všechna řešení rovnice (3) mají tento tvar.

Poznámka. Výraz $\exp A(x)$ se nazývá integrační faktor.

Příklad. rovnice: $y' + y \cos x = \exp(-\sin x)$, i.f.: $\exp \sin x$, obecné řešení: $y(x) = [x + c] \exp(-\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Rovnice

$$y' = g(y)f(x) \quad (4)$$

se nazývá rovnice se separovanými proměnnými.

Věta 12.2. [Řešení rce se sep. prom.] Je dána rovnice (4). Necht' $f(x)$ je spojitá v I , necht' $g(y)$ je spojitá a nenulová v J . Necht' $F(x)$ resp. $G(y)$ jsou p.f. k $f(x)$ resp. $1/g(y)$ v I resp. v J .

Označ $G_{-1}(z)$ funkci inverzní ke $G(y)$. Nechť konstanta $c \in \mathbb{R}$ a interval $I_c \subset I$ jsou zvoleny tak, že $F(x) + c$ leží v definičním oboru $G_{-1}(z)$ (tj. v $G(J)$) pro $\forall x \in I_c$.

Potom funkce

$$y(x) = G_{-1}(F(x) + c), \quad x \in I_c$$

je řešení rovnice (4).

Poznámka. Předpoklad „ $F(x)+c$ leží oboru hodnot G “ je potřeba hlídat – bezhlavý výpočet totiž může snadno vést k řešení, které řešením není.

Příklad. Rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$. Aplikací předchozí věty nacházíme dva typy řešení:

1. typ: $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty, 0)$, $G(y) = -\sqrt{-y}$, $F(x) = x$. Tedy $G(J) = (-\infty, 0)$, $\tilde{I} = (-\infty, -c)$. nalezené řešení $y(x) = -(x+c)^2$, $x \in (-\infty, -c)$.

Pozor: pro $x > -c$ daná funkce NENÍ řešení rovnice.

2. typ: podobně - $J = (0, \infty)$, $G(y) = \sqrt{y}$, $G(J) = (0, \infty)$. Nalezené řešení $y(x) = (x+c)^2$, $x \in (-c, \infty)$. (Opět není řešení pro $x < -c$).

3. typ: zjevně $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je řešení.

Poznámka. V dalším se zaměříme na rovnici tvaru

$$y' = f(x, y), \tag{5}$$

- tzv. rovnice vyřešená vzhledem k derivaci - která je z hlediska teorie „šikovnější“ než obecný tvar (2).

Lemma 12.1. [O napojování.] Nechť $y_1(x) : (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $y_2(x) : (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice (5). Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0+} y_2(x)$. Nechť $f(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0) \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

je řešením rovnice (5) v celém (a, b) .

Příklad. Funkce

$$y(x) = \begin{cases} -(x+c)^2, & x < -c \\ 0, & x \geq -c \end{cases}$$

(tj. napojení řešení typu 1 a 3) je řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ v $\mathbb{R}$.

Lemma 12.1 řeší vlastně jedinou věc: že rovnice je splněna v bodě napojení (jinde je to jasné) a říká, že to je zaručeno, slepím-li řešení spojitě. Srovnej s Lemmatem 6.2 (o lepení primitivní funkce) v minulém semestru.

Poznámka. Obecný postup řešení rovnice se separovanými proměnnými (4):

- pokud $y_0 \in \mathbb{R}$ je takové, že $g(y_0) = 0$, pak $y(x) = y_0$ je tzv. singulární (stacionární) řešení (na každém intervalu, na němž je definována $f(x)$.)

- pomocí Věty 12.2 hledám řešení $y(x) : I \rightarrow J$, kde $f(x)$ je spojitá I , $g(y)$ je spojitá, nenulová v J .
- pomocí Lemmatu 12.1 nalezená řešení napojuji.

Definice. Řekneme, že řešení $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ rovnice (5) prochází bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, jestliže (i) $x_0 \in I$ a (ii) $y(x_0) = y_0$.

Řekneme, že v bodě (x_0, y_0) nastává větvení, jestliže existují dvě řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$, která tímto bodem procházejí, avšak která se neshodují na žádném okolí x_0 . Tj. $\forall \delta > 0 \exists \tilde{x} \in U(x_0, \delta)$ tak, že $y_1(\tilde{x}) \neq y_2(\tilde{x})$.

Příklad. Pro rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$ nastává v bodě $(0, 0)$ větvení: $y_1(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $y_2(x) = x^2$ pro $x > 0$ a $= 0$ pro $x \leq 0$.

Poznámka. Jestliže $y(x)$ řešení rovnice (5) prochází bodem (x_0, y_0) , pak nutně $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$. Geometricky: pokud stejným bodem prochází více řešení, mají zde stejnou tečnu - jejich grafy se „dotýkají“, nemohou se „křížit“.

* **Věta 12.3.** [Peano.] Nechť $f(x, y)$ je spojitá na okolí bodu (x_0, y_0) . Potom bodem (x_0, y_0) prochází alespoň jedno řešení rovnice (5). Podrobněji: existuje $\delta > 0$ a funkce $y(x) : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, která řeší (5) a splňuje $y(x_0) = y_0$.

* **Věta 12.4.** [Picard.] Nechť funkce $f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ jsou spojitě na okolí bodu (x_0, y_0) . Potom bodem (x_0, y_0) prochází právě jedno řešení rovnice (5). Podrobněji: existuje $y(x)$ řešení (5) procházející (x_0, y_0) , a je-li $\tilde{y}(x)$ jiné řešení, procházející (x_0, y_0) , tak existuje $\delta > 0$ tak, že $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in U(x_0, \delta)$. Speciálně: v bodě (x_0, y_0) nenastává větvení.

Příklad. Pro rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$ zaručují výše uvedené věty, že (i) každým bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ prochází alespoň jedno řešení a (ii) větvení může nastat jen v bodech $(x_0, 0)$.

Definice. Řešení $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ dané ODR se nazve maximální, jestliže ho nelze prodloužit, tj. neexistuje $\tilde{y}(x) : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ takové řešení, že $I \subsetneq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in I$.

Poznámky. Náš cíl při řešení dané rovnice: najít všechna maximální řešení.

Řešení $y(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ rovnice (5) určitě nejde prodloužit za bod $x = b$, jestliže (i) $b = +\infty$ nebo (ii) $y(x) \rightarrow \infty$ pro $x \rightarrow b-$ a nebo (iii) $y(x) \rightarrow y_0$ pro $x \rightarrow b-$, avšak bod (b, y_0) neleží v definičním oboru funkce $f(x, y)$.

Jak poznám, že mám všechna řešení? Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a funkce $f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ jsou spojitě v Ω . Jestliže najdu nějakou třídu $\{y_c(x)\}_{c \in \mathbb{R}}$ řešení rovnice (5) takových, že jejich grafy vyplní celou Ω , pak díky Větě 12.4 jsou to zároveň všechna řešení, která se v Ω mohou vyskytnout.

Definice. Rovnice $y' = f(x, y)$ se nazve homogenní, pokud $f(x, y)$ splňuje $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ pro $\forall \lambda \neq 0$.

Postup řešení: položíme $y(x) = xz(x)$ – přejde na rovnici se separovanými proměnnými (pro novou neznámou funkcí $z(x)$.) Pozor na bod $x = 0$.

Příklad. $x^2y' + xy = 2y^2$.

Definice. Rovnice $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$, kde $\alpha \neq 0, 1$, se nazývá Bernoulliho rovnice.

Postup řešení: substitucí $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$ převedeme na lineární rovnici (pro novou neznámou funkci $z = z(x)$).

Pozor na práci s odmocninou (znaménko $y(x)$ resp. $z(x)$).

Příklad. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$, tj. $\alpha = 1/2$, $z = \sqrt{y}$ vede na $z' - 2z/x = x/2$, kterou lze řešit pomocí i.f. $1/x^2$.

Definice. Systémem n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu rozumíme

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \quad (6)$$

tj. rovnice $y'_i(x) = F_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$, $i = 1, \dots, n$, kde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou neznámé funkce, a $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou dány.

Přirozená počáteční podmínka je

$$\mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\eta}, \quad (7)$$

neboli $y_i(x_0) = \eta_i$, $i = 1, \dots, n$, kde $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Platí věty analogické Větě 12.3 a 12.4: $\mathbf{F}$ spojitá zaručuje lokální existenci, $\mathbf{F}$ třídy C^1 navíc i jednoznačnost řešení (splňujícího danou počáteční podmínku).

Definice. Rovnicí n -tého řádu, vyřešenou vůči nejvyšší derivaci, rozumíme

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (8)$$

d'Alembertova transformace. Funkce $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je řešením rovnice (8), právě když vektorová funkce $\mathbf{z}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, kde

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

řeší systém

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_2 \\ z'_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ z'_{n-1} &= z_n \\ z'_n &= f(x, z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Počáteční podmínka $\mathbf{z}(x_0) = \boldsymbol{\eta}$ odpovídá počáteční podmínce pro y tvaru $y(x_0) = \eta_1$, $y'(x_0) = \eta_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$.

Poznámka. Přírozená počáteční podmínka (tj. taková, pro níž existuje právě jedno řešení) pro rovnici 1. řádu je určena hodnotou řešení v nějakém bodě.

Pro rovnici n -tého řádu je přírozené určit n počátečních podmínek, nejčastěji hodnotu a první až $(n - 1)$ -tou derivaci v nějakém bodě.

Definice. Lineární diferenciální rovnici řádu n rozumíme

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x). \quad (9)$$

Terminologie: $a_i(x)$... koeficienty rovnice, $f(x)$... pravá strana.

Značení $C(I)$... funkce $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, které jsou spojité; $C^k(I)$... funkce $y(x)$, které jsou spojité a jejichž derivace až do řádu k včetně jsou také spojité na I .

Řešením rovnice (9) rozumíme funkci $y(x) \in C^n(I)$, která splňuje (9) pro $\forall x \in I$.

Klíčový předpoklad (P). O rovnici (9) budeme předpokládat, že $a_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ a $f(x)$ jsou spojité v I (otevřený interval), navíc $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$.

* **Věta 12.5.** Je dána rovnice (9) a platí předpoklad (P). Nechť $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou libovolné. Potom existuje jediná funkce $y(x) \in C^n(I)$, která řeší (9) na celém I , a splňuje počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta_1 \\ y'(x_0) &= \eta_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \eta_n \end{aligned}$$

Poznámka. Existence řešení je zaručena na celém I (obor spojitosti a_i, f) – to je typické pro lineární rovnice. U nelineárních rovnic obecně nelze čekat více než lokální existenci řešení.

Značení. Při značení $\mathcal{L}[y] = \sum_{k=0}^n a_k(x)y^{(n-k)}$ můžeme rovnici (9) přepsat jako $\mathcal{L}[y] = f$. Speciální případ $f = 0$ je tzv. homogenní úloha

$$\mathcal{L}[y] = 0. \quad (10)$$

Věta 12.6. [Struktura řešení lineární rovnice řádu n .] Nechť platí předpoklad (P). Potom:

1. Množina $\mathcal{H}$ všech řešení homogenní úlohy (10) tvoří lineární podprostor dimenze n v prostoru $C^n(I)$.
2. Množina $\mathcal{N}_f$ všech řešení úlohy (9) má tvar $\{y_p + y; y \in \mathcal{H}\}$, kde y_p je libovolné, pevně zvolené řešení této úlohy.
3. Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je libovolná báze $\mathcal{H}$. Definujme $U_{ij}(x) = y_j^{(i-1)}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$. Potom pro každé $x \in I$ je $U(x)$ regulární matice v $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Terminologie. Bázi prostoru $\mathcal{H}$ nazýváme fundamentálním systémem (F.S.) rovnice (9). Pevně zvolené řešení y_p nazýváme partikulární řešení.

Matici z bodu 3. výše nazýváme Wronského maticí a její determinant se zve wronskián.

Příklad. Funkce $\{\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\}$ tvoří F.S. pro úlohu $y'' - \frac{2}{x}y' + y = 0$.

Poznámka. Obecný návod, jak nalézt fundamentální systém nebo partikulární řešení, neexistuje. Následující věta ale ukazuje, že pouhou integrací můžeme nalézt partikulární řešení, pokud už máme fundamentální systém.

Věta 12.7. [Variace konstant.] Je dána rovnice (9) $\mathcal{L}[y] = f$ a platí (P). Necht' $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém. Necht' $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$ splňují pro $\forall x \in I$ soustavu

$$\begin{aligned} c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) + \dots c'_n(x)y_n(x) &= 0 \\ c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) + \dots c'_n(x)y'_n(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + c'_2(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots c'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ c'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots c'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{aligned}$$

Potom funkce $y(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x)y_j(x)$ je řešením úlohy (9).

Poznámka. Soustava ve Větě 12.7. má tvar $U(x)C'(x) = B(x)$, kde $U(x)$ je regulární matice (viz Větu 12.6), $C'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))$ je neznámý vektor a $B(x) = (0, \dots, 0, \frac{f(x)}{a_0(x)})$. Můžeme tedy vyjádřit $c'_j(x)$ a integrací získat $c_j(x)$.

Definice. Rovnice

$$b_0y^{(n)} + b_1y^{(n-1)} + \dots + b_ny = f(x), \quad (11)$$

kde $b_j \in \mathbb{C}$ jsou konstanty ($b_0 \neq 0$), se nazývá lineární ODR řádu n s konstantními koeficienty. Značíme $\mathcal{K}[y] = \sum_{k=0}^n b_ky^{(n-k)}$. Rovnice

$$\mathcal{K}[y] = 0 \quad (12)$$

je odpovídající homogenní úloha.

Poznámka. Hlavní myšlenka teorie rovnic s konstantními koeficienty: hledejme řešení tvaru $y(x) = \exp(\lambda x)$. Pozoruj, že $\mathcal{K}[\exp(\lambda x)] = p(\lambda)\exp(\lambda x)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n b_k\lambda^{n-k}. \quad (13)$$

Tedy: je-li λ_0 kořenem polynomu $p(\lambda)$, tak funkce $\exp(\lambda_0 x)$ je řešením homogenní úlohy.

Definice. Polynom (13) se nazývá charakteristický polynom rovnice (11).

Poznámky. Každý polynom $p = p(\lambda)$ lze napsat jako

$$p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různé kořeny, a $n_1, \dots, n_s$ jsou jejich násobnosti.

Platí: $n_1 + \dots + n_s$ rovná se stupeň polynomu.

Dále: λ_0 je kořen polynomu $p(\lambda)$ násobnosti k , právě když $0 = p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = \dots = p^{(k-1)}(\lambda_0)$, avšak $p^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.

Ke stupni polynomu: $a\lambda + b$, kde $a \neq 0$, je polynom stupně 1. Nenulová konstanta je polynom stupně 0. Identicky nulová funkce se považuje za polynom záporného stupně.

Lemma 12.2. Je dán operátor $\mathcal{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Potom pro $\forall l \geq 0$ celé

$$\mathcal{K}[x^l \exp(\lambda x)] = \exp(\lambda x) \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{l-j}.$$

Důsledek. Je-li λ_0 kořen char. polynomu násobnosti k , pak funkce $\exp(\lambda_0 x)$, $x \exp(\lambda_0 x)$, $\dots$, $x^{k-1} \exp(\lambda_0 x)$ řeší homogenní úlohu (12).

Poznámka. Připomeňme tvrzení (které plyne např. jako speciální případ Věty 11.6): je-li $q(x)$ polynom a $q(x) \equiv 0$, tak nutně $q(x)$ je triviální (tj. má všechny koeficienty nulové.)

Totéž řečeno jinak: funkce $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ jsou lineárně nezávislé.

Následující lemma můžeme chápat jako zobecnění tohoto faktu.

Lemma 12.3. Nechtě $\lambda_j \in \mathbb{C}$ jsou vzájemně různá čísla, nechtě $q_j(x)$ jsou polynomy. Jestliže $\sum_{j=1}^m q_j(x) \exp(\lambda_j x) \equiv 0$, pak nutně $q_j(x) \equiv 0$ pro $\forall j$.

Věta 12.8. [F.S. pro $\mathcal{K}[y] = 0$.] Je dán operátor $\mathcal{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Nechtě λ_j , $j = 1, \dots, s$, jsou jeho kořeny, a n_j , $j = 1, \dots, s$, jsou odpovídající násobnosti. Potom funkce

$$x^l \exp(\lambda_j x) \quad j = 1, \dots, s, \quad l = 0, \dots, n_j - 1$$

tvoří fundamentální systém homogenní úlohy (12).

Příklad. $y^{(5)} - y^{(4)} - 5y^{(3)} + y'' + 8y' + 4y = 0$, charakteristický polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)^2$$

-1 je 3-násobný, 2 je 2-násobný kořen, $\implies$ fundamentální systém:

$$\{ \exp(-x), x \exp(-x), x^2 \exp(-x), \exp(2x), x \exp(2x) \}$$

obecné řešení:

$$K_1 \exp(-x) + K_2 x \exp(-x) + K_3 x^2 \exp(-x) + K_4 \exp(2x) + K_5 x \exp(2x)$$

kde $K_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. V případě, že $p(\lambda)$ má komplexní kořeny:

1. možnost: celou teorii uvažujeme "komplexní", tj. hledáme řešení $y(x) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, počáteční podmínka $y^{(j-1)}(x_0) = \eta_j$, $j = 1, \dots, n$, kde $\eta_j \in \mathbb{C}$. Takto to funguje a nevádí mi komplexní b_k , ani komplexní kořeny.

2. možnost: chceme "reálnou" variantu, tj. hledáme jen řešení $y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a máme $b_k \in \mathbb{R}$ (reálné koeficienty v rovnici.)

Z reálnosti b_k plynou dvě věci:

(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen $p(\lambda)$ násobnosti $k \implies \bar{\lambda}$ je kořen násobnosti k

(ii) funkce $y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ řeší $\mathcal{K}[y] = 0 \implies$ funkce $\operatorname{Re} y(x)$, $\operatorname{Im} y(x)$ řeší $\mathcal{K}[y] = 0$.

Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ kořen násobnosti k , získáme dle V.12.10 funkce

$$\begin{aligned} & \exp(\lambda x), x \exp(\lambda x), \dots, x^{k-1} \exp(\lambda x) \\ & \exp(\bar{\lambda} x), x \exp(\bar{\lambda} x), \dots, x^{k-1} \exp(\bar{\lambda} x) \end{aligned}$$

místo nich ale vezmeme jejich reálné a imaginární části

$$\begin{aligned} & \exp(\alpha x) \cos \beta x, x \exp(\alpha x) \cos \beta x, \dots, x^{k-1} \exp(\alpha x) \cos \beta x \\ & \exp(\alpha x) \sin \beta x, x \exp(\alpha x) \sin \beta x, \dots, x^{k-1} \exp(\alpha x) \sin \beta x \end{aligned}$$

- tak dojdeme k "reálné" verzi fundamentálního systému.

Příklad. $y'' + y = 0$, $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, kořeny $\pm i$. F.S. = $\{\exp(ix), \exp(-ix)\}$. Reálná verze F.S.: $\{\cos x, \sin x\}$.

Definice. Rovnice

$$\mathcal{K}[y] = q(x) \exp(\lambda_0 x), \quad (14)$$

kde $q(x)$ je polynom, se nazývá rovnice se speciální pravou stranou.

Pravá strana je ten typ funkce, kterým se zabývá Lemma 12.2., a ze kterých umíme sestavit fundamentální systém (Věta 12.8.) Uvidíme, že v této situaci lze řešení uhodnout jako funkci předepsaného tvaru.

Poznámka. Necht' $q_s(x)$, $s = 0, \dots, m$ jsou polynomy, kde stupeň q_s je s . Potom pro libovolný polynom $q(x)$ stupně m existují (jednoznačně určené) konstanty c_s , $s = 0, \dots, m$ takové, že $q(x) = \sum_{s=0}^m c_s q_s(x)$.

Věta 12.9. Je dána úloha (14), kde $q(x)$ je polynom stupně m . Necht' $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost λ_0 coby kořene charakteristického polynomu ($k = 0$ pokud λ_0 není kořen.)

Potom existuje $r(x)$ polynom stupně m takový, že $y(x) = x^k r(x) \exp(\lambda_0 x)$ je řešení (14).

Příklad. $y'' - y' - 2y = (x+1) \exp(2x)$. $\lambda_0 = 2$ je jednoduchý kořen char. polynomu, stupeň $q(x) = x+1$ je 1. Hledám řešení ve tvaru $y(x) = x r(x) \exp(2x)$, kde $r(x) = Ax + B$ je polynom stupně 1.

Dosazením do rovnice $A = 1/6$, $B = 2/9$.

* **Věta 12.9.'** Je dána úloha

$$\mathcal{K}[y] = \exp(\alpha x) [q_1(x) \cos \beta x + q_2(x) \sin \beta x], \quad (15)$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně $\leq m$. Necht' $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost čísla $\lambda = \alpha + \beta i$ coby kořene charakteristického polynomu.

Potom existují polynomy r_1, r_2 stupně $\leq m$ takové, že

$$y(x) = x^k \exp(\alpha x) [r_1(x) \cos \beta x + r_2(x) \sin \beta x]$$

je řešení (15).

Příklad. $y'' + y' - y = \cos x$. Typ (15), $\alpha = 0, \beta = 1, q_1 = 1, q_2 = 0$, tj. $m = 0$, číslo $\lambda = i$ není kořen char. polynomu.

Hledám řešení ve tvaru $y(x) = A \cos x + B \sin x$, dosazením do rovnice vyjde $A = -2/5, B = 1/5$.

Poznámka. Příklad ukazuje, že Větu 12.9.' nelze zjednodušit v tom smyslu, že pokud pravá strana obsahuje jenom $\cos$, pak najdu řešení, obsahující také jenom $\cos$.

Poznámka. Soustavu n -rovníc lineárních rovnic 1. řádu $X' = AX$, kde $X = X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ jsou neznámé funkce, matice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ lze řešit převedením na jednu (či vícero) rovnic vyššího řádu.

Postup: z první rovnice $x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots$ vyjádříme např. $x_2 = L(x'_1, x_1, x_3, \dots, x_n)$, kde $L(\dots)$ je nějaká lineární kombinace. Derivováním dostaneme $x'_2 = L(x''_1, x'_1, x'_3, \dots, x'_n)$. Dosazením do zbylých $n - 1$ rovnic obdržíme soustavu, která neobsahuje x_2 , je však řádu 2 (obsahuje x''_1). Analogicky vylučujeme další funkce x_i . (Fakticky jde o inverzní d'Alembertovu transformaci).

Příklad. Soustava (pro neznámé funkce $x = x(t), y = y(t)$):

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= -6x + y \end{aligned}$$

Z první rovnice: $y = 2x - x', y' = 2x' - x''$, dosazením do druhé rovnice

$$\begin{aligned} 2x' - x'' &= 2x - (2x - x') \\ x'' - 3x' - 4x &= 0 \\ \text{charakteristický polynom: } p(\lambda) &= (\lambda - 4)(\lambda + 1) \\ \text{obecné řešení: } x(t) &= K \exp(4t) + L \exp(-t) \end{aligned}$$

a protože $y = 2x - x'$, je $y(t) = -2K \exp(4t) + 2L \exp(-t)$.

13. METRICKÉ PROSTORY

Definice. Metrickým prostorem rozumíme dvojici (X, ϱ) , kde X je množina a funkce $\varrho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ je tzv. metrika, splňující (pro všechna $x, y, z \in X$):

- (i) $\varrho(x, y) \geq 0$, přičemž $\varrho(x, y) = 0$ právě když $x = y$
- (ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (symetrie)
- (iii) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Poznámky. Metrický prostor (dále m.p.) je obecná matematická struktura, v níž je možné měřit vzdálenost. Díky metrice zavedeme okolí, a tudíž i všechny základní pojmy analýzy (limita, konvergence, spojitost) ve zcela obecné situaci.

Příklady. ① $\mathbb{R}$ s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$
 ② na libovolné množině P lze zavést „diskrétní metriku“ jako

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Opakování. Vektorový prostor X je množina, jejíž prvky lze sčítat, násobit skalárem (typicky z $\mathbb{R}$), a obsahuje prvek $\mathbf{0}$ (nulový vektor.)

Definice. Normovaný vektorový prostor je dvojice $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor, a norma je přiřazení $x \mapsto \|x\|$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($\triangle$ -nerovnost)

Příklady. ① Na $\mathbb{R}^n$ lze zavést různé normy: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, nejčastější je Eukleidovská norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}, \quad \text{kde } \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n).$$

② Na prostoru $C([a, b])$ – spojitě funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – se obvykle používá „supremová“ norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}.$$

Jiná norma na témže prostoru je tzv. L^1 norma:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Důležitý příklad. Normovaný prostor je metrický prostor, kde metriku definujeme jako $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

Definice. (X, ϱ) je m.p., $x \in X$, $\delta > 0$. Definujeme kruhové okolí

$$U(x, \delta) = \{y \in X; \varrho(x, y) < \delta\}$$

a prstencové okolí

$$P(x, \delta) = \{y \in X; 0 < \varrho(x, y) < \delta\} = U(x, \delta) \setminus \{x\}.$$

Množina $A \subset X$ se nazve otevřená, jestliže

$$(\forall x \in A)(\exists \delta > 0)[U(x, \delta) \subset A].$$

Množina $A \subset X$ se nazve uzavřená, jestliže její doplněk $A^c = X \setminus A$ je otevřená množina.

Příklady. V $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$: (a, b) je otevřená, $[a, b]$ uzavřená. Množina $[0, 1)$ není ani otevřená, ani uzavřená. Prázdná množina je zároveň otevřená i uzavřená.

Věta 13.1 [vlastnosti otevřených množin] (X, ϱ) je m.p. Potom

- (1) $X, \emptyset$ jsou otevřené množiny
- (2) G_α otevřené pro $\forall \alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$ je otevřená
- (3) $G_1, \dots, G_N$ jsou otevřené $\implies \bigcap_{n=1}^N G_n$ je otevřená

Poznámka. konečný počet množin v bodě (3) je podstatný: množiny $(-1/n, 1/n)$ jsou otevřené, jejich průnik přes $n \in \mathbb{N}$ je však jednobodová množina $\{0\}$, která není otevřená.

Věta 13.1' [vlastnosti uzavřených množin] (X, ϱ) je m.p. Potom

- (1) $X, \emptyset$ jsou uzavřené množiny
- (2) F_α uzavřené pro $\forall \alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ je uzavřená
- (3) $F_1, \dots, F_N$ jsou uzavřené $\implies \bigcup_{n=1}^N F_n$ je uzavřená

Definice. (X, ϱ) je m.p., $\{x_n\} \subset X$ posloupnost bodů. Řekneme, že $\{x_n\}$ má limitu $x_0 \in X$ (neboli konverguje k x_0), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \implies x_n \in U(x_0, \varepsilon)].$$

Značíme: $x_n \rightarrow x_0$ pro $n \rightarrow \infty$, nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Ekvivalentní je požadovat, aby posloupnost (reálných čísel) $\varrho(x_n, x_0)$ měla limitu 0.

Věta 13.2 [Charakterizace uzavřených množin pomocí posloupností.] (X, ϱ) je m.p., $F \subset X$. Potom je ekvivalentní:

- (1) F je uzavřená
- (2) Jsou-li $x_n \in F$ libovolné body, splňující $x_n \rightarrow x_0$ pro $n \rightarrow \infty$, pak nutně též $x_0 \in F$.

Názorně: z uzavřené množiny nelze vykonvergovat ven.

Definice. (X, ϱ) je m.p. Uzávěr množiny $A \subset X$ definujeme jako

$$\overline{A} = \{y \in X; (\forall \delta > 0) U(y, \delta) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Příklady. ① $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$ ② $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Věta 13.3 [Vlastnosti uzávěru.] (X, ϱ) je m.p., $A, B \subset X$. Potom

- (1) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset$
- (2) $\overline{A}$ je uzavřená množina
- (3) $A \subset \overline{A}$, přičemž $A = \overline{A}$, právě když A je uzavřená
- (*4) $y \in \overline{A} \iff \exists x_n \in A, x_n \rightarrow y$ pro $n \rightarrow \infty$

Definice. (X, ϱ) je m.p. Hranici množiny $A \subset X$ definujeme jako

$$\partial A = \{y \in X; (\forall \delta > 0) U(y, \delta) \cap A \neq \emptyset \text{ a zároveň } U(y, \delta) \cap A^c \neq \emptyset\}.$$

Věta 13.4 [Vlastnosti hranice.]

- (1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, $\partial A = \partial(A^c)$
- (2) ∂A je uzavřená, $\overline{A} = A \cup \partial A$
- (3) A je uzavřená $\iff \partial A \subset A$, A je otevřená $\iff \partial A \cap A = \emptyset$

Poznámka. Definujeme další pojmy: vnitřek A

$$\text{int } A = \{y \in X; (\exists \delta > 0) U(y, \delta) \subset A\},$$

vnějšek A

$$\text{ext } A = \{y \in X; (\exists \delta > 0) U(y, \delta) \cap A = \emptyset\}.$$

Platí:

- $\text{int } A \subset A$, přičemž rovnost nastává právě když A je otevřená;
- $\overline{A} = \text{int } A \cup \partial A$ (disjunktně)
- $X = \text{int } A \cup \partial A \cup \text{ext } A$ (disjunktně)

Definice. (X, ϱ) , (Y, σ) jsou m.p. Funkce $f : X \rightarrow Y$ se nazve spojitá, jestliže

$$(\forall x_0 \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)].$$

Připomenutí. Pro funkci $f : X \rightarrow Y$ definujeme vzor množiny $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\};$$

– je to obecně něco jiného než inverzní funkce (kterou značíme f_{-1} a která je definována pouze tehdy, je-li f prostá).

Věta 13.5 (X, ϱ) , (Y, σ) jsou m.p., $f : X \rightarrow Y$. Potom je ekvivalentní:

- (1) f je spojitá
- (2) pro každou $G \subset Y$ otevřenou je $f^{-1}(G) \subset X$ otevřená
- (3) pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F) \subset X$ uzavřená

Věta 13.6 [Heineho charakterizace spojitosti.] (X, ϱ) , (Y, σ) jsou m.p., $f : X \rightarrow Y$. Potom je ekvivalentní:

- (1) f je spojitá
- (2) pro každý bod $x_0 \in X$ a pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, splňující $x_n \rightarrow x_0$ pro $n \rightarrow \infty$, platí $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ pro $n \rightarrow \infty$

Poznámky. Platí následující tvrzení (důkazy neprovádíme, neboť jsou velmi podobné situaci v $\mathbb{R}$, viz kapitoly 2 resp. 7 zimního semestru).

- Nechť (X, ϱ) , (Y, σ) , (Z, τ) jsou metrické prostory, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ jsou spojitě. Potom $g \circ f : X \rightarrow Z$ je spojitě.

• Je-li (X, ϱ) m.p., $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojité funkce, potom i $f+g$, $f-g$, $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité. (Místo $\mathbb{R}$ může být i lineární normovaný prostor.)

Je-li navíc $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in X$, je také $f/g : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá.

Definice. (X, ϱ) , (Y, σ) jsou m.p., $f : X \rightarrow Y$ funkce. Řekneme, že $b \in Y$ je limita funkce f v bodě $x_0 \in X$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(b, \varepsilon)].$$

Značíme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, nebo $f(x) \rightarrow b$ pro $x \rightarrow x_0$.

Řekneme, že f je spojitá v bodě $x_0 \in X$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)].$$

Poznámky. Vidíme, že hodnota $f(x_0)$ nehraje v definici žádnou roli, fakticky zde f nemusí být ani definována. Platí opět věty analogické situaci v $\mathbb{R}$:

• Heineho charakterizace limity: nechť (X, ϱ) , (Y, σ) jsou m.p., $f : X \rightarrow Y$ daná funkce, $x_0 \in X$, $b \in Y$. Potom je ekvivalentní:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$

(2) pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, splňující $x_n \rightarrow x_0$ pro $n \rightarrow \infty$, a zároveň $x_n \neq x_0$ pro $\forall n$, platí $f(x_n) \rightarrow b$ pro $n \rightarrow \infty$.

• $f : X \rightarrow Y$ je spojitá, právě když je spojitá v každém bodě $x_0 \in X$

• $f : X \rightarrow Y$ je spojitá v bodě x_0 , právě když $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p., $\{x_n\} \subset X$ posloupnost bodů. Řekneme, že $\{y_n\}$ je podposloupnost (též vybraná posloupnost), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $y_n = x_{k_n}$ pro $\forall n$.

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p. Množina $A \subset X$ se nazve kompaktní, jestliže pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ a bod $x_0 \in A$ tak, že $x_{k_n} \rightarrow x_0$ pro $n \rightarrow \infty$.

Poznámky. (X, ϱ) je m.p., $\{x_n\}$ posloupnost bodů. Potom:

• x_0 se nazve hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ taková, že $x_{k_n} \rightarrow x_0$ pro $n \rightarrow \infty$

• ekvivalentně: x_0 je hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)[x_n \in U(x_0, \varepsilon) \text{ platí pro nekonečně indexů } n].$$

• ekvivalentní definice limity: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)[x_n \in U(x_0, \varepsilon) \text{ platí pro všechna } n \text{ až na konečně výjimkách}].$$

• jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, pak x_0 je hromadný bod této posloupnosti, a je to jediný její hromadný bod.

• ekvivalentní definice kompaktnosti: A je kompaktní, právě když libovolná posloupnost $\{x_n\} \subset A$ má v A hromadný bod

Definice. (X, ϱ) je m.p. Množina $A \subset X$ se nazve omezená, jestliže

$$(\exists x_0 \in X) (\exists K > 0) [A \subset U(x_0, K)] .$$

Věta 13.7 [Vlastnosti kompaktních množin.] Nechť (X, ϱ) je m.p. a $A \subset X$ je kompaktní. Potom

- (1) A je omezená a uzavřená
- (2) Je-li $B \subset A$, a B je uzavřená, pak B je též kompaktní.

Věta 13.8 [Vztah kompaktnosti a spojitosti.] Nechť (X, ϱ) , (Y, σ) jsou m.p., nechť X je kompaktní. Potom:

- (1) Je-li $f : X \rightarrow Y$ spojitý, potom $f(X)$ je kompaktní.
- (2) Je-li $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitý, potom f je v X omezená, a nabývá zde maxima a minima.

Připomenutí. Funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá omezená, jestliže

$$(\exists K > 0) (\forall x \in X) [|f(x)| \leq K] ,$$

což je totéž, jako že množina

$$f(X) = \{f(x); x \in X\}$$

je omezená.

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p., Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) [m, n \geq n_0 \implies \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon] .$$

Pozorování. Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ má limitu, pak je cauchyovská.

Definice. Metrický prostor (X, ϱ) se nazve úplný, jestliže libovolná cauchyovská posloupnost bodů z X má zde také limitu.

Definice. Normovaný vektorový prostor, který je úplný vzhledem k metrice, určené jeho normou, se nazývá Banachův prostor.

Prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem k metrice, určené normou, která je určena skalárním součinem, se nazývá Hilbertův prostor.

Definice. Nechť (X, ϱ) , (Y, σ) jsou metrické prostory. Funkce $f : X \rightarrow Y$ se nazve lipschitzovská, jestliže existuje $L > 0$ tak, že

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq L\varrho(x, y) \quad \forall x, y \in X .$$

Je zjevné, že lipschitzovská funkce je spojitá. Funkce, která lipschitzovská s konstantou $L < 1$, se nazývá kontrakce.

Věta 13.9. [Banachova věta o pevném bodě.] Nechť X je úplný metrický prostor, nechť $f : X \rightarrow X$ je kontrakce. Potom existuje jediné $x_0 \in X$ tak, že $f(x_0) = x_0$.

Poznámka. Zbytek kapitoly je věnován speciálně situaci v $\mathbb{R}^N$. To, jak známo, je normovaný vektorový prostor, s eukleidovskou normou

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

kde x_i jsou jednotlivé složky vektoru x . Speciálně, $\mathbb{R}^N$ považujeme též za metrický prostor s metrikou $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

Opakování. Prostor se skalárním součinem je dvojice $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, kde X je vektorový prostor, a skalární součin je přiřazení $x, y \mapsto \langle x, y \rangle$, splňující:

1. přiřazení $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je lineární (při y pevném)
2. $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$, a $\langle x, x \rangle = 0$ právě když $x = 0$.

Na prostoru se skalárním součinem lze definovat normu předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (16)$$

Eukleidovská norma v $\mathbb{R}^n$ je vytvořena pomocí skalárního součinu

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Fakt, že toto (16) je vždy norma zejména, že splňuje trojúhelníkovou nerovnost), plyne z obecně platící tzv. Cauchy-Schwarzovy nerovnosti:

* **Cauchy-Schwarzova nerovnost.** Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem, a normu $\|\cdot\|$ definujeme pomocí (16). Potom

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

pro libovolné prvky $x, y \in X$.

Lemma 13.1. [O konvergenci v $\mathbb{R}^N$ po složkách.] Posloupnost bodů $x_n \in \mathbb{R}^N$ konverguje k $x_0 \in \mathbb{R}^N$, právě když každá složka vektoru x_n konverguje k odpovídající složce vektoru x_0 .

Věta 13.10. [Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^N$.] Množina $A \subset \mathbb{R}^N$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Poznámka. Implikace kompaktní $\implies$ omezená a uzavřená platí obecně (viz Věta 13.7) výše. Obrácená implikace obecně neplatí; fakticky vzato platí pouze v konečně-dimenzionálních prostorech (tj. v $\mathbb{R}^N$).

Věta 13.11. [Vztah $\mathbb{R}^N$ k úplnosti.] Prostor $\mathbb{R}^N$ je úplný.

Poznámka. Analogické vlastnosti (Lemma 13.1, Věta 13.10 a 13.11) má také množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, kterou přirozeně ztotožňujeme s $\mathbb{R}^2$.

14. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

V této kapitole studujeme funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, které lze chápat také jako M -tice funkcí

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M)$$

kde každá f_j má N proměnných:

$$f_j = f_j(x_1, \dots, x_N).$$

Vektory značíme tučně $\mathbf{x}$, jejich složky x_i . V $\mathbb{R}^N$ uvažujeme implicitně eukleidovskou normu

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2},$$

a tudíž je to metrický prostor s metrikou $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Z předchozí kapitoly víme, co znamená okolí v $\mathbb{R}^N$, a tedy limita, spojitost takových funkcí. Dále se zaměříme především na jejich diferencovatelnost.

Příklady. ① Každá lineární funkce $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ je spojitá, ztotožňujeme ji přirozeně s maticí $M \times N$

② Každý polynom $p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce

Definice. Je dána $f : U(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$. Parciální derivací f v bodě $\mathbf{a}$ podle x_i rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}^i) - f(\mathbf{a})],$$

kde $\mathbf{e}^i$ je i -tý bázeový vektor. Obecněji, definujeme derivaci ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ jako

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})].$$

Poznámky. • parciální derivace: derivujeme podle jedné proměnné, ostatní proměnné jsou konstanty – v podstatě situace minulého semestru

• parciální derivace je speciální případ derivace ve směru: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}^i}$

Definice. Gradientem funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ rozumíme matici $M \times N$

$$\nabla \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{j=1, \dots, M; i=1, \dots, N}.$$

Poznámka. Parciální derivace je nedostatečný pojem: existuje funkce, jež má parciální derivace nulové, a přesto je (v daném bodě) nespojitá. Existuje dokonce funkce, která má všechny směrové derivace nulové, a pořád je nespojitá. Potřebujeme lepší (silnější) pojem derivace.

Definice. Je dána $\mathbf{f} : U(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$. Totálním diferenciálem funkce $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{a}$ rozumíme lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, splňující

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} [\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - L\mathbf{h}] = \mathbf{0}.$$

Značíme $d\mathbf{f}(\mathbf{a}) = L$. Ekvivalentní zápis:

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + L\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Poznámky. ① situace v $\mathbb{R}^1$: je-li $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pak $f'(a) = A \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} [f(a + t) - f(a) - At] = 0.$$

② geometricky: afinní funkce $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{a}) + L\mathbf{h}$ parametrizuje tečnou nadrovinu grafu $\mathbf{f}$ v okolí bodu $\mathbf{a}$.

Věta 14.1. [Od diferenciálu ke spojitosti a derivaci.] Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ totální diferenciál. Potom

- (1) $\mathbf{f}$ je v bodě $\mathbf{a}$ spojitá
- (2) pro každé $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ existuje směrová derivace $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$ a rovná se $[d\mathbf{f}(\mathbf{a})](\mathbf{v})$

Důsledek. Jestliže $d\mathbf{f}(\mathbf{a})$ existuje, je určen jednoznačně, a je reprezentován maticí $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{a})$, přesněji vzato zobrazením

$$\mathbf{h} \mapsto \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}, \quad (17)$$

kde vektor $\mathbf{h}$ pro účely násobení maticí chápeme jako *sloupcový*.

Věta 14.2. [Od derivace ke spojitosti a diferenciálu.] Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom:

- (1) Jsou-li $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ omezené na nějakém $U(\mathbf{a}, \delta)$, je $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{a}$ spojitá
- (2) Jsou-li $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ spojitě v bodě $\mathbf{a}$, má zde $\mathbf{f}$ totální diferenciál

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená. Potom $\mathbf{f} \in C(\Omega)$ značí, že $\mathbf{f}$ je spojitá (což je právě když všechny složky f_i jsou spojitě, viz Lemma 13.1). Dále $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ značí, že $\mathbf{f}$ a všechny její parciální derivace jsou spojitě.

Proč nejrůznější funkce na otevřených množinách? Každý bod obsahuje i okolí – není problém s definicí parciální derivace atd.

Věta 14.3. [Diferenciál součtu a superpozice.]

- (1) Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ mají totální diferenciál v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ má totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$d(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{a}) = d\mathbf{f}(\mathbf{a}) + d\mathbf{g}(\mathbf{a}).$$

- (2) Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ a $\mathbf{g} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^K$ mají totální diferenciál v bodech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, respektive $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Potom složené zobrazení $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ má totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = d\mathbf{g}(\mathbf{b})d\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Důsledek. Za předpokladu předchozí věty platí

$$\nabla(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{b}) \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}),$$

kde napravo máme maticový součin, zapsáno po složkách

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (g_l(\mathbf{f}))(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^M \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\mathbf{b}) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

(tzv. „řetízkové pravidlo“).

Definice. Pro $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ definujeme otevřenou úsečku

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}); t \in (0, 1)\}$$

a uzavřenou úsečku

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}); t \in [0, 1]\}.$$

Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazve konvexní, jestliže $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega$ implikuje $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \Omega$.

Věta 14.4. [O střední hodnotě v $\mathbb{R}^N$.] Nechtě $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená, konvexní, nechtě $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 . Potom pro libovolné $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega$ existuje $\mathbf{c} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ takové, že

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{c}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle.$$

Definice. Parciální derivace vyšších řádů definuji takto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

obecně

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$$

vznikne postupnou aplikací $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}$.

Funkce třídy C^k je taková, že všechny parciální derivace až do řádu k jsou spojitě.

Poznámka. Závisí na pořadí parciálních derivací? Obecně ano: definujme

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & |y| > |x|, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$, zatímco $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$. Je-li však funkce dost hladká, na pořadí nezáleží – viz následující věta.

Věta 14.5. [O záměnnosti parciálních derivací.] Nechtě $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^2 na nějakém $U(\mathbf{a})$. Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}).$$

Důsledek. Je-li funkce třídy C^k , pak hodnoty libovolné parciální derivace stupně (nejvýše) k nezávisí na pořadí derivování.

Poznámka. Geometrický význam gradientu: je-li $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1 , potom pro směrovou derivaci platí:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}), \mathbf{v} \rangle.$$

To je nula, pokud $\mathbf{v} \perp \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a})$ (tj. $\mathbf{v}$ je směr „vrstevnice“), a nabývá maximální hodnoty (za podmínky $\|\mathbf{v}\| = 1$), pokud $\mathbf{v}$ je násobkem $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{a})$ (tj. $\mathbf{v}$ je směr „spádnice“). Přesněji řečeno, vektor ∇f ukazuje ve směru nejrychlejšího růstu funkce f .

Připomeň. Taylorův rozvoj funkce $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má tvar

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + \frac{1}{2!}g''(a)t^2 + R_3(h),$$

kde $R_3(h) = \frac{1}{3!}g'''(\tau)h^3$ pro vhodné τ ležící mezi a a $a+h$.

Věta 14.6. [Taylorův rozvoj v $\mathbb{R}^N$.] Nechť $f : U(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{R}$ je C^3 , kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom pro každé $\mathbf{h} \in U(\mathbf{a})$ existuje $\boldsymbol{\theta} \in (\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h})$ takové, že

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})h_i h_j + R_3(\mathbf{h}),$$

kde

$$R_3(\mathbf{h}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^N \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{\theta})h_i h_j h_k.$$

Definice. Multiindexem nazýváme n -tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$ nazýváme výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^N$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}.$$

Je-li $n = |\alpha|$, definuji zobecněné kombinační číslo

$$\binom{n}{\alpha} := \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!};$$

– to vyjadřuje, kolika způsoby lze n prvků rozdělit do N skupin, jestliže j -tá skupina obsahuje právě α_j členů.

Příklady. Nechť $\alpha = (1, 0, 2)$. Potom

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3^2}, \quad x^\alpha = x_1 x_3^2.$$

Poznámky. Pomocí multiindexů můžeme elegantně zapisovat různé složité výrazy. Platí například multinomická věta (zobecnění binomické věty):

$$(h_1 + \dots + h_N)^n = \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} h^\alpha, \quad \text{kde } \binom{n}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!}$$

Druhý člen Taylorova rozvoje lze napsat takto:

$$\frac{1}{2!} \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} D^\alpha f(a) h^\alpha.$$

Zbytek můžeme napsat takto:

$$\frac{1}{3!} \sum_{|\alpha|=3} \binom{3}{\alpha} D^\alpha f(\theta) h^\alpha.$$

Obecný tvar (rozvoj m -tého řádu) vypadá takto:

$$f(a) = \sum_{n=0}^m \left(\frac{1}{n!} \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} D^\alpha f(a) h^\alpha \right) + R_{m+1}(h),$$

kde

$$R_{m+1}(h) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{|\alpha|=m+1} \binom{m+1}{\alpha} D^\alpha f(\theta) h^\alpha.$$

Definice. Hessovou maticí funkce $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}$ rozumíme

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \right)_{i,j=1,\dots,N}.$$

Je to čtvercová matice, která je díky Větě 14.5 symetrická (je-li f dost hladká).

Definice. Funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ vzhledem k množině $M \subset \mathbb{R}^N$

- globální maximum, pokud $(\forall \mathbf{x} \in M) [f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})]$
- lokální maximum, pokud $(\exists \delta > 0) (\forall \mathbf{x} \in M \cap U(\mathbf{a}, \delta)) [f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})]$
- ostré lokální maximum, pokud $(\exists \delta > 0) (\forall \mathbf{x} \in M \cap P(\mathbf{a}, \delta)) [f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})]$

Analogicky se definuje minimum (globální minimum, ostré lokální minimum).

Věta 14.7. [Nutné podmínka lokálního extrému v $\mathbb{R}^N$.] Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ extrém vzhledem k nějakému $U(\mathbf{a}, \delta)$. Potom pro každé $i = 1, \dots, N$ platí: jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ existuje, je rovna nule.

Definice. Bod $\mathbf{a}$, ve kterém je $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (tj. $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0$, pro každé $i = 1, \dots, N$), nazýváme *stacionární bod*.

Poznámka. Z Věty 14.7 vyplývá, že *vnitřní* bod M může být extrém, pouze je-li stacionární (případně, neexistuje-li zde některá z derivací.)

Opakování. Nechť $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ je symetrická matice. Kvadratickou formou, určenou touto maticí, rozumíme funkci $Q_A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou jako

$$Q_A(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} h_i h_j = \langle A\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \mathbf{h}^T A \mathbf{h}.$$

Forma Q_A se nazve pozitivně definitní, jestliže existuje $c_1 > 0$ tak, že $Q_A(\mathbf{h}) \geq c_1 \|\mathbf{h}\|^2$ pro každé $\mathbf{h}$. To nastává právě tehdy, když vlastní čísla A jsou všechna kladná.

Forma se nazve negativně definitní, jestliže existuje $c_2 > 0$ tak, že $Q_A(\mathbf{h}) \leq -c_2 \|\mathbf{h}\|^2$ pro každé $\mathbf{h}$. To nastává právě tehdy, když vlastní čísla A jsou všechna záporná.

Forma se nazve indefinitní, jestliže existují $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ tak, že $Q_A(\mathbf{v}) > 0$ a $Q_A(\mathbf{w}) < 0$. To nastává právě tehdy, když A má kladná i záporná vlastní čísla.

Opakování. Z lineární algebry víme, že symetrická matice má pouze reálná vlastní čísla, dále že odpovídající vlastní vektory tvoří ortogonální bázi, a tudíž matice je podobná diagonální matici.

K určení definitnosti matice není vždy nutné počítat vlastní čísla. Jestliže $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ je seznam všech vlastních čísel (vícenásobná píšeme opakovaně), pak platí:

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \\ \operatorname{tr} A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \end{aligned}$$

kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice, definovaná jakožto součet diagonálních prvků. Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tedy

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= \det A = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \operatorname{tr} A = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že vlastní čísla jsou všechna nenulová, ze druhé pak, že aspoň jedno je kladné a aspoň jedno záporné, tedy matice je indefinitní.

K určení definitnosti lze použít také Sylvesterovo pravidlo. Označme Δ_k , $k = 1, \dots, N$, hlavní minory A , tj. determinanty matic $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^k$. Potom forma určená maticí A je pozitivně definitní, právě když $\Delta_k > 0$ pro každé k , a je negativně definitní, právě když $(-1)^{k-1} \Delta_k > 0$ pro každé k , neboli $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\dots$.

Věta 14.8. [Postačující podmínky lokálních extrémů v $\mathbb{R}^N$.] Nechť $f : U(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^3 . Nechť $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Označme $Q(\mathbf{h})$ kvadratickou formu, určenou Hessovou maticí f v bodě $\mathbf{a}$, tj.

$$Q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

Potom platí:

1. je-li $Q(\mathbf{h})$ pozitivně definitní, je $\mathbf{a}$ ostré lokální minimum
2. je-li $Q(\mathbf{h})$ negativně definitní, je $\mathbf{a}$ ostré lokální maximum
3. je-li $Q(\mathbf{h})$ indefinitní, $\mathbf{a}$ není lokální extrém

Terminologie: třetí případ předchozí věty nazýváme *sedlový bod*.

Poznámka. Předchozí věta nepokrývá všechny možné případy. Je-li příslušná forma pouze semidefinitní, obecně nelze nic říci. Srovnej případ v $\mathbb{R}$, kdy $f'(a) = f''(a) = 0$. Potom a může a nemusí být lokální extrém (uvaž $f = t^3$ resp. t^4 v bodě $a = 0$.)

Věta 14.9 [Vázané extrémy – 1 vazba.] Nechť $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, nechť $\mathbf{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N; g(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Předpokládejme, že f a g jsou třídy C^1 na okolí $\mathbf{a}$, a že $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.

Potom nutnou podmínkou toho, že $\mathbf{a}$ je lokální extrém f vůči M , je existence $\lambda \in \mathbb{R}$ takového, že

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a}). \quad (18)$$

Poznámky. Číslo λ se nazývá Lagrangeův multiplikátor. Dle předchozí věty jsou z extrému podezřelé body, kde

1. f, g nejsou hladké
2. $\nabla g(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, což odpovídá situaci, kde množina Γ (obecně $(N - 1)$ -dimenzionální hladká plocha) může degenerovat
3. konečně body, kde platí (18), tj. gradienty f a g jsou lineárně závislé

Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ je omezená, právě když existuje $C > 0$ tak, že $|x_i| \leq C$ pro $i = 1, \dots, N$ a každé $\mathbf{x} \in M$. Uzavřená množina má typický tvar

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N; g(\mathbf{x}) \leq c\}$$

kde g je spojitá funkce (jedná se o vzor uzavřené množiny $(-\infty, c]$, viz Věta 13.5); obecněji, jde-li o průnik takovýchto množin (viz Věta 13.1').

Věta 14.10. [O existenci globálních extrémů.] (1) Necht' $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, kde $M \subset \mathbb{R}^N$ je omezená a uzavřená. Potom f má globální maximum a minimum.

(2) Necht' $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = \infty$. Potom f má globální minimum.

(3) Necht' $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = -\infty$. Potom f má globální maximum.

* **Věta 14.11.** [Vázané extrémy – obecná verze.] Necht' $f, g_j : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, k$, kde $k < N$. Necht' $\mathbf{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N; g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, k\}.$$

Předpokládejme, že f a g_j jsou třídy C^1 na okolí $\mathbf{a}$, a že matice

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right\}$$

má maximální hodnotu, tedy k .

Potom nutnou podmínkou toho, že $\mathbf{a}$ je lokální extrém f vůči Γ , je existence čísel $\lambda_j \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{a}). \quad (19)$$

Věta 14.12. [O implicitní funkci – 1. verze] Necht' $F(\mathbf{x}, y) : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Necht' $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$ jsou takové, že

- $F(\mathbf{a}, b) = 0$
- F je C^1 na okolí $(\mathbf{a}, b)$.
- (klíčový předpoklad) $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ a C^1 funkce

$$Y(\mathbf{x}) : U(\mathbf{a}, \delta) \rightarrow U(b, \Delta)$$

tak, že pro každé $(\mathbf{x}, y) \in U(\mathbf{a}, \delta) \times U(b, \Delta)$ platí

$$F(\mathbf{x}, y) = 0 \iff y = Y(\mathbf{x}).$$

Navíc, je-li F třídy C^k , je též Y třídy C^k (na příslušných okolích).

Poznámka. Označíme-li

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{N+1}; F(\mathbf{x}, y) = 0\}, \\ \Omega &= U(\mathbf{a}, \delta) \times U(b, \Delta), \end{aligned}$$

říká nám věta, že

$$\Gamma \cap \Omega$$

je totožná s grafem jisté funkce $Y : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, a je tedy (v okolí daného bodu) N -dimenzionální hladkou plochou.

* **Věta 14.13.** [O implicitní funkci – obecná verze.] Necht' $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow \mathbb{R}^M$; podrobněji, jde o funkci

$$F_j(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M), \quad j = 1, \dots, M.$$

Necht' $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{N+M}$, po složkách

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_M).$$

Necht' platí:

- $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,
- F_j jsou C^1 na okolí $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
- (klíčový předpoklad) matice

$$\left\{ \frac{\partial F_j}{\partial y_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right\}_{i,j=1,\dots,M}$$

je regulární.

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ a C^1 funkce

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) : U(\mathbf{a}, \delta) \rightarrow U(\mathbf{b}, \Delta)$$

(tedy funkce z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^M$) tak, že pro každé $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U(\mathbf{a}, \delta) \times U(\mathbf{b}, \Delta)$ platí

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}).$$

Navíc, je-li $\mathbf{F}$ třídy C^k , je též $\mathbf{Y}$ třídy C^k (na příslušných okolích).

Poznámka. Věta opět říká, že množina

$$\Gamma = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{N+M}; F_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$$

je N -dimenzionální plocha, neboť je grafem funkce $\mathbf{Y} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ (na jistém okolí bodu $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$).

Názorně: v původně $N + M$ -dimenzionálním prostoru nám M nezávislých podmínek (rovnice $F_j = 0$) určuje N -dimenzionální objekt. Nezávislost těchto rovnic je zaručena třetím, klíčovým předpokladem.

* **Věta 14.14.** [O inverzní funkci.] Je dána funkce $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, podrobněji jde o funkci

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_N), \quad \text{kde } F_j = F_j(x_1, \dots, x_N).$$

Nechť $\mathbf{F}$ je C^1 na okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, a necht' (klíčový předpoklad) matice

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \left\{ \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right\}_{i,j=1,\dots,N}$$

je regulární.

Potom existuje U okolí bodu $\mathbf{a}$ tak, že $\mathbf{F}|_U$ je prostá; dále $V = \mathbf{F}(U)$ je otevřená množina, obsahující bod $\mathbf{b} = \mathbf{F}(\mathbf{a})$, a funkce $\mathbf{F}_{-1} : V \rightarrow U$ je třídy C^1 . Navíc platí

$$\nabla(\mathbf{F}_{-1})(\mathbf{y}) = \left(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{F}_{-1}(\mathbf{y})) \right)^{-1}$$

Dodatek: je-li $\mathbf{F}$ třídy C^k , je též $\mathbf{F}_{-1}$ třídy C^k .