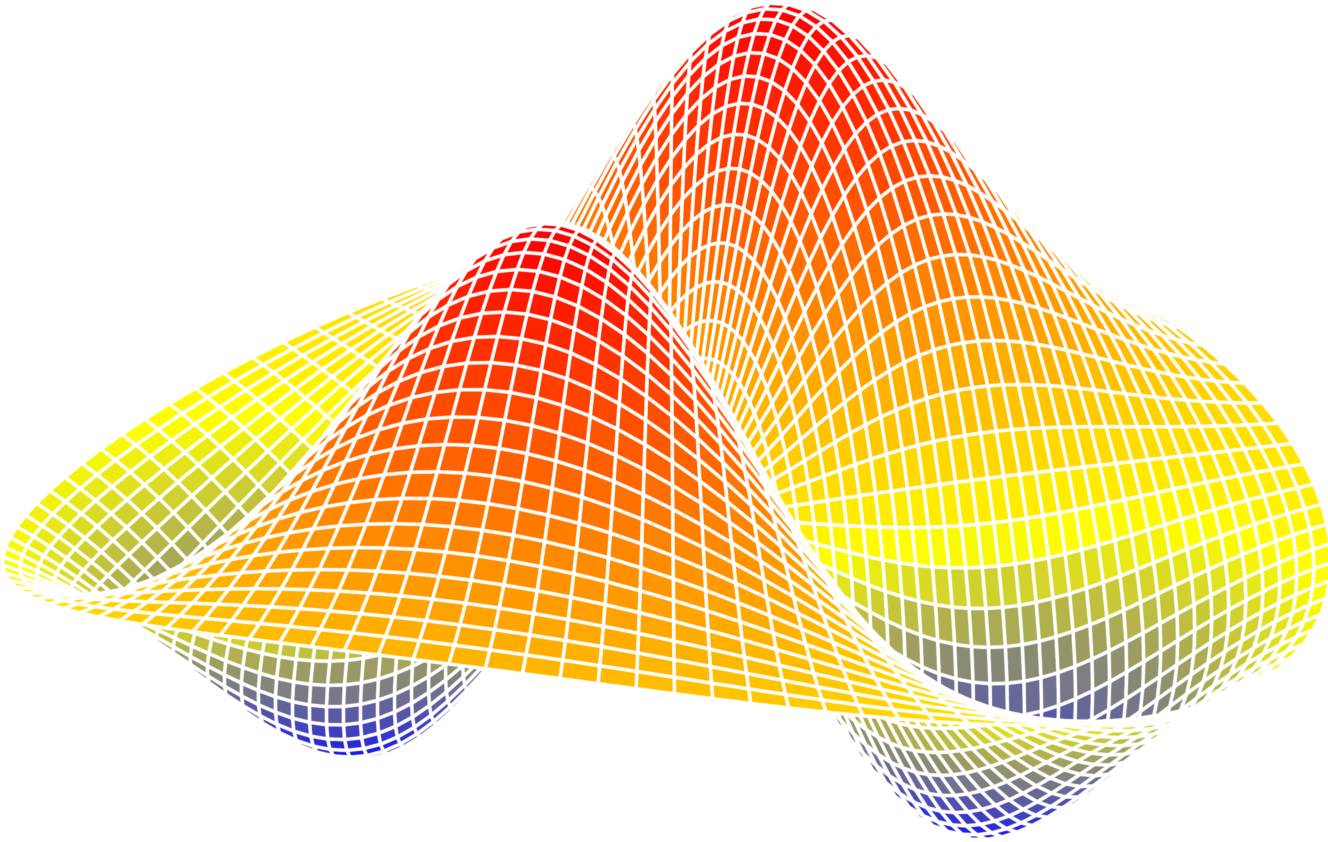
# M I N I M U M



$(2x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$

D . B . 2024

# Obsah


Úvod . . . 6

1. Základní poznatky . . . 7
   Viètovy vzorce a Hornerovo schéma . . . 7
   Nerovnice . . . 7
   Komplexní čísla . . . 7
   Důkaz indukcí, Binomická věta . . . 7
   Reálná čísla . . . 7

2. Limita a derivace . . . 8
   Výpočet z definice . . . 8
   Aritmetika limit : Racionální a iracionální funkce . . . 8
   Aritmetika limit : Limity základních funkcí . . . 8
   Limity v nevlastním bodě . . . 8
   Nevlastní limity, limity vedoucí na dvoustranné ověřování . . . 8
   Záměna limity a spojité funkce, věta o substituci . . . 8
   Věta o sevření . . . 8
   Derivace a její aplikace, tečna, Leibnizova, Faà di Brunova a Lagrangeova formule . . . 9
   l'Hospitalovo pravidlo . . . 9
   Faà di Brunova formule . . . 9
   Taylorův rozvoj . . . 9

3. Primitivní funkce . . . 11
   Přímá, lineární a logaritmická integrace, lepení, master formule . . . 11
   Per partes . . . 11
   Parciální zlomky . . . 11
   Metoda Ostrogradského . . . 11
   Obecná substituce . . . 11
   Rekurzivní per partes . . . 11
   Goniometrické a hyperbolické substituce . . . 11
   Weierstrassova substituce . . . 12
   Eulerova substituce . . . 12
   Abelova substituce . . . 12
   Slobinova substituce . . . 12

4. Hlubší vlastnosti funkcí . . . 13
   Heineho věta . . . 13
   Hromadné body, Weierstrassova věta, Limita posloupnosti . . . 13
   Taylorova řada, Lagrangeův zbytek . . . 13
   Průběh funkce . . . 13
   Absolutní extrémy funkce jedné proměnné . . . 13

5. Integrál Riemannův a Newtonův . . . 14
   Konvergence a výpočet z definice Newtonova integrálu, integrál ve smyslu hlavní hodnoty . . . 14
   Aplikace určitého integrálu . . . 14
   Výpočet z definice Riemannova intrgálu . . . 15
   Integrace užitím symetrie . . . 15
   Limitní přechody v integrálech . . . 15

6. Obyčejné diferenciální rovnice . . . 16
   Separovatelné . . . 16
   Částečně integrovatelné . . . 16
   Lineární prvního řádu, variace konstant . . . 16
   Bernoulliovy, variace konstant . . . 16
   Homogenní . . . 16
   Lineární obecné, substituce známým řešením . . . 16
   Lineární s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou . . . 17

Lineární s konstantními koeficienty a obecnou pravou stranou, Wronskián . . . 17
Eulerovy . . . 17
Autonomní . . . 17
Řešené derivací celé rovnice (implicitní, autonomní a jiné) . . . 17
Metoda integračního faktoru, ODR ve tvaru totálního diferenciálu . . . 17
Úlohy vedoucí na diferenciální rovnice . . . 17

7. Konvergence číselných a mocninných řad . . . 19
Nulita . . . 19
Integrální kritérium . . . 19
d'Alemberovo podílové kritérium . . . 19
Cauchyho odmocninové kritérium . . . 19
Gaussovo kritérium . . . 19
Srovnávací a rozvíjející kritéria . . . 19
Absolutní kritérium . . . 19
Leibnizovo . . . 19
Abelovo kritérium . . . 19
Dirichletovo kritérium . . . 19
Bolzano-Cauchyho kritérium . . . 20
Technika rozvoje na konvergentní a absolutně konvergentní/divergentní část . . . 20
Konvergece mocninné řady, analytické funkce . . . 20
Součet mocninné řady . . . 20

8. Metrické prostory . . . 21
Bodové množiny . . . 21
Banachova věta o kontrakci . . . 21

9. Diferenciální počet více proměnných . . . 22
Definiční obor . . . 22
Limita funkce více proměnných . . . 22
Parciální derivace a totální diferenciál . . . 22
Tečná rovina a Taylorův rozvoj . . . 22
Lokální extrémy funkcí více proměnných, Hessián . . . 23
Absolutní extrémy funkcí více proměnných na množině, řešené substitucí . . . 23
Absolutní extrémy funkcí více proměnných na množině, řešené Lagrangeovými multiplikátory . . . 23
Implicitní funkce . . . 24
Řetízkové pravidlo, Věta o regulárním zobrazení, Transformace proměnných . . . 25

10. Variační počet . . . 27
Gâteuxův diferenciál . . . 27
Extrémy funkcionálů, Euler–Lagrangeova rovnice, Jacobiho věta . . . 27
Vázané extrémy funkcionálů . . . 27

11. Stejnoměrná konvergence . . . 28
Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí . . . 28
Stejnoměrná konvergence řad funkcí, Weierstrassovo kritérium . . . 28

12. Integrály závislé na parametru, Lebesgueův integrál . . . 29
Spojitost integrálů, věty Leviho a Lebesguova . . . 29
Feynmanova metoda . . . 29

13. Dvojný a trojný integrál, Fubiniho věta . . . 30
Fubiniho věta : Přímá parametrizace průměty a řezy . . . 30
Fubiniho věta II : Polární, cylindrická a sférická substituce a jejich Jakobiány . . . 30
Fubiniho věta III : Obecná substituce, Jakobián . . . 32

14. Křivkový a plošný integrál, integrální věty . . . 33
Křivkový integrál skalárního pole (I. druhu) . . . 33
Křivkový integrál vektorového pole (II. druhu) . . . 33
Nezávislost na integrační cestě, potenciálové pole . . . 34
Greenova věta . . . 34
Plošný integrál skalárního pole (I. druhu) . . . 34
Plošný integrál vektorového pole (II. druhu) . . . 35
Gauss–Ostrogradského věta . . . 35
Stokesova věta . . . 36

15. Vektorový a tenzorový počet . . . 37

Sklalární a vektorový součin vektorů a tenzorů . . . 37
Diferenciální operátory v kartézské bázi, obecná pravidla . . . 37
Cylindrická a sférická báze, gradienty základních polí . . . 37
Počítání se základními poli pomocí jejich gradientů a skládáním pravidel . . . 38
Integrace tenzorů . . . 38
Integrální věty (Gauss–Ostrogradského a Stokesova pro tenzory) . . . 38

16. Speciální funkce . . . 39
Gama . . . 39
Digama . . . 39
Polygama . . . 39
Polylogaritmy . . . 39

17. Fourierova řada . . . 40
Fourierova trigonometrická řada, Gibbsův jev . . . 40

18. Ortogonální systémy polynomů . . . 41
Čebyševovy polynomy I. druhu . . . 41
Čebyševovy polynomy II. druhu . . . 41
Laguerrovy polynomy . . . 41
Hermitovy polynomy . . . 41
Legenderovy polynomy . . . 42
Asociované Legenderovy polynomy . . . 42

19. Komplexní analýza . . . 43
Derivace, holomorfie a Cauchy–Riemannovy podmínky . . . 43
Řezy funkcí . . . 43
Komplexní integrál . . . 43
Cauchyho věta, ML lemma a Jordanův odhad . . . 43
Laurentova řada, klasifikace singularit a residuum . . . 44
Residuová věta . . . 44
Cauchyův vzorec . . . 45

20. Integrální transformace . . . 46
Fourierova transformace jedné proměnné . . . 46
Fourierova transformace více proměnných . . . 46
Fourierova transformace radiálně symetrických funkcí . . . 46
Laplaceova transformace . . . 47

21. Distribuce . . . 48
Vyčíslování a úpravy s distribucemi . . . 48
Obyčejné diferenciální rovnice s distribucemi . . . 48
Fourierova transformace distribucí . . . 48

Přehled vzorců . . . 50
Řecká písmena . . . 50
Základní poznatky . . . 50
Hyperbolické a hyperbolometrické funkce . . . 50
Duplicitiní, bisektivní a jiné formule . . . 50
Součtové vzorce . . . 50
Limita a derivace . . . 50
Taylorova řada . . . 50
Maclaurinovy rozvoje . . . 51
Primitivní funkce . . . 51
Definice integrálu, derivace a integrál . . . 51
Regularizace integrálu . . . 51
Substituce pro racionální funkce speciálního argumentu . . . 51
Speciální určité integrály a řady . . . 51
Diferenciální počet více proměnných . . . 52
Polární, cylindrická a sférická substituce a jejich Jakobiány . . . 52
Rovinné křivky . . . 52
Kvadriky a jiné prostorové plochy . . . 52
Obecná parametrizace křivek a ploch, transformace diferenciálů . . . 52
Trojný, křivkový a plošný integrál v prostoru . . . 53
Integrální věty v rovině a prostoru . . . 53
Vektorový a tenzorový počet v prostoru . . . 53

Ortogonální křivočaré souřadnice, základní souřadná pole v prostoru . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
Integrace ve vícedimensionálním prostoru . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
Rozšíření funkcí do komplexního oboru . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Komplexní analýza . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Chybová a komplementární chybová funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Gama funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Beta funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Zeta funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Digamma funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Polygamma funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
Polylogaritmus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
Besselovy funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
Modifikované Besselovy funkce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
Eliptické integrály prvního a druhého druhu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
Legenderovy polynomy . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
Distribuce . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
Fourierova transformace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
Radonova transformace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
Souřadné systémy . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
Ortogonální systémy polynomů . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
Tabulky Fourierových transformací . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

# Úvod

Tato sbírka obsahuje úlohy z různých oblastí matematiky, které byly zadávány jako domácí úkoly a jako testové úlohy cvičení Matematické analýzy pro fyziky I – IV. Důsledkem je i její členění, jedna kapitola typicky odpovídá jednomu početnímu příkladu u zkoušky. Cílem sbírky je poskytnout studentům širokou škálu úloh k procvičení. Symbolem * označuji úlohy, jejichž řešení typicky ukazuji na cvičení. Ostatní považujte za součást Vašeho Portfolia. Pro další úlohy vizte níže:

**Limita a derivace**
- Limita posloupnosti [Děm kap.I §2][Ber 245.–267.][Kop_I kap.2][Kuz §1.3 Z1.-6., Z20.]
- Limita funkce [Děm kap.I §5,7][Ber 268.–401.][Kop_I kap.3][Kuz §1.3 Z7.-20.]
- Derivace [Děm kap.II §1-5][Ber 466.–773., 1006.–1052.][Kop_I kap.4][Kuz §2.3 Z1.-14., Z17.-18., Z20.]
- Tečna, normála, aplikace derivace
- Derivace inverzní a parametrické fce
- l'Hospitalovo pravidlo [Děm kap.II §9][Ber 1324.–1370.][Kop_I kap.5]
- Taylorův rozvoj [Děm kap.II §10][Ber 1498.–1528.][Kop_I kap.5]

**Primitivní funkce** [Děm kap.III][Ber 1676.–2230.][Kop_I kap.7][HolKa kap. 1][Kuz §4.3 Z1., Z3., Z5.-7., Z13.]

**Integrál**
- Výpočet integrálu [Děm kap.IV §1-4][Ber 1592.–1675., 2231.–2346., 2366.–2454.][Kop_I kap.8][HolKa kap. 2][Kuz §4.3 Z2., Z4., Z8.-12.]
- Aplikace integrálu [Děm kap.IV §5-11][Ber 2455.–2726.][Kop_I kap.8][HolKa kap. 3][Kuz §4.3 Z14.-22.]

**Hlubší vlastnosti funkcí**
- Monotonie [Děm kap.II §6-8][Ber 1152.–1184., 1267.–1317.]
- Extrémy [Děm kap.II §11,13][Ber 1185.–1259.]
- Průběh funkce [Děm kap.II §12][Ber 1371.–1481.][Kop_I kap.6][Kuz §3.3]

**Diferenciální rovnice**
- Separabilní [Ber 3902, 3905]
- Homogenní [Ber 3938, 3940, 3985, 4025]
- Lineární na variaci [Ber 3955, 3957][Kuz 92/4/17, 92/4/24]
- Bernoulliova [Ber 4038, 4042, 4045][Kuz 93/6/2, 93/6/8]
- Autonomní [Ber 4192, 4194, 4195][Kuz 98/11/4, 98/11/24]
- Lineární s KK se speciální pravou stranou [Ber 4322, 4319, 4277]
- Lineární s KK na wronskián: [Ber 4281, 4282][Kuz 103/16/29]
- Eulerova: [Ber 4242, 4292]

**Řady**
- Nulita [Děm 2673]
- Srovnávací a limitní kritéria [Děm 2586, 2588, 2589.1, 2626][Ber 2747, 2753, 2770][Kuz 107/2/12, 108/3/1, 108/3/3, 109/3/21]
- Podílové/Odmocninové kritérium [Děm 2587, 2589, 2589.2][Kuz 110/4/31, 110/5/9]
- Integrální kritérium [Děm 2617, 2618, 2632]
- Gaussovo kritérium [Děm 2601, 2605, 2638, 2645]
- Absolutní konvergence [Děm 2595, 2596, 2664]
- Leibnitzovo, Dirichletovo a Abelovo kritérium [Děm 2667, 2668, 2690*][Kuz 114/7/30]
- Rozvoj O [Děm 2677, 2680, 2681]
- Mocninné řady [Děm 2816, 2819, 2826]

**Diferenciální počet funkcí více proměnných**
- Limita [Děm 3183.1., 3188, 3203][Ber 3004, 3005, 3006]
- Totální diferenciál [Děm 3238, 3241, 3243, 3251, 3252, 3253]
- Implicitní funkce [Děm 3399.1, 3402, 3405][Ber 3158, 3324]
- ODR ve tvaru tot. dif. [Ber 4050, 4059 $\mu = \mu(y)$, 4060 $\mu = \mu(x)$, 4061 $\mu = \mu(x)$, 4088 $\mu = \mu(x/y)$] (integryrujuščij množitel = integrační faktor)
- Lokální extrémy (Hessova matice) [Děm 3625, 3626, 3633, 3642][Ber 3268]

**Absolutní extrémy funkcí více proměnných**
- Jen parametrizace [Děm 3675][Ber 3281, 3283]
- Lagrangeovy multiplikátory [Děm 3676, 3678][Ber 3282]

**Variační počet** [Kop_II kap.4]

**Stejnoměrná konvergence**
- [Ber 2817.–2824.][Děm kap. V §4][HolKa kap. 13][Kop_II kap. 6]
- Záměna limity/řady/integrálu dle SK [Ber 2833.–2836.]

**Integrální počet více proměnných**
- Fubiniho věta [Ber 3466.–3769.][Čer kap.20][Děm kap.VIII §1-10][Kop_III kap.2]
- Lebesgueova a Leviho věta [Děm kap.VII §1-2][Kop_III kap. 1.3]
- Feynmanova metoda na integrály s parametrem [Čer kap.20][Děm kap.VII §3][Kop_III kap. 3]
- Křivkový integrál 1. druhu [Ber 3770.–3805.][Děm kap.VIII §11][Kop_III kap. 4]
- Křivkový integrál 2. druhu [Ber 3806. – 3844.][Děm kap.VIII §11-12][Kop_III kap. 4]
- Plošný integrál 1. druhu [Ber 3876. –3886.][Děm kap.VIII §14][Kop_III kap. 4]
- Plošný integrál 2. druhu [Ber 3887. – 3900.][Děm kap.VIII §14-17][Kop_III kap. 4]

**Fourierovy řady a transformace**
- Řady [Ber 4366. – 4395.][Čer kap. 20][Děm kap.V §6][HolKa kap. 15][Kop_IV kap. 1]
- Transfomace funkcí [Kop_V kap. 2 §2.C]
- Transfomace temperovaných distribucí [Kop_V kap. 2 §2.C]

**Komplexní analýza** [Kop_IV kap. 2][Bec]

**Distribuce** [Kop_V kap. 2 §2.B]

**Speciální funkce** [Kop_V kap. 2 §2.A][Děm kap.VII §4]

**Z k r a t k y**

**[SPok]** Sady Pokorného (pokrývají všechny semestry)
**[Kop_I–V]** KOPÁČEK A KOL., Příklady z matematiky nejen pro fyziky I – V
**[Bec]** BECK D., Brožura komplexních integrálů
**[HolKa]** HOLICKÝ & KALENDA, Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy
**[Děm]** DĚMIDOVIČ B., Sbírka úloh
**[Ber]** BERMAN G. N., Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analyza
**[Kuz]** KUZNĚCOV L.A., Sbornik zadač po vyššej matematike
**[Tol]** TOLASO J. KOS, A Collection of Problems in Analysis

# 1

# Základní poznatky

### Vìètovy vzorce a Hornerovo schéma

Rozložte polynom na součin kořenových faktorů

**(1)*** $x^2 - x - 12$

**(2)*** $2x^2 - x - 1$

**(3)** $3x^2 + 11x - 4$

**(4)*** $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

**(5)** $x^3 + 11x + 30$

**(6)** $x^3 - 19x + 30$

**(7)** $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

### Nerovnice

**(1)** $|x-1| + |x+1| \geqslant 2$

**(2)** $\left|\dfrac{2}{x+4}\right| \geqslant 2$

**(3)** $\sqrt{8+2x-x^2} > 6 - 3x$

**(4)** $x^2 + 4x - 8 < |x+2|$

**(5)** $|x^2 + 3x + 2| \geqslant 1$

**(6)** $\dfrac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$

**(7)** $|x^2 - 5x + 1| \geqslant x^2 - x + 3$

**(8)*** $|x^3 - 2x^2 - 7x + 11| < x^3 - 4x^2 + 5x - 5$

**(9)** $|x^2 + 3x + 1| < x^2 + \sqrt{x+1}$

**(10)** $|x^2 + 3x - \sqrt{x+2}| \geqslant x^2 + x + \sqrt{x+2}$

### Komplexní čísla

V následujícím předpokládáme $z = x + iy = r\angle\alpha \in \mathbb{C}$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

**(1)*** Dokažte, že pro součin komplexních čísel v polárním tvaru $r\angle\alpha = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ platí

**(a)** $(r\angle\alpha)(s\angle\beta) = (rs)\angle(\alpha+\beta)$,

**(b)** $(r\angle\alpha)/(s\angle\beta) = (r/s)\angle(\alpha-\beta)$.

**(2)** Spočtěte: **(a)** $2/(1-3i)$ **(b)** $1 + i^{123}$ **(c)** $(2-i)^{10}$

**(3)*** Dokažte pro libovolné $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{2\pi kj}{n} = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2\pi kj}{n} = n\delta_{n0}$$

*Hint:* $z_j = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}$ je kořenem jisté rovnice.

**(4)*** Dokažte $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2z\cos\tfrac{2\pi k}{n} + z^2\right) = \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^2$

*Hint:* Na obou stranách jsou polynomy, čili stačí dokázat pro $z = x > 0$, kde užijete kosinovou větu.

**(5)** Upravte **(a)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}$ **(b)** $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos\frac{z}{2^k}$

### Důkaz indukcí, Binomická věta

Užitím indukce dokažte pro libovolné $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (není-li uvedeno jinak)

**(1)** $3 \mid 4^n - 1$

**(2)*** $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

**(3)*** $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

**(4)** $n^{n+1} > (n+1)^n, \quad n \geqslant 3$

**(5)** $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$

**(6)** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$

**(7)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

**(8)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

**(9)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$

### Reálná čísla

Nechť $A, B, M_1, M_2$ jsou reálné množiny.

**(1)*** Dokažte, $f(M_1) \setminus f(M_1) \subset f(M_1 \setminus M_2)$

**(2)*** Dokažte, když $\phi$ a $\psi$ jsou prosté, pak $\psi \circ \phi$ je prostá.

**(3)** Nechť $M$ je konečná množina. Dokažte, že pro počet prvků množiny všech jejích podmnožin platí vztah $|\exp M| = 2^{|M|}$

**(4)*** Dokažte, že $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$

**(5)** Definujme $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Dokažte $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

**(6)** Nechť $f, g$ jsou shora omezené reálné funkce na intervalu $(0,1) \subset D_f \cap D_g$. Nadto $\forall x \in (0,1) : f(x) \leqslant g(x)$. Dokažte, že pak

$$\sup_{(0,1)} f \leqslant \sup_{(0,1)} g.$$

# 2

# Limita a derivace

V následujícím předpokládáme $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$

### Výpočet z definice

Ukažte z $\varepsilon$-$\delta$ definice: **(1)*** $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$ **(2)*** $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt{x} = 3$ **(3)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$ **(4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

### Aritmetika limit : Racionální a iracionální funkce

V následujícím předpokládáme $n, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_0^+$ (spočtěte bez užití l'Hospitalova pravidla či Taylorova rozvoje)

**(1)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

**(2)*** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

**(3)*** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

**(4)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

**(5)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

**(6)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}$

**(7)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16-x}-\sqrt{4+x}}{x}$

**(8)*** $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

**(9)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}$

**(10)** $\lim\limits_{x\to r^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{r}+\sqrt{x-r}}{\sqrt{x^2-r^2}}$

**(11)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax}\,\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$

**(12)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1+x-x^2}}{\sqrt[3]{8-x^2}-2}$

### Aritmetika limit : Limity základních funkcí

**(1)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$ **(2)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$ **(3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)-3\sin x}{x^3}$ **(4)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$

### Limity v nevlastním bodě

**(1)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{3x^4-6x^2+5}}$ **(2)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ **(3)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-e^{1/x}}{1-3x^2}$ **(4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+2}\right)^x$

### Nevlastní limity, limity vedoucí na dvoustranné ověřování

**(1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ **(2)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-x}$ **(3)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{2}}$ **(4)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)\ln x}$

### Záměna limity a spojité funkce, věta o substituci

Spočtěte bez užití l'Hospitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje

**(1)*** $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$

**(2)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+2x}}$

**(3)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x}$

**(4)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{argsinh} x}{x}$

**(5)*** $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos^{1/x}\sqrt{x}$

**(6)** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x^2)^{1/\operatorname{tg}^4 x}$

**(7)*** $\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{1-\operatorname{cotg}^3 x}{2-\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg}^3 x}$

**(8)*** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

**(9)** $\lim\limits_{x\to 0} (2^{\cos x}-1)^{1/\arcsin^2 x}$

**(10)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+3^x \operatorname{tg} x}{1+2^x \sin x}\right)^{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$

**(11)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(r+x)+\ln(r-x)-2\ln r}{x^2}$

**(12)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[1+\ln\left(\dfrac{e^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}+1}{2}\right)\right]^{\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{argsinh}^3 x}}}$

**(13)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2e^{\frac{\sqrt{x}}{x+1}}-1\right)^{\frac{(x^2+1)(\cos\sqrt[4]{x}-1)}{x}}$

**(14)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(e^{\frac{x-1}{x^2}}+1)\ln\cos\sqrt{x}\,(e^{\sqrt{x^2+x}}-1)}{\sqrt{1-\cos(2x)}\sqrt{x}}$

**(15)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos(\pi x))^{\sin(\pi x)}}{x\arcsin^2 x}$

**(16)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh\sqrt{x^2+x}-\cosh\sqrt{x^2-x}}{\cosh\sqrt{x^2+x}+\cosh\sqrt{x^2-x}}$

**(17)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cosh x)^{\frac{1}{\operatorname{argcosh}^4(1+x)}}$

**(18)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{tgh}\operatorname{argsinh} x)^{x^2}$

**(19)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cosh\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

**(20)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\sin\dfrac{\pi x}{\sqrt{x^2+1}}$

### Věta o sevření

**(1)** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **(2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+1}$ **(3)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

### Derivace a její aplikace, tečna, Leibnizova, Faà di Brunova a Lagrangeova formule

**(1)** Na maximálním možném definičním oboru najděte první a druhou derivaci funkce $f(x)$

**(a)*** $\frac{2x}{1-x^2}$ **(b)*** $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ **(c)*** $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ **(d)*** $\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$ **(e)*** $x^x$ **(f)** $\sin\sin\sin x$ **(g)** $2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$ **(h)** $\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$ **(i)** $\ln\left(\operatorname{tg}x+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)$

**(2)** Ukažte, že funkce splňují danou diferenicální rovnici a užijte Leibnizovu formuli k nalezení $y^{(n)}(0)$ těchto funkcí. *Hint:* Derivujte $n$-krát diferenciální rovnici

**(a)*** $y=\arcsin x,\ (1-x^2)y''=xy'$ **(b)** $y=\arcsin^2 x,\ (1-x^2)y''-xy'=2$

**(3)** Najděte první a druhou derivaci $\frac{dx}{dy}$ a $\frac{d^2x}{dy^2}$ v bodě $y=y_0=f(x_0)$ funkce $x=f^{-1}(y)$ zadané vztahem $y=f(x)$

**(a)*** $y=x-x^2, x_0=0$

**(4)** Najděte první a druhou derivaci $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2y}{dx^2}$ v bodě $x=x(t_0)$ funkce $y=y(x)$ zadané parametricky

**(a)*** $\begin{bmatrix} x=\ln t \\ y=t^2-1\end{bmatrix}, t_0=1$ **(b)** $\begin{bmatrix} x=\arcsin t \\ y=\ln(t^2-1)\end{bmatrix}, t_0=0$

**(5)** Určete rovnici tečny a normály funkce $y=f(x)$ v bodě $[x_0,y_0]$.

**(a)** $y=\ln x, x=1$ **(b)** XXX

### l'Hospitalovo pravidlo

Spočtěte limity užitím l'Hospitalova pravidla

**(1)*** $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ **(2)*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$ **(3)*** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{cotg}x}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ **(4)*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sinh x^2)}{\sinh^2 x\sin(\sinh x^2)}$ **(5)*** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1-x\ln x}$ **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$ **(7)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ **(8)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{\operatorname{argsinh}x}\right)^{1/x^2}$ **(9)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$

### Faà di Brunova formule

Spočtěte limity užitím vícenásobného l'Hospitalova pravidla a Faà di Brunovy formule

**(1)*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh(\sin x)-x}{\sin x+\sinh x-2x}$ **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tgh}(\operatorname{tg}x)-x}{\operatorname{tgh}x+\operatorname{tg}x-2x}$ **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}-\cos x-5\sin x+4x}{x^5}$

### Taylorův rozvoj

**(1)** Určete Taylorův polynom šestého řádu $T_6(x)$ funce $f(x)$ v bodě $x=x_0$

**(a)*** $\sqrt{x},\ x_0=1$ **(b)*** $e^{2x-x^2},\ x_0=0$ **(c)*** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x_0=0$ **(d)*** $\cos^2 x,\ x_0=0$ **(e)*** $\arcsin x,\ x_0=0$ **(f)** $\operatorname{arctg}x,\ x_0=0$ **(g)** $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\ x_0=0$

**(2)** Spočtěte limity užitím Taylorova rozvoje, $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\gamma>0$

**(a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}$ **(b)*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+e^{x^2})\cos x-2}{x^4}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh(\sin x)-x}{\sin x+\sinh x-2x}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tgh}(\operatorname{tg}x)-x}{\operatorname{tgh}x+\operatorname{tg}x-2x}$ **(f)*** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{cotg}x}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ **(g)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ **(h)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sinh^2 x}\right)$ **(i)*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x-\sin x}-\sqrt{1+\frac{1}{2}x^2}}{\arcsin x-\sin x}$

**(j)*** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x^3} - \frac{1}{1-x} + x\sqrt{1+x^3}}{x^6}$

**(k)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(xe^{x^2})-\operatorname{arctg}(xe^{-x^2})}{x-x\cos x}$

**(l)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9-8\cos^2 x}-\sqrt{2-\cos(4x)}}{\ln(1+x^4)}$

**(m)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sin^2\alpha x+\cos^2\beta x\right)^{\frac{1}{\ln^2(1+\gamma x)}}$

**(n)** $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\arccos(x\operatorname{cotg} x)}{\operatorname{argtgh}(\sin x)}$

**(o)** $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\operatorname{argcosh}\frac{x}{\sin x}$

**(p)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

**(q)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\operatorname{tg} x}{\sinh^2 x}\right)^{\operatorname{cotgh}^4 x}$

**(r)** $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\cosh\sqrt{e^x-\cos x}}{\operatorname{argsinh} x}$

**(s)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\cosh\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)^{\operatorname{cotg}^4 x}$

**(3)** Najděte Taylorův rozvoj 5. řádu funkce $f_{-1}(y)$ zadané vztahem $y = f(x)$ v bodě $y_0 = f(x_0)$, $\alpha \in (-1, 1)$ je parametr. *Hint:* Namísto Lagrangeovy formule lze vložit řadu s neznámými koeficienty a porovnat

**(a)*** $y = x - x^3, x_0 = 0$

**(b)** $y = x - x^3, x_0 = 1$

**(c)** $y = x - x^4, x_0 = 0$

**(d)** $y = x^{\frac{3}{2}} - x^2, x_0 = 1$

**(e)** $y = \arcsin x, x_0 = 0$

**(f)** $y = xe^x, x_0 = 0$

**(g)** $y = x - \alpha\sin x, x_0 = 0$

# 3

## Primitivní funkce

Na maximálním možném intervalu určete primitivní funkce, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

### Přímá, lineární a logaritmická integrace, lepení, master formule

**(1)*** $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ **(3)*** $\int \frac{dx}{5-3x}$ **(5)*** $\int e^{-|x|}\, dx$ **(7)*** $\int \cos^2 x\, dx$ **(9)** $\int \cosh^4 x\, dx$ **(11)*** $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

**(2)*** $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$ **(4)*** $\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$ **(6)*** $\int |1-x|-|1+x| dx$ **(8)** $\int \cos^4 x\, dx$ **(10)*** $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ **(12)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

### Per partes

**(1)*** $\int x^2 \ln x\, dx$ **(3)*** $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ **(5)*** $\int x^2 \arccos x\, dx$ **(7)*** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$ **(9)** $\int \ln(x^2+\alpha^2) dx$ **(11)** $\int e^{-x} \cos^2 x\, dx$

**(2)*** $\int x^3 \cos x\, dx$ **(4)*** $\int x^3 \cos x dx$ **(6)*** $\int e^{-x} \cos x dx$ **(8)*** $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ **(10)** $\int \ln^4 x\, dx$ **(12)** $\int x^2 e^{-x} \cos x dx$

### Parciální zlomky

**(1)*** $\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)^2}$ **(3)*** $\int \frac{dx}{x(x+1)^2(x^2+x+1)}$ **(5)*** $\int \frac{dx}{x^4+1}$ **(8)** $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ **(10)** $\int \frac{(x^3-1)dx}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2}$

**(2)*** $\int \frac{(x^3+1)\, dx}{x^3-5x^2+6x}$ **(4)*** $\int \frac{dx}{x^3+1}$ **(6)** $\int \frac{dx}{x^5+1}$ **(9)** $\int \operatorname{arccot}(x^2+x+1) dx$ **(11)** $\int \frac{x^2(x+1)dx}{(2x+1)^2(x^2+x+1)}$

**(7)** $\int \frac{dx}{x^6+1}$

### Metoda Ostrogradského

**(1)*** $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ **(2)** $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ **(3)** $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$ **(4)** $\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}$ **(5)** $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{(x^2-2x+2)^3}$ **(6)** $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$

### Obecná substituce

**(1)*** $\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2}$ **(4)*** $\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}$ *Hint:* $y=1/x^2$ **(6)*** $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$ **(9)** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ **(11)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} dx$ **(13)** $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

**(2)*** $\int x e^{-x^2}\, dx$ **(5)*** $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\sin^2 x}$ **(7)*** $\int \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\, dx$ **(10)** $\int \frac{e^{5x}\, dx}{e^{2x}+1}$ **(12)** $\int \frac{\sin 3x\, dx}{3\sin x+\sin 3x}$ **(14)** $\int x^2 \sin^3 \ln x\, dx$

**(3)*** $\int \sin^5 x\, dx$ **(8)*** $\int \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ **(15)** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

### Rekurzivní per partes

**(1)*** $\int \cos^4 x\, dx$ **(2)*** $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ **(3)*** $\int \frac{dx}{(1-x^2)^3}$ **(4)** $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$ **(5)** $\int \cosh^6 x\, dx$ **(6)** $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ **(7)** $\int \frac{dx}{(x^3+1)^3}$

### Goniometrické a hyperbolické substituce

**(1)*** $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$ **(3)*** $\int \frac{dx}{(1+x-x^2)^{3/2}}$ **(5)** $\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^{5/2}}$ **(7)** $\int \sqrt{\alpha^2+x^2}\, dx$ **(9)*** $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\, dx$

**(2)*** $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ **(4)*** $\int \frac{x\, dx}{(x^2-2x-2)^{3/2}}$ **(6)*** $\int \sqrt{x^2+2x+2}\, dx$ **(8)*** $\int \frac{dx}{(1-x^2)^3}$

## Weierstrassova substituce

**(1)*** $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$ **(2)*** $\displaystyle\int\frac{dx}{\cosh x}$ **(3)** $\displaystyle\int\frac{(1+\operatorname{tg}x)\,dx}{(\sin 2x+1)^2}$ **(4)** $\displaystyle\int\cot(x-\alpha)\cot(x-\beta)\,dx$ **(5)** $\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{2+\cos x-\sin x}$

## Eulerova substituce

**(1)*** $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ **(4)** $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x}}$ **(7)** $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ **(10)** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$

**(2)*** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+x-2x^2}}{x}dx$ **(5)** $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ **(8)** $\displaystyle\int\frac{dx}{x}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ **(11)*** $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$

**(3)** $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$ **(6)** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ **(9)** $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

## Abelova substituce

**(1)*** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^{3/2}}$ **(2)** $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ **(3)*** $\displaystyle\int\frac{dx}{3+2\sqrt{6x-x^2-5}}$

## Slobinova substituce

**(1)*** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$ **(2)** $\displaystyle\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}$ **(3)** $\displaystyle\int\frac{x^2+1\,dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$ **(4)** $\displaystyle\int\frac{(x+1)^3(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+x^2+1}}$

# 4

## Hlubší vlastnosti funkcí

### Heineho věta

**(1)*** Spočtěte $\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n}$ **(2)*** Ukažte, že $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje

### Hromadné body, Weierstrassova věta, Limita posloupnosti

**(1)** Určete (existují-li) maximum, minimum, supremum, infimum, limes superior a limes inferior posloupnosti $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kde $a_n$ je

**(a)*** $n(2+(-1)^n)$ **(b)*** $\frac{n+(-1)^n n}{\sqrt{n}}$ **(c)** $\cos\frac{\pi n}{3}$ **(d)*** $\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$ **(e)** $\cos^n\frac{2\pi n}{3}$

**(2)** Dokažte, že daná posloupnost $a_n$ má limitu

**(a)** $(1+\frac{1}{n})^n$ **(b)** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ **(c)** $\sqrt{n}\, n^n e^{-n}/n!$

**(3)** Určete $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde

**(a)*** $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}$, $a_1 = 0$ **(b)** $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$ **(c)** $a_{n+1} = \ln\left(1+a_n^2\right)$, $a_1 = 1$

### Taylorova řada, Lagrangeův zbytek

**(1)** Vyjádřete jako Taylorovu řadu v bodě $x = 0$, určete konvergenci řady a odhadněte zbytek

**(a)** $\sin^2 x$ **(b)** $\arcsin x$ **(c)** $\arcsin^2 x$

### Průběh funkce

Vyšetřete průběh funkce na maximálním možném definičním oboru

**(1)** $3x - x^3$

**(2)*** $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+3}$

**(3)** $\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$

**(4)** $\sqrt{8x^2-x^4}$

**(5)** $x - \sqrt{x^2-1}$

**(6)** $\sqrt[3]{x^3-x}$

**(7)** $x\sqrt{1-x^2}$

**(8)*** $x^3\sqrt{1-x^2}$

**(9)** $\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(1-x)^2}$

**(10)** $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

**(11)** $\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3-1}}$

**(12)** $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

**(13)** $|x^2+x|\sqrt[3]{x}$

**(14)** $|x+1|/\sqrt[3]{x}$

**(15)** $\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$

**(16)** $\ln(1+x^2)$

**(17)** $x^2 \ln x$

**(18)*** $x - \ln(1+x^2)$

**(19)** $x\,|x^2-6x+8|$

**(20)** $\ln(1+|x^2-x-20|)$

**(21)*** $|x|^x$

**(22)** $(x^2-|x|)e^x$

**(23)** $(x^2-x)e^{|x|}$

**(24)** $(x^2-2x)e^x$

**(25)** $e^{2x-x^2}$

**(26)** $(2x+1)e^{\frac{1}{2x-1}}$

**(27)** $e^{-2x}\sin^2 x$

**(28)*** $e^{-x}\sqrt[3]{x^2}$

**(29)** $x\exp\left(-\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$

**(30)** $\operatorname{arctg} e^x$

**(31)** $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x}$

**(32)** $\frac{\arcsin|x|}{\sqrt{1-x^2}}$

**(33)** $\arccos\frac{2x}{x^2+1}$

**(34)** $|x-2|+2\operatorname{arctg}(x-1)$

**(35)** $\frac{x+2}{x^2+1}+\operatorname{arctg} x$

**(36)** $e^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}}$

**(37)** $\frac{x^3}{(x-1)^2}e^{\frac{2x}{x-1}}$

**(38)** $e^{\sin x}\cos x$

### Absolutní extrémy funkce jedné proměnné

**(1)** Najděte minimum, maxium, infimum a supremum (existují-li) funkce $f(x)$ na množině $M$, $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)*** $x^2-4x+6$, $M = (-3, 10)$ **(c)*** $x + \frac{\alpha}{2}(1-x^2)$, $M = [-1, 1]$ **(e)** $e^{-x^2}(|x|-\frac{1}{2})-7$, $M = \mathbb{R}$

**(b)*** $2x^3+3x^2-12x+8$, $M = [-1,\infty)$ **(d)** $(x^2-4)\operatorname{sgn} x - 3|x+1|$, $M = \mathbb{R}$ **(f)** $|4\cos^2 x - 1| - \sin x$, $M = (0, 2\pi)$

**(2)** Najděte všechna $\alpha \geqslant 0$ taková, pro něž $\forall x \in (0,\infty)$ : **(a)** $e^x > \alpha x$ **(b)** $\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x < e$

**(3)** Dokažte pro $\forall x \in [0,\infty)$: **(a)** $x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ **(b)** $\sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

# 5

## Integrál Riemannův a Newtonův

*"Vyšetřování existence určitého integrálu se provádí proto, že mimo nám dosud známých metod počítání integrálů existují i metody pokročilé, které jsou aplikovatelné jen v případě existence počítaného integrálu. Důkaz existence je tedy jen prvním krokem procesu, který skončí výpočtem jeho přesné hodnoty."*
— Pokorný & Černý, MAF I

### Konvergence a výpočet z definice Newtonova integrálu, integrál ve smyslu hlavní hodnoty

**(1)** Rozhodněte o konvergeci integrálu

**(a)*** $\int_0^1 \ln x \sin\frac{1}{x}\,dx$ **(b)*** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ **(c)*** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ **(d)*** $\int_0^\infty \cos x\,dx$ **(e)*** $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ **(f)** $\int_{-1}^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx$ **(g)** $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1}$

**(2)** Určete konvergenci a spočtěte

**(a)*** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ **(b)*** $\int_0^1 \ln x\,dx$ **(c)*** $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}\,dx$ **(d)*** $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ **(e)*** $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ **(f)*** $\fint_0^\infty \frac{dx}{1-x^3}$ **(g)*** $\int_0^{8\pi} \frac{dx}{1+\sin^4 x}$

**(h)** $\int_0^1 \ln^4 x\,dx$ **(i)** $\int_0^\pi \sin x \ln \sin x\,dx$, *Hint:* $t=\cos x$ **(j)** $\int_0^\infty x e^{-x}\cos x\,dx$, *Hint:* $e^{-x}\cos x = \mathrm{Re}\left[e^{x(i-1)}\right]$ **(k)** $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^2 x + 2\cos^3 x - 2}{\sin^4 x}\,dx$

**(l)** $\int_0^{\pi/2} (\sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2}))/\sqrt{\sin x}\,dx$

**(3)** Určete konvergenci v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a spočtěte

**(a)*** $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ **(c)** $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}$ **(d)*** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha^2+\cos^2 x}$ **(f)*** $\fint_0^\pi \frac{dx}{\cos x - \alpha}$

**(b)*** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ **(e)*** $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^2-\alpha^2)\sqrt{x^2-1}}$ **(g)** $\int_0^1 \frac{\alpha\,dx}{(1-\alpha x)\sqrt{1-x}}$

**(4)** Odvoďte pomocí integrace per partes ($n \in \mathbb{N}_0$)

**(a)*** $L_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ **(c)*** $G_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$

**(b)** $S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ **(d)** $D_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ *Hint:* $D_n - D_{n-1}$

**(5)** Ověřte

**(a)*** $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sin\alpha} & , \alpha \in (-\pi,\pi)/\{0\} + 2\pi k \\ 1 & , \alpha = 2\pi k. \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ *Hint:* Master formule

**(b)** $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x\cosh\alpha+1} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sinh\alpha} & , \alpha \in \mathbb{R}/\{0\} \\ 1 & , \alpha = 0. \end{cases}$ *Hint:* Parciální zlomky

**(c)** $\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x}\,dx = \pi\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$, $0 < a < b$ *Hint:* Substituce $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$

**(d)** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}\sqrt{1-2sx+s^2}} = \begin{cases} (2/\sqrt{ts})\,\mathrm{argtgh}\sqrt{ts}, & ts > 0 \\ (2/\sqrt{-ts})\,\mathrm{arctg}\sqrt{-ts}, & ts < 0\,, \\ 2, & ts = 0 \end{cases}$ $t \in (-1,1), s \in (-1,1)$

### Aplikace určitého integrálu

**(1)** Cykloida je křivka popsaná parametricky $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1-\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$. Spočtěte

**(a)*** Její délku **(b)** Těžiště (homogenní) křivky **(c)*** Obsah oblasti pod křivkou

**(2)** Asteroida je křivka zadaná vztahem $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$. Spočtěte

**(a)*** Její délku **(b)** Obsah oblasti, jež vymezuje **(c)*** Těžiště (homogenní) horní poloviny

**(3)** Protáhlý sféroid je těleso vzniklé rotací elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ kolem osy $x$ mající poloosy $0 < b < a$ a numerickou excentricitiu $\varepsilon$ danou vztahem $\varepsilon^2 = 1 - b^2/a^2$. Ověřte, že pro jeho povrch platí $P = 2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$.

**(4)** Spočtěte konvoluce $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ : **(a)*** $x^2 * e^{-\alpha|x|}$ **(b)** $\theta(x) * \theta(x)$ **(c)** $\sin x_+ * \sin x_+$ **(d)** $\frac{1}{\sqrt{x_+}} * \frac{1}{\sqrt{x_+}}$

### Výpočet z definice Riemannova intrgálu

Spočtěte z definice Riemannova integrálu ($\alpha \in \mathbb{R}$)

**(1)** **(a)** $\int_0^1 x\,dx$ **(b)*** $\int_0^1 x^2 dx$ **(c)** $\int_0^1 x^3 dx$

**(2)*** $\int_0^1 x^\alpha\, dx$, $\alpha > -1$,
*Hint:* Dělení $x_k = q^k$, $q \to 1^-$

**(3)** $\int_0^\pi \ln\sin x\, dx$

**(4)** $\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx$,
*Hint:* Dělení $x_k = 2\pi k/n$

**(5)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

**(6)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

**(7)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k+n}{n+2\sqrt{n^2+n+k}}$

**(8)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg}\frac{k}{n}}{1+2\sqrt{1+\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{k}{n}}}$

### Integrace užitím symetrie

**(1)** Určete konvergenci a spočtěte užitím symetrie ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

**(a)*** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$

**(b)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$

**(c)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx$

**(d)*** $\displaystyle\fint_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$

**(e)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$

**(f)*** $\displaystyle\fint_0^\infty \frac{dx}{1-x^3}$

**(g)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

**(h)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}$

**(i)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

**(j)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$

**(k)*** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\sin x\, dx$
*H:* subst. $x = 2y$

**(l)** $\displaystyle\fint_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^3-1}$

**(m)** $\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{x^2+\alpha^2}$
*H:* subs. $x = \alpha y$

**(n)** $\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}$
*H:* parc. zlomky

**(o)** $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{x^2+2x\cos\alpha+1}$
*H:* subs. $x = 1/y$

**(p)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(x^2+e^x)}$
*H:* subst. $x = -y$

**(q)** $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$
*H:* subs. $x = \pi - y$

**(r)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\, dx}{\cosh x - \alpha\sinh x}$
*H:* subst. $y = e^x$

**(s)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{x^2+2\alpha x+1}$

**(t)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^3}\sqrt{x}\, dx$

**(u)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}$

**(v)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\, dx$

**(2)** Dokažte Cauchy–Schlömlichovu formuli ($a, b \in \mathbb{R}^+$) $\int_0^\infty f\left(ax - \frac{b}{x}\right)\, dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$. *Hint:* $x = b/(ay)$.

### Limitní přechody v integrálech

V následujícím označujeme $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{n(1-x^{1/n})}}$, $\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} 1 \\ x^2 \\ x^4 \end{bmatrix} \cos^{2n} x\, dx$, $\beta_n = \dfrac{B_n}{A_n}, \gamma_n = \dfrac{C_n}{A_n}$.

**(1)** Rozhodněte o platnosti záměny limity a integrálu odhadem integrálu a spočtěte
**(a)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$ **(b)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n dx$ **(c)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\, dx}{x^2+n^2}$
**(d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x}}$ **(e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\, dx}{1+n^2x^2}$

**(2)** Pomocí parciálních zlomků se BÚNO pro $0 < a < b$ odvodí formule
$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$
Ověřte její platnost i pro $0 < a = b$ pomocí limitního přechodu výše uvedeného vztahu, tj. dle limitního přechodu bez počítání integrálu dokažte, že
$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}, \qquad 0 < a.$$
*Hint:* Volme $b_n = a(1 + 1/n)$ a
$I_n := I(a, b_n) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+a^2(1+\frac{1}{n})^2)} = \frac{\pi}{a^3(2+\frac{1}{n})}$,
poté ukažte, že $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ dvěma způsoby.

**(3)*** Spočtěte $\lim_{n\to\infty} L_n/S_n$ odhadem integrálů a odvoďte Wallisovu formuli

**(4)*** Ukažte platnost záměny limity a integrálu $\lim_{n\to\infty} J_n$ odhadem a odvoďte Gaussův integrál

**(5)*** Ukažte platnost limitního přechodu v $\lim_{n\to\infty} D_n$ a odvoďte Dirichletův integrál

**(6)** Pomocí hodnoty Dirichletova integrálu ukažte
**(a)** $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$ **(b)** $\int_0^\infty \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}\, dx = \pi$

**(7)*** Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$ a odvoďte $\zeta(2) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**(8)** Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$ odhadem integrálů a získejte
$$\zeta(4) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$
*Hint:* Napište mi mail. Řešení je ale tady.

# 6

## Obyčejné diferenciální rovnice

Na maximálním možném intervalu najděte řešení obyčejné diferenciální rovnice:

### Separovatelné

**(1)** $y' = |y|$

**(2)*** $y' = -2\sqrt{y},\ y(0) = 1$

**(3)*** $y' = 4x\sqrt{y}$

**(4)*** $yy' = \frac{1}{x}$

**(5)*** $y' = \sqrt{1-y^2}$

**(6)** $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$

**(7)*** $y' = \frac{y^2+1}{xy}$

**(8)*** $yy' = 2x\sqrt{1-y^2}$

**(9)** $yy' = -2x\sqrt{1-y^2}$

**(10)*** $x^2y'' = y'^2$

**(11)** $y' = (x+1)\sqrt[3]{y}$

**(12)** $y' = \frac{2x\sqrt{\sin y}}{\cos y}$

**(13)** $yy' = \sqrt[3]{1-y^2}$

**(14)** $xyy' = \sqrt{y^2+1}$

**(15)** $y'\sin x = y\ln y$

**(16)** $y'\cos y = x+1$

**(17)** $y' = 2e^x\sqrt{|y|}$

**(18)*** $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2};\ y(0) = 1$

**(19)** $3(1-x^2)^2y' = 5(1+x^2)y^{\frac{3}{2}}, y(0) = 1$

### Částečně integrovatelné

**(1)** $xy' + y = \ln x + 1$

**(2)** $y^3y'' = 1$

**(3)*** $y'' = 2y^3;\quad y(-1) = y'(-1) = 1$

**(4)** $2y'' = 3y^2; y(-2) = 1, y'(-2) = -1$

**(5)** $y'' = e^y;\ y(0) = 0, y'(0) = 1$

**(6)*** $y''' = 3yy';\ y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = \frac{3}{2}$

**(7)*** $y^3y'' = -1;\quad y(1) = y'(1) = -1$

**(8)** $2y^2y'' = -1;\quad y(0) = y'(0) = 1$

**(9)** $y^3y'' = 4(y^4-1);\ y(0) = y'(0) = \sqrt{2}$

**(10)*** $yy'' + y'^2 = 1;\ y(0) = 1, y'(0) = 0$

**(11)*** $yy'' - y'^2 = y^2y'';\ y(0) = 1, y'(0) = 2$

**(12)** $yy'y'' = y^3 + y'^3;\ y(0) = y'(0) = 1$

### Lineární prvního řádu, variace konstant

**(1)*** $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\ln x}{x}$

**(2)** $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

**(3)** $y'\sin(2x) - 2y = 2\cos x$

**(4)** $y' + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{1}{x(x^2+1)}$

**(5)** $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

**(6)** $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sin x,\quad y(0) = 3$

### Bernoulliovy, variace konstant

**(1)*** $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

**(2)** $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2y}$

**(3)** $xy' + y = xy^2\ln x$

**(4)*** $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

**(5)** $xy' - x^2y^2 = y,\quad y(1) = 1$

**(6)** $xy' = y + \sqrt{xy}$

**(7)** $xy' = |y| + x\sqrt{y}$

**(8)** $y' - xy + xy^2 = 0$

**(9)** $x^2y' + \sqrt{y} + y = 0$

**(10)** $y' + 2y/x^2 + 2\sqrt{y}/x^2 = 0$

**(11)** $2y' - 6y\,\mathrm{tg}\,x + 3\sqrt[3]{y}\sin x = 0$

**(12)** $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$

**(13)** $3y' + 2y/(x\ln x) + 2/(x\sqrt{y}) = 0$

**(14)** $4y' + 3y/(\sqrt{x}) + 3/(\sqrt{x}\sqrt[3]{y}) = 0$

**(15)** $x - y^2 + 2xyy' = 0$

**(16)** $y' + 2xy = 4x/y$

**(17)** $y' = (y^2 - x^2 + 1)/(2xy)$

**(18)*** $xy' + y = y^2\ln x;\ y(1) = 1$

**(19)** $y' - y/x = -y^3/x;\quad y(1) = \frac{1}{2}$

**(20)** $y' + y\cot g\,x = -\frac{\cos x}{2y},\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

**(21)** $y' + y/x^2 = y^3/x^2,\ y(1) = \frac{1}{2}$

**(22)** $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}};\ y(0) = 0$

### Homogenní

**(1)*** $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$

**(2)** $y' = \frac{y-x}{y+x}$

**(3)*** $y'(x+y) + x - y = 0$

**(4)** $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

**(5)** $(x^2 + y^2)y' = 2xy$

**(6)** $xy' = y + \sqrt{xy}$

**(7)** $y' = \frac{y}{x - \sqrt{x^2+y^2}}$

**(8)*** $(x + y - 2)y' = 1$

**(9)*** $y'x + y\ln y = y\ln x$

**(10)** $y' = \dfrac{xy + y^2}{2x^2 + xy};\ y(1) = 1$

**(11)** $y'x^2 = x^2 + xy + y^2;\ y(0) = 1$

**(12)** $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2};\ y(2) = 0$

**(13)** $xy' = \frac{y(y-x)^2}{x^2+y^2};\ y(1) = 1$

### Lineární obecné, substituce známým řešením

**(1)*** $(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x+\dfrac{1}{x};\quad y_1=x+2$

**(2)** $xy''+2y'-xy=0;\quad y_1=\dfrac{e^x}{x}$

**(3)** $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x^2+x.$ *(Hint: $y=y_1$ je polynom)*

### Lineární s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

**(1)*** $y''-2y'-3y=e^{4x}$

**(2)** $y'''-3y'+2y=e^x$

**(3)** $y'''+y'=x\cos x$

**(4)** $y''-4y=x^2e^{2x}$

**(5)** $y''-3y'+2y=2\sin^2 x$

**(6)*** $y''+4y'-5y=2e^x\sin^2 x$

**(7)** $y''-2y'+y=2xe^x+e^x\sin 2x$

**(8)*** $y'''-3y''-4y'=x^3+xe^x$

**(9)** $y'''+y''+y'+y=\cos x+e^x$

**(10)** $y'''+4y'=x\cos^2 x$

**(11)** $y^{(4)}-5y''+4y=e^{2x}+e^{3x}$

**(12)** $y^{(4)}-y=\sin^3 x$

**(13)** $y^{(5)}+y^{(3)}=x\sin x;\quad y(0)=1,\ y^{(k)}(0)=0,\ k\in\{1,2,3,4\}.$

**(14)** $y'''-y''+4y'-4y=20\cos 2x+16xe^{2x};\ y(0)=-1, y'(0)=-3, y''(0)=-11$

### Lineární s konstantními koeficienty a obecnou pravou stranou, Wronskián

**(1)*** $y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$

**(2)*** $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x};\quad y(1)=y'(1)=0$

**(3)** $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x^2};\quad y(1)=y'(1)=0$

**(4)** $y''+y=\frac{1}{\cos x};\ y(0)=1, y'(0)=0$

**(5)** $y''+4y=\frac{16}{\cos 4x};\ y(0)=3, y'(0)=0$

**(6)** $y''+16y=\frac{16}{\cos 4x};\ y(0)=3, y'(0)=0$

**(7)** $y'''+y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x};\ y(0)=y'(0)=1, y''(0)=0$

**(8)** $y'''-3y'+2y=\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$

### Eulerovy

**(1)** $x^2y''-2y=0$

**(2)** $x^2y''-3xy'+4y=0$

**(3)** $x^2y'''=2y'$

**(4)** $x^2y''+xy'+4y=10x$

**(5)** $x^2y''+xy'-y=2\sqrt{x}$

**(6)** $x^3y'''+xy'-y=6x;\ y(1)=y''(1)=1, y'(1)=0$

**(7)*** $x^2y''-2xy'+2y=\frac{x^2}{1+x^2}$

**(8)** $x^2y''+xy'-y=\frac{1}{1+x^2}$

**(9)** $x^2y''-xy'+y=\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$

**(10)** $x^2y''+3xy'+y=\frac{3\sqrt{\ln x+1}}{x}$

### Autonomní

**(1)** $2yy''=y^2+y'^2$

**(2)*** $1+y'^2=2yy'';\quad y(0)=y'(0)=1$

**(3)** $yy''=y'^3-y'^2;\ y(0)=1, y'(0)=-1$

**(4)** $yy''=y'^2+y^3y';\ y(0)=y'(0)=1$

**(5)** $yy''+y'^2=y'^3y-y'/y,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1$

**(6)** $\left(1-\frac{1}{y'^2}\right)\frac{y''}{y'}=1-\frac{1}{y^2},\quad y(0)=y'(0)=1$

**(7)** $y'^4=4y^2(y''^2-y'''y');\ y(0)=1, y'(0)=-2, y''(0)=2$

### Řešené derivací celé rovnice (implicitní, autonomní a jiné)

**(1)*** $y'=2\sqrt{y},\quad y(0)=1$

**(2)** $1+y'^2=2yy'';\quad y(0)=y'(0)=1$

**(3)*** $2y=2x^2+4xy'+y'^2$

**(4)** $y-xy'=y'^2$

**(5)** $\dfrac{1}{y'}-\dfrac{1}{y}=e^x,\quad y(0)=1$

### Metoda integračního faktoru, ODR ve tvaru totálního diferenciálu

**(1)** Integrační faktor $\mu=\mu(x)$ nebo $\mu=\mu(y)$

**(a)*** $2xy+(x^2-y^2)y'=0$ **(b)** $x^2-y^2+(y^3-2xy)y'=0$ **(c)*** $x^2+y-xy'=0$ **(d)** $2xy^2-y+(y^2+x+y)y'=0$ **(e)** $y'(y^3-\ln x)+\frac{y}{x}=0$ **(f)** $\frac{1}{x}+(y^2+\frac{\ln x}{y})y'=0$ **(g)** $(x^2+y^2)(xy'-y)=(\frac{1}{2}+x)x^{10}$ **(h)** $3x^2y+y^3-(2x^3+5y)y'=0$ **(i)** $2x^{10}y+(x^{11}-x^9y)y'=0$ **(j)** $xe^{-y}-(2xy+x^2e^{-y})y'=0$

**(2)** Integrační faktor $\mu=\mu(xy)$ **(a)*** $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)y'=0$ **(b)** $xy^2+(x^2y-x)y'=0$ **(c)** $2x^3y^2-y+(2x^2y^3-x)y'=0$

**(3)** Integrační faktor $\mu=\mu(x/y)$

**(a)*** $1+\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln x-y'\ln x=0$ **(b)** $\frac{2x^3}{y^2}-\frac{\sin^2 y}{y^2}+(\frac{2x^2}{y}+\frac{x\sin(2y)}{y^2})y'=0$ **(c)** $\frac{y}{x}+\frac{2}{y^2}+(\frac{1}{xy}-\frac{3x}{y^3})y'=0$

**(4)** Integrační faktor $\mu=\mu(x+y)$ **(a)*** $\cos(x+y^3)-\sin(x+y^3)+(\cos(x+y^3)-3y^2\sin(x+y^3))y'=0$

### Úlohy vedoucí na diferenciální rovnice

**(1)** Uvažujme soustavu parabol $y = x^2 + C$ v rovině. Najděte soustavu křivek, která je v každém bodě kolmá na ze zmíněné soustavy tu parabolu procházející tímto bodem. *Hint:* Sestavte si ODR problému a vyřešte.

**(2)** Uvažujme balíček nekonečně tenkých karet, které za sebe jako na výšku pokládané domino skládáme do řady tak, aby se jedna opírala o druhou. Budeme-li zmenšovat vzdálenosti mezi kartami, bude množina vrcholů karet (viděno zboku) opisovat křivku. Najděte její rovnici.

**(3)** Jaký je tvar ideální čočky? Uvažujme čočku na jedné straně vypouklou a na druhé straně plochou. Jaký je tvar vypouklé části, aby se všechny navzájem rovnoběžné paprsky vstupující do čočky na její ploché straně kolmo sbíhaly na druhé straně v jednom jediném bodě?

**(4)** Uvažujme soustavu všech elips v rovině sdílející společná ohniska $[\pm 1, 0]$ (tzv. konfokální elipsy). Sestavte si ODR popisující soustavu křivek kolmou na předchozí soustavu v každém bodě a ukažte, že tuto ODR řeší soustava konfokálních hyperbol s týmiž ohnisky.

**(5)** Řešete diferenciální rovnici $y'' + \sin y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0, y'(0) = 2$ (jediné netriviální exaktní řešení matem. kyvadla).

**(6)** Najděte kolmou soustavu křivek k soustavě všech kružnic mající společný dotyk v počátku a střed na ose $x$. *Hint:* Sestavte si ODR a vyřešte.

# 7

## Konvergence číselných a mocninných řad

Rozhodněte o absolutní a neabsolutní konvergenci číselných řad (popř. v závoslosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

### Nulita

**(1)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$ **(2)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ **(3)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$

### Integrální kritérium

**(1)*** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ **(2)*** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ **(3)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$ **(4)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

### d'Alemberovo podílové kritérium

**(1)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ **(2)*** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(n-1)^n}$ **(3)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(2n)!}{(3n+1)!}$ **(4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

### Cauchyho odmocninové kritérium

**(1)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$

### Gaussovo kritérium

**(1)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{n^{\alpha}(2n)!}$ **(2)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+2)\cdots(\alpha+2n-2)}{(2n)!!(n+1)^{\beta}}$ **(3)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^{\alpha}(2n)!}$ **(4)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^{n+\alpha}}$ **(5)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+\alpha}}$

### Srovnávací a rozvíjející kritéria

**(1)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ **(3)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$ **(5)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **(7)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n - \ln(n+1)}{\sqrt{n}}$ **(9)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \ln\frac{n+1}{n}$

**(2)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$ **(4)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1$ **(6)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(2+\sin n)}}$ **(8)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(n+\sin n)^n}$ **(10)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^{\alpha}}}{\ln\left(1+\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^{\beta}}}\right)}$

### Absolutní kritérium

**(1)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{3^n}$ **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ **(3)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}+\frac{\cos n}{n^2}\right)$

### Leibnizovo

**(1)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

### Abelovo kritérium

**(1)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$ **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

### Dirichletovo kritérium

**(1)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^\beta}$, *Hint:* $|\sin n\alpha| \geqslant \sin^2 n\alpha$

**(2)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$

**(3)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{n}(3+(-1)^n)$

**(4)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \sin\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

**(5)*** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

**(6)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n^2+n}-\sin\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n}}$ *Hint:* Teleskopie

**(7)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha$

**(8)** $\sum_{n=2}^{\infty} \sin n \frac{\ln n}{n}$

**(9)** $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}n)(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}$

**(10)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}\cos(n\alpha)}{n^2\ln(n^2+1)}$

**(11)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{(n^2+1)^\beta\sqrt{\ln(n+1)}}$

## Bolzano-Cauchyho kritérium

**(1)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

**(2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{\sqrt{n}}$

## Technika rozvoje na konvergentní a absolutně konvergentní/divergentní část

**(1)*** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

**(2)*** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

**(3)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+(-1)^n}$

**(4)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

**(5)*** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$

**(6)*** $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+\alpha^2}$

**(7)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\pi\sqrt{n^2+n}}{n^\alpha}$

**(8)*** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$

**(9)** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\alpha\right)}{\ln\ln n}$

**(10)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n^2\ln n}{n\ln n-1}$

**(11)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{\sin\frac{\pi n}{4}+n^\alpha}$

**(12)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n^2+n}-\cos\sqrt{n^2-n}}{n^\alpha}$

**(13)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}\sin\frac{(-1)^n}{n}$

**(14)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{n^3\pi}{n^2+1}}{\ln(\sqrt{n}+1)}$

**(15)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\frac{n-1}{n+1}\sin\frac{n^2\pi}{n+1}$

## Konvergece mocninné řady, analytické funkce

V závoslosti na reálném parametru $\alpha$ vyšetřete konvergenci mocninné řady $z \in \mathbb{C}$

**(1)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^n n}$

**(2)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n^2-1}$

**(3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$

**(4)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n+(-1)^n}$

**(5)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha z^n$

**(6)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\right)^\alpha z^n$

**(7)** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n!)^3}{(3n)!}\right)^\alpha z^n$

**(8)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n z^n}{(n+1)^{n+\alpha}}$

**(9)** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) z^n$

**(10)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} z^n$

**(11)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \operatorname{arctg}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}{\ln^2(1+n^2)}$

## Součet mocninné řady

Zjistěte poloměr konvergence a sečtěte řady pro reálná $x$

**(1)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{k+1}$ **(2)*** $\sum_{k=1}^{\infty} x^k k^2$ **(3)*** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}x^k$ **(4)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{(2k+1)!}$ **(5)*** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k+1)}$ **(6)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k^2-1}$

Pomocí úprav vhodné známé mocninné řady sečtěte číselnou řadu ($n \in \mathbb{N}$ je fixní)

**(1)*** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k}$

**(2)*** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

**(3)*** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

**(4)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(2k+1)!}$

**(5)*** $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

**(6)*** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)4^k}$

**(7)** $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}\frac{k^2}{2^k}$

**(8)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$

**(9)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

**(10)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$

**(11)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-1}$

**(12)*** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k^2}$

# 8

## Metrické prostory

### Bodové množiny

**(1)** Ukažte, že $l_\infty$ prostor se supremovou metrikou všech posloupností s omezenou supremovou normou je metrický prostor. Jest tedy

$$l_\infty = (\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|\}, \rho_\infty).$$

**(2)*** Najděte $\operatorname{int} A, \operatorname{ext} A, \partial A, \overline{A}, A^i, A'$, kde $A$ je množina

- **(a)** $\mathbb{Q} \cap (0,1)$
- **(b)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1, y \geqslant 0\}$
- **(c)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| < x^2+y^2 \leqslant 1\}$
- **(d)** $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- **(e)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\}$
- **(f)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

**(3)*** Dokažte omezenost množin:

- **(a)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leqslant xyz < 4\}$
- **(b)** $\{(x,y) \in [0,\infty)^2 \mid x^3+y^3-2xy = 0\}$

**(4)*** Označme si $A^i$ množinu všech izolovaných bodů a symbolem $\sqcup$ značme *disjunktní* sjednocení (množin), pak v libovolném metrickém prostoru $(P,\rho)$ pro libovolnou množinu $A$ platí (ukažte)

- **(a)** $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^C}$
- **(b)** $P = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A$
- **(c)** $\overline{A} = A^i \sqcup A'$.

**(5)*** Ukažte, že v obecném metrickém prostoru a pro libovolné množiny $A, B$ a libovolnou otevřenou množinu $F$ platí, že

- **(a)** $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$
- **(b)** $F \subset A \Rightarrow F \subset \operatorname{int} A$
- **(c)** $\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$
- **(d)** $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$
- **(e)** $\overline{A} = (\operatorname{ext} A)^C$
- **(f)** $\operatorname{ext} \overline{A} = \operatorname{ext} A$
- **(g)** $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
- **(h)** $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
- **(i)** $A \subset \overline{A}$
- **(j)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

### Banachova věta o kontrakci

**(1)*** Dokažte, že posloupnost $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n^2 - x\right)$, $a_0 = 0$ konverguje k $\sqrt{x}$ pro libovolné $x \in [0,1]$

**(2)** Pomocí Newtonovy metody určete s přesností 6 desetinných míst

- **(a)*** Řešení rovnice $2x + \sin x = 1$
- **(b)** první 4 kořeny Besselovy funkce (na kladné části reálné osy) definované mocninnou řadou

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

**(3)** Pomocí Banachovy věty o kontrakci určtete numericky hodnotu $y(1)$, jež je řešením rovnice

- **(a)*** $y(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s y(s) ds$
- **(b)** $y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1$
- **(c)** $y'(x) = \frac{1}{2} + y(y(x)), \quad y(0) = 0$

*Hint:* Rovnice **(b)**, **(c)** lze přepsat jako integrální Volterrovy, z nichž poté vytvoříme iterační schémata

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(s)ds, \quad y_0(x) = 0 \qquad\qquad y_{n+1}(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x y_n(y_n(s))ds, \quad y_0(x) = 0.$$

# 9

# Diferenciální počet více proměnných

### Definiční obor

Určete definiční obor funkce $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zakreslete do roviny $xy$

**(1)*** $\sqrt{1-x^2-y^2}$

**(2)** $\frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$

**(3)** $\arcsin\frac{y-1}{x}$

**(4)*** $\frac{1}{\ln(1-x-y)}$

**(5)** $\frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

**(6)** $\sqrt{\ln\frac{16}{x^2+y^2}}$

**(7)*** $\ln(|x|+|y|-1)$

**(8)** $\frac{1}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

**(9)** $\sqrt{1-xy}$

### Limita funkce více proměnných

Spočtěte limitu (nebo ukažte, že neexistuje)

**(1)*** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

**(2)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}$

**(3)** $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]}\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$

**(4)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

**(5)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

**(6)*** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

**(7)*** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**(8)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2}{|x|+|y|}$

**(9)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

**(10)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

**(11)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy^2}{x^4+y^2}$

**(12)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

**(13)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^5+y^4}{x^4+y^2}$

**(14)*** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2-y^2}{2x^2+y^2}$

**(15)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2}{x^2+y^2}$

**(16)*** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

**(17)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy}{x^2+y^2}$

**(18)*** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**(19)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

**(20)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2y^4-x^4y^2}{(x^2+y^2)^3}$

**(21)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\operatorname{arctg}\frac{x}{|y|}$

**(22)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{|x+y|}{1-e^{x^2+y^2}}$

**(23)** $\lim\limits_{[x,y]\to(1,1)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2}$

**(24)*** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy^3}{2x^3+y^6}$

**(25)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{y^2}{x^4+y^2}$

**(26)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy}{x^4+y^2}$

**(27)*** $\lim\limits_{[x,y,z]\to[0,0,0]}\frac{xz^2+2y^2}{x^2+2y^2+z^4}$

**(28)*** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

**(29)** $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}(x^2+y^2)^{xy}$

**(30)*** $\lim\limits_{\|[x,y]\|\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

**(31)** $\lim\limits_{\|[x,y]\|\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

**(32)** $\lim\limits_{\|[x,y]\|\to\infty}\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$

### Parciální derivace a totální diferenciál

**(1)** Určete směrový gradient $\nabla_{\vec{v}}f(P)$, *Hint:* $\nabla_{\vec{v}}f(P) = \vec{v}/\|\vec{v}\| \cdot \nabla f(P)$

**(a)** $x^2-y^2$, $P=[1,1]$, $\vec{v}=\frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$ **(b)** $4-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$, $P=[3,1]$, $\vec{v}=(-1,1)$ **(c)** $(2x+1)^y+\sin(x^2+y^2-1)$, $P=[0,1]$, $\vec{v}=(1,4)$

**(2)** Určete, ve kterých bodech definičního oboru existují parciální derivace a ve kterých totální diferenciál $df$ zadané funkce. Lze funkci $f(x,y)$ dodefinovat v počátku tak, aby i zde měla totální diferenciál $df([0,0])$?

**(a)*** $|x||y|$

**(b)** $\sqrt[3]{xy}$

**(c)** $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

**(d)** $\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

**(e)** $xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

**(f)** $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

**(g)** $\sqrt[3]{x^3+y^3}$

**(h)** $xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

**(i)** $\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

**(j)** $e^{x|y|+y|x|}$

**(k)** $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**(l)** $\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

**(3)** Spočtěte $d^3f$: **(a)** $f(x,y)=x^3y^2$ **(b)** $f(x,y)=x^3-y^3-xy+y^2$ **(c)** $f(x,y)=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$ **(d)** $f(x,y,z)=xyz$

### Tečná rovina a Taylorův rozvoj

**(1)** Spočtěte Tylorův rozvoj třetího řádu $T_3(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ funkcí

**(a)** $xe^{x^2y}$, $[0,0]$ **(c)** $\sin(x+y^2)$, $[0,0]$ **(e)** $\ln\frac{y-x}{y+x}+2^{\sin(x^2y)}+y\arcsin(2x)$, $[0,1]$

**(b)** $3x+\sqrt{2x+4y+1}$, $[0,0]$ **(d)** $2^{xy-x}+\operatorname{arctg}(2y)+\frac{\operatorname{tg}(xy)}{x}$, $[1,0]$ **(f)** $e^{x^2y}+\operatorname{arctg}(2y)+\frac{y}{2x}$, $[2,0]$

*Hint:* Z jednoznačnosti Taylorova rozvoje lze získat výsledek i postupným rozvojem jednotlivých funkcí.

**(2)** Určete přibližně **(a)** $1.003^{2.01}$ **(b)** $\sqrt{1+0.002+0.03^2}$ **(c)** $\sqrt{1.01^4+2.02^3}$ **(d)** $\ln(\sqrt{9.01}-\sqrt{0.99}-1)$

### Lokální extrémy funkcí více proměnných, Hessián

**(1)** Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y)$ na $\mathbb{R}^2$ a klasifikujte je

**(a)*** $2x^3+xy^2+5x^2+y^2$
**(b)** $y^4+32x^2-32xy$
**(c)** $2x^3+xy^2+5x^2+y^2$
**(d)*** $x^3+y^3+3x^2y+$ $+3xy^2+6x^2+3y^2$
**(e)** $x^3-9x^2+15x-y^2+2y$
**(f)** $y^3+\frac{3}{2}y^2-18y+x-x^2$
**(g)** $xy+x^2+y^2-3x-4y$
**(h)** $2xy-x^2-2y^2-x-2y$
**(i)** $x^2-4xy+2y^2-3x+y$
**(j)** $x^4+x^3+4x^2+12xy+9y^2$
**(k)** $x^3+3xy+y^3$
**(l)** $e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$
**(m)** $e^{x^2-y}(5-2x+y)$
**(n)** $e^{-(x^2+y^2)}(x+y+\frac{3}{2})$
**(o)** $e^{-x^2-y^2}(2+x-y)$
**(p)** $e^{x^2+2y^2}(x+y)$
**(q)** $e^{-x^2-y^2}(x^2+10y-5)$
**(r)** $\ln(x+1)-xy^2$
**(s)** $e^{x^2+(y+2)^2}+x^2$
**(t)** $x-y^2-e^{x-2y}$
**(u)** $\sin x\cos y$
**(v)** $\cosh x\sin y$

**(2)** Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z)$ na $\mathbb{R}^3$ a klasifikujte je

**(a)*** $x^3+y^2+z^2+12xy+2z$
**(b)*** $x^3-2x^2+y^2+z^2-2xy+xz-yz+3z$
**(c)** $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$
**(d)** $2xy^2-4xy+x^2+z^2-2z$
**(e)** $xy-2xz+3yz+7x-15y+3z$
**(f)** $2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2$
**(g)** $x^2+y^2-z^2+xy-yz+xz$
**(h)** $x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2xz$
**(i)** $x^2+2y^2+3z^2-2xy+2yz+2z-6x$
**(j)** $\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}+x$

### Absolutní extrémy funkcí více proměnných na množině, řešené substitucí

**(1)** Najděte minimum, maxium, infimum a supremum (existují-li) funkce $f(x,y)$ na množině $M\subset\mathbb{R}^2$

**(a)*** $x^2-2xy-y^2-4x$, úsečka $[0,-5][2,3]$
**(b)** $x^2+2x+y^2+2y$, $[-2,2]^2$ (čtverec)
**(c)** $x^2+y$, trojúh. $[0,0][0,1][1,0]$
**(d)** $x+1$, $0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1-\frac{y}{2}$
**(e)** $x^2-y^2$, $|x|\leqslant 1+y^2, |y|\leqslant 1$
**(f)** $y^2-2xy+x^3$, $|y|\leqslant x^2, |x|\leqslant 1$
**(g)** $x^3-3xy+y^3$, trojú. $[1,1][0,-1][-1,0]$
**(h)*** $xy-2x^2$, $|x|+|y|\leqslant 1$
**(i)** $x^2-xy+y^2$, $M: |x|+|y|\leqslant 1$
**(j)** $2x-y$, $M: x^2+2y\leqslant 18$
**(k)** $6y-x^2-16x, 3x\leqslant y\leqslant 8-\frac{x^2}{2}, y\geqslant 0$
**(l)** $2x^3-xy+y^2-4y-x, 2x^2-1\leqslant y\leqslant x+1$
**(m)** $2y^2+x^2$, $|x|\leqslant 1-y^2, |y|\leqslant 2$
**(n)** $x^2+y^4$, $-1-y^2\leqslant x\leqslant 1, |y|\leqslant 2$
**(o)** $x+y$, $M: x+xy\in(1,2), x>0$
**(p)*** $(x+y)e^{-2x-3y}$, $M=[0,\infty)^2$
**(q)** $x^2-8x+8y, 1-x\leqslant y\leqslant \ln x, 1\leqslant x\leqslant 4$
**(r)*** $x-y^2$, $x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant -x$
**(s)** $1+x+y^2$, $x^2+2y^2\leqslant 4$
**(t)** $x^2+y^4$, $x^2+y^2\leqslant 4, |x|\leqslant 1$
**(u)** $x^2+y^2$, $x^2+4y^2=1$
**(v)** $x^2+2y$, $y\geqslant x^2-4, x^2+y^2\leqslant 4$
**(w)** $x^2-y^2+\frac{4}{3}x^3, x^2+y^2\leqslant 4, x\leqslant 0$
**(x)** $(x^2+7y^2)e^{-2x^2-y^2}, x^2+4y^2\leqslant 1$
**(y)** $xy\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2<1$
**(z)*** $(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$, $M=\mathbb{R}^2$

**(2)** Najděte minimum, maxium, infimum a supremum (existují-li) funkce $f(x,y,z)$ na množině $M\subset\mathbb{R}^3$

**(a)** $(x+y)^2+(x-y)^2+z$, $M=[-1,1]^3$ **(b)** $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$, $M=\mathbb{R}^3$

### Absolutní extrémy funkcí více proměnných na množině, řešené Lagrangeovými multiplikátory

**(1)** Najděte minimum, maxium, infimum a supremum (existují-li) funkce $f(x,y)$ na množině $M\subset\mathbb{R}^2$

**(a)*** $x^2+y^2-12x+16y, x^2+y^2\leqslant 25, y>x$
**(b)** $x+y$, $x^2+y^2=1$
**(c)** $1+x+y$, $x^2+2x+y^2\leqslant 0$
**(d)*** $2x+(x-2)y$, $x^2+y^2=1$
**(e)** $xy^3$, $x^2+y^2\leqslant 4, x<1$
**(f)** $x^2+2y, x\geqslant 0, y\geqslant -x, x^2+y^2\leqslant 17$
**(g)*** $|x|+|y|$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1$
**(h)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $M: \frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1,\ xy\neq 0$
**(i)** $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y, x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 1$
**(j)** $e^x$, $x^2+2y^2=1$
**(k)** $x+y, x^3+y^3-2xy=0, x\geqslant 0, y\geqslant 0$
**(l)** $y$, $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$
**(m)** $x^2+y$, $4y^3-4y+x^2=0, y\geqslant 0$
**(n)** $x^4y$, $x^4+y^4\leqslant 16, x\geqslant -1$
**(o)** $2x+4y$, $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$

**(2)** Najděte minimum, maxium, infimum a supremum (existují-li) funkce $f(x,y,z)$ na množině $M \subset \mathbb{R}^3$, $a > 0$

**(a)** $1+z+x+y^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$

**(b)*** $x+y+z,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$

**(c)** $x^2+2y^2-3z^2,\ 3x^2+2y^2+z^2 \leqslant 1$

**(d)** $x^2+y^2+z^2,\ 2x^2+y^2+3z^2 \leqslant 6$

**(e)** $xyz,\ x^2+y^2+z^2 = 3$

**(f)** $x^6y^6z^6,\ x^2+2y^2+3z^2 \leqslant 1$

**(g)** $z^2,\ x^2+y^2+z^2 = 1, (x-\frac{1}{2})^2+y^2 \leqslant \frac{1}{16}$

**(h)** $x^3+y^3+z^3,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$

**(i)** $xyz+\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z},\ xyz \neq 0$

**(j)** $\sin x \sin y \sin z,\quad x+y+z = \frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0$

**(k)** $xy^2z^3, x+2y+3z = a, x>0, y>0, z>0$

**(l)** $e^{-z^2}(x^2+xy+y^2),\ x^2+y^2 = 1, |z| \leqslant 1$

**(m)*** $xy+yz, x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 1$

**(n)** $x^2+y^2+z^2, x+y+2z = 2, z = x^2+y^2$

**(o)** $x-2y+3z, x^2+y^2 = 1, x^2+y^2+z^2 = 2$

**(p)** $x-3y+2z, x^2+y^2+z^2 = \frac{59}{4}, x+y+z = \frac{3}{2}$

**(q)** $4x-y,\ y^2+z^2 = 40,\ x^2+z^2 = 100$

**(r)** $x^2+2xz+y^2+z, x^2+y^2+z^2 = 1, x = y^2+z^2$

**(s)** $z+e^{xy},\ x^2+y^2+z^2 = 1, x^2+y^2 = z^2$

## Implicitní funkce

**(1)** Rozhodněte, zda je možné ze vztahu $F(x,y) = 0$ na okolí bodu $[x_0, y_0]$ vyjádřit $y(x)$ jako implicitní funkci, spočtěte $y'(x_0), y''(x_0)$ a rozhodněte o povaze lokálního extrému, pokud se v tomto bodě nachází.

**(a)*** $x^3+y^3-2xy = 0,\quad [1,1]$

**(b)** $x^2+2xy^2+y^4-y^5 = 0,\quad [0,1]$

**(c)** $2x^4y+x^3+y^3+xy = 1,\quad [1,0]$

**(d)** $e^x+2xy^2+y^4-y^5 = 0,\quad [0,1]$

**(e)** $\ln(x+y)+2x+y = 0,\quad [-1,2]$

**(f)** $y^2+x^4+\sin y+\cos x = 1,\quad [0,0]$

**(g)** $e^{xy}+\sin y+y^2 = 1,\quad [2,0]$

**(h)** $\sin(xy)+\cos(xy) = 1,\quad [\pi, 0]$

**(i)** $\frac{\cos x \sin y}{1+xy}+\frac{x}{y} = 1,\quad [\pi,\pi]$

**(j)** $(x^2+y^2)^2 = y^2-x^2,\quad [0,1]$

**(k)** $x^y+y^x = 2y,\quad [1,1]$

**(l)** $y^3x^2+y^2x^2+\sin y = 0,\quad [0,0]$

**(m)** $e^{\sin x^2}+e^{xy} = 2y+2,\quad [0,0]$

**(n)** $\frac{\pi}{2}+\arcsin(x+y^2) = \arccos(y+x^2), [0,0]$

**(o)*** $\ln(x^2+y^2+\cos(xy))+y = 0, [0,0]$
*Hint:* Nejdřív upravte $F = 0$

**(p)** $\ln(x+\operatorname{arctg} y+1)+xy = 0, [0,0]$

**(2)** Vyšetřete lokální extrémy funkce $y(x)$ zadanou implicitní rovnicí $F(x,y) = 0$,

**(a)*** $x^2+y^2-4x+2y = 0$

**(b)** $x^4+y^4-2x^2-2y^2 = 0$

**(c)** $(x^2+y^2)^2+2y^2-2x^2 = 0$

**(d)** $2y^2+x^2-2yx-5-4y$

**(e)** $x^4-2x^2+y^2-1$

**(f)** $x^2+y^2+6x+2y = 0$

**(g)** $x^2+2xy-y^2+8 = 0$

**(3)** Dokažte, že vztahem $F(x,y,z) = 0$ na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ je definována hladká funkce $z(x,y)$ a rozhodněte o povaze lokálního extrému, pokud se v tomto bodě $[x_0, y_0]$ nachází. Pokud se extrém v $[x_0, y_0]$ nenachází, napište rovnici tečné roviny v plochy $z = z(x,y)$ bodě $[x_0, y_0, z_0]$.

**(a)*** $z^3-xz+y = 0,\quad [3,-2,2]$

**(b)** $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9 = 0,\quad [1,-2,1]$

**(c)** $x^2+y^2+z^2-3xyz = 0,\quad [1,1,1]$

**(d)** $z^3+3x^2z-2xy = 0,\quad [-1,-2,1]$

**(e)** $\ln z+x^2yz+8 = 0,\quad [2,-2,1]$

**(f)** $xy+z+e^{x+y+z} = 0,\quad [1,1,-2]$

**(g)** $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y},\quad [0,1,1]$

**(h)** $z^3+(x-1)e^z+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-zy\ln y = 0,\quad [1,1,-1]$

**(i)** $x+y+z-3\sin\frac{1}{xyz} = \frac{1}{\pi},\quad [1/\pi, 2, 1]$

**(j)** $\exp(\ln z-\cos z)-\frac{x}{1+y} = 0,\quad [\pi, e-1, \pi]$

**(k)** $x-z+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x} = 0,\quad [1,0,1]$

**(l)** $\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right)+\ln(x^2+y^2-z^2) = 1,\quad [1,1,1]$

**(m)** $\arcsin(x^2-y^2-z^2)+x^2z+y^2+\sqrt[3]{2z+1}+xyz = 2, [-1,-1,0]$

**(n)** $\arcsin(x^4-y^2+z^4)+\sqrt[5]{(x^2y^2-1)^6}+xyz = 0, [1,1,0]$

**(4)** Vyšetřete lokální extrémy funkce $z(x,y)$ zadanou implicitní rovnicí $F(x,y,z) = 0$,

**(a)** $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+13 = 0$

**(b)** $x^2+xy-z^2+z+y+5 = 0$

**(c)** $\sqrt{1-2xyz}-\frac{z^3}{1-x^2} = y^2$

**(5)** Ukažte, že uvedená soustava rovnic $F_1(x,y,z) = 0$ a $F_2(x,y,z) = 0$ určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadané funkce $y(x)$ a $z(x)$. Spočtěte jejich derivace do druhého řádu a napište rovnici tečny křivky $[x, y(x), z(x)]$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$.

**(a)*** $\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-3 = 0 \\ z-y^2 \qquad = 0 \end{bmatrix},\quad [1,1,1]$

**(b)** $\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 = 0 \\ z-x^2 \qquad = 0 \end{bmatrix},\quad [0,1,0]$

**(c)** $\begin{bmatrix} xy+e^z-\cos y = 0 \\ y+z-\frac{x}{1+y}+\cos y = 1 \end{bmatrix},\quad [0,0,0]$

**(d)** $\begin{bmatrix} x+y+z = \sin y \\ \cos(x+z) = e^{y+z} \end{bmatrix},\quad [0,0,0]$

**(e)** $\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x+y+z = 0 \end{bmatrix},\quad [-1,0,1]$

**(f)** $\begin{bmatrix} 2x^2+3y^2+z^2 = 47 \\ x^2+2y^2 = z \end{bmatrix},\quad [-2,1,6]$

**(d)** $\begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right)+\ln(xyz) = -1 \\ x^3+y^3+z^3-\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x+2y-z}{2} = 1 \end{bmatrix},\quad [1,1,1]$

**(e)** $\begin{bmatrix} \ln^2(xyz)+\operatorname{arctg}\frac{2x+y+z}{x^2+y^2+2z^2} = \frac{\pi}{4} \\ x^2+2z+\ln\frac{x^2+1}{z^2+1}-3\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right) = 0 \end{bmatrix},\quad [1,1,1]$

**(6)** Ukažte, že uvedená soustava rovnic $F_1(t,x,y,z)=0, F_2(t,x,y,z)=0$ a $F_3(t,x,y,z)=0$ určuje v jistém okolí daného bodu $[t_0,x_0,y_0,z_0]$ implicitně zadané funkce $x(t), y(t)$ a $z(t)$. Spočtěte jejich derivace do druhého řádu a rozhodněte o povaze lokálního extrému, nachází-li se v $t_0$.

**(a)** $\begin{bmatrix} xyzt+yzt+zt &=3\\ x-y+z-t &=0\\ x^4-x^2+x &=1\end{bmatrix}$, $[1,1,1,1]$

**(b)** $\begin{bmatrix} \sin x+\cos y+\sin z+\cos t &=2\\ \cos x+\sin y+\cos z+\sin t &=-2\\ \sin x+\sin y-\sin z+\sin t &=0\end{bmatrix}$, $[0,\pi,0,-\pi]$

**(7)** Ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0,y_0,u_0,v_0]$ implicitně zadané funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$. Spočtěte obě parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě $[x_0,y_0]$.

**(a)** $\begin{bmatrix} x=u\cos(v/u)\\ y=u\sin(v/u)\end{bmatrix}$, $[1,0,1,0]$

**(b)** $\begin{bmatrix} x=e^u+u\sin v\\ y=e^u-u\cos v\end{bmatrix}$, $[e+1,e,1,\frac{\pi}{2}]$

**(c)** $\begin{bmatrix} u+v=x+y\\ \sin u/\sin v=x/y\end{bmatrix}$, $[0,1,0,1]$

**(d)*** $\begin{bmatrix} xe^{u+v}+2uv=1\\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x\end{bmatrix}$, $[1,2,0,0]$

**(e)** $\begin{bmatrix} x^2e^{u+v}+2u^2v^2=1\\ y^2e^{u-v}-\frac{u}{(1+v)^2}=4x\end{bmatrix}$, $[1,2,0,0]$

**(f)** $\begin{bmatrix} e^{\frac{x}{y}}\cos\frac{v}{u}=\frac{x}{\sqrt{2}}\\ e^{\frac{x}{y}}\sin\frac{v}{u}=\frac{y}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$, $[1,1,1,\frac{\pi}{4}]$

**(g)** $\begin{bmatrix} u=x^2+y^2\\ v=x^2-y^2\end{bmatrix}$, $[-1,-2,5,-3]$

**(8)** Ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0,y_0,z_0,u_0,v_0]$ implicitně zadané funkce $u(x,y,z)$ a $v(x,y,z)$. Spočtěte obě parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě $[x_0,y_0,z_0]$.

**(a)** $\begin{bmatrix} 2e^u+vx-4y+2=0\\ v\cos u-6u+2x-z=0\end{bmatrix}$, $[0,1,1,?,?]$

**(9)** Ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0,y_0,z_0,u_0,v_0,w_0]$ implicitně zadané funkce $u(x,y,z), v(x,y,z)$ a $w(x,y,z)$. Spočtěte obě parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě $[x_0,y_0,z_0]$.

**(a)** $\begin{bmatrix} x=u\cos v\sin w\\ y=u\sin v\cos w\\ z=u\sin w\end{bmatrix}$, $[1,\frac{\pi}{2},0,0,1,0]$

### Řetízkové pravidlo, Věta o regulárním zobrazení, Transformace proměnných

**(1)** Vyjádřete diferenciální rovnici v $y(x)$ jako rovnici $y(t)$ nové nezávisle proměnné $t$

**(a)** $(1-x^2)y''-xy'+y=0, x=\cos t$

**(b)** $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=0, x=\operatorname{tg} t$

**(c)** $x^2y''+xy'-4y=x\ln x, x=e^t$ [Eulerova ODR]

**(2)** Vyjádřete diferenciální rovnici/vztah $y(x)$ v proměnných $x(t), y(t)$ závislých na společném parametru $t$

**(a)** $y''=\sqrt{1+y'^2}, \quad y'=\operatorname{tg} t$

**(b)*** $y''/(1+y'^2)^{3/2}, \quad y'=\operatorname{tg} t$ [Křivost]

**(c)*** $y''/(1+y'^2)^{3/2}, \quad x=r(t)\cos t,\ y=r(t)\sin t$

**(3)** Vyjádřete diferenciální rovnici v $y(x)$ pomocí $x(y)$ závislé na $y$ (prohození závisle a nezávisle proměnné)

**(a)** $\left(\frac{y'}{y}\right)^2-\frac{y''}{y}=x\left(\frac{y'}{y}\right)^3$ ; $y(1)=1,\ y'(1)=-1/3$

**(4)** Spočtěte parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ pomocí řetízkového pravidla

**(a)** $z=x^2-y^2, x=u\cos v, y=u\sin v$ **(b)** $z=e^x\ln y, x=u\cos v, y=u\sin v$ **(c)** $z=xy^2, x=u\ln v, y=v\ln u$

**(5)** Vyjádřete diferenciální výraz $f(x,y)$ v nových nezávisle proměnných $u,v$, tj. jako vztah $f(u,v)$ (poznámka: $f(u,v)$ je jiná funkce než $f(x,y)$, formálně $f(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$)

**(a)** $f_{,x}-f_{,y}=0, \quad u=x+y,\ v=x-y$

**(b)** $yf_{,x}-xf_{,y}=0, \quad u=x,\ v=x^2+y^2$

**(c)** $xf_{,x}+yf_{,y}=0, \quad u=x/y,\ v=y$

**(d)*** $x^2f_{,xx}-(x^2+y^2)f_{,xy}+y^2f_{,yy}=0,\ u=x+y,\ v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

**(e)** $xf_{,x}+f_{,y}\sqrt{y^2+1}=xy,\ u=\ln x,\ v=\ln(1+\sqrt{1+y^2})$

**(f)** $2f_{,xx}-2yf_{,yy}=f_{,y}, \quad u=x-2\sqrt{y},\ v=x+2\sqrt{y}$

**(g)** $f_{,xy}=(1+f_{,y})^3, \quad u=x+y,\ v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

**(h)** $(x+y)f_{,x}-(x-y)f_{,y},\ u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

**(i)*** $f_{,x}^2+f_{,y}^2, \quad x=uv,\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$

**(j)** $f_{,x}^2+f_{,y}^2, \quad x=u\cos v,\ y=u\sin v$

**(k)*** $f_{,xx}+f_{,yy}, \quad x=u\cos v,\ y=u\sin v$

**(l)** $xf_{,x}+yf_{,y}=f_{,xx}+\frac{2y}{x}f_{,xy}, \quad x=u,\ y=uv$

**(m)** $4xyf_{,xy} - 2yf_{,y}$, $\quad x = uv,\ y = \frac{u}{v}$

**(n)** $xf_{,xx} - yf_{,yy}$, $\quad x = (u+v)^2,\ y = (u-v)^2$

**(o)*** $xf_{,x} + yf_{,y} = x/f$, $\quad x = \frac{1}{2}(u + f(u,v)^2),\ y = vf(u,v)$

**(6)** Vyjádřete diferenciální výraz $f(x,y,z)$ v nových nezávisle proměnných $u, v, w$, tj. jako $f(u,v,w)$

**(a)** $f_{,x}^2 + f_{,y}^2 + f_{,z}^2$, $x = u \sin v \cos w$, $y = u \sin v \sin w$, $z = u \cos v$

**(b)** $xyf_{,xy} + yzf_{,yz} + zxf_{,zx}$, $x = uv$, $y = vw$, $z = wu$

**(7)** Transformujte diferenciální výraz $z(x,y)$ na výraz v nové závisle proměnné $w(u,v)$

**(a)*** $x^2 z_{,x} + y^2 z_{,y} = z^2$, $\quad u = x,\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x},\ w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

**(b)*** $yz_{,yy} + 2z_{,y} = 2/x$, $\quad u = x/y,\ v = x,\ w = xz - y$

**(c)*** $z_{,y}^2 z_{,xx} - 2z_{,x} z_{,y} z_{,xy} + z_{,x}^2 z_{,yy} = 0$, $\quad u = y,\ v = z,\ w = x$

**(d)*** $z_{,x}^2 + z_{,y}^2$, $\quad u = xz,\ v = yz,\ w = x$

# 10

# Variační počet

### Gâteuxův diferenciál

**(1)** Spočtěte první a druhý Gâteuxův diferenciál funkcionálu na množinách funkcí

**(a)*** $\Phi[y] = \int_a^b y^2 + y'^2 \, dx, \qquad C^1[a,b], a < b$

**(b)*** $\Phi[y] = \int_0^1 x^2(y^4 - y'^2) \, dx, \qquad C^1[0,1]$

**(c)*** $\Phi[y_1, y_2] = \int_0^1 x y_1^2 + y_1'^2 y_2'^2 + y_2'^6 dx, \ C^1[0,1] \times C^1[0,1]$

**(d)** $\Phi[y] = \int_0^1 x^2 \sin(\pi y) + y'^3 + y'' y''' + y e^{-y''^2} dx, \ C^3[0,1]$

### Extrémy funkcionálů, Euler–Lagrangeova rovnice, Jacobiho věta

**(1)*** **[SPok MAF3/1: Úloha 8]** Nechť $\Phi[y] = \int_0^1 y^2(x^n - y)dx$ pro $n$ přirozené dostatečně velké číslo a nechť $M = \{y \in C^1[0,1]; y(0) = y(1) = 0\}$.

**(a)** Ukažte, že jediným řešením Euler–Lagrangeovy rovnice ležícím v množině $M$ je $y_0 = 0$.

**(b)** Ukažte, že $D^2\Phi(y_0; h, h) > 0$ pro $h \in M$, $h \neq 0$.

**(c)** Ukažte, že $y_0$ není bodem extrému funkcionálu, tj. v libovolném okolí bodu $y_0$ (v metrice $C^1[0,1]$) existují body $y_1$, $y_2 \in M$ tak, že $\Phi(y_1) < \Phi(y_0) = 0 < \Phi(y_2)$.

**(2)** Ukažte, že funkcionál $\Phi[y]$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[a,b]; y(a) = y_0, y(b) = y_1\}$ minimum.

**(a)*** $\Phi[y] = \int_{-1}^1 x^2 y'^2 dx, \qquad y(-1) = -1, y(1) = 1$

**(b)** $\Phi[y] = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{5}} (y')^2 dx, \qquad y(-1) = -1, y(1) = 1$

**(3)** Nalezněte všechny extremály funkcionálu $\Phi$ na množině spojitě diferencovatelných funkcí $M = \{y \in C^1([a,b]) \mid y(a) = y_0, y(b) = y_1\}$ a rozlište o jaký typ lokálního extrému se jedná (kupř. dle Jacobiho věty)

**(a)*** $\Phi[y] = \int_0^{2\pi} y'^2 - y^2 \, dx, \quad y(0) = y(2\pi) = 1$

**(b)*** $\Phi[y] = \int_0^1 (y' + y)^2 \, dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1$

**(c)** $\Phi[y] = \int_1^2 y^3 y'^3 \, dx, \quad y(1) = 2, y(2) = 2\sqrt{2}$

**(d)** $\Phi[y] = \int_0^1 \frac{y'^3}{y^3} \, dx, \quad y(0) = 1, y(1) = e$

**(e)** $\Phi[y] = \int_0^1 y'^3 + 3y'^2 + y' \, dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1$

**(f)** $\Phi[y] = \int_0^1 y(y')^2 \, dx, \quad y(0) = p > 0, y(1) = q > 0$

**(g)** $\Phi[y] = \int_1^2 x^2 y'^3 \, dx, \quad y(1) = 0, y(2) = \ln 2$

**(h)** $\Phi[y] = \int_2^3 3yy' - 2xy'^6 \, dx, \quad y(2) = 2, y(3) = 3$

**(i)*** $\Phi[y] = \int_1^2 xy'^4 - 2yy'^3 \, dx, \quad y(1) = 0, y(2) = 1$

**(j)*** $\Phi[y] = \int_0^1 y'^2 + x^2 \, dx, \quad y(0) = -1, y(1) = 1$

**(k)** $\Phi[y] = \int_0^1 x^2 y' + 2xy \, dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1$

**(l)** $\Phi[y] = \int_1^2 2yy' + x^2 y'^2 \, dx, \quad y(1) = 2, y(2) = 3/2$

**(m)** $\Phi[y] = \int_1^2 xy'^4 - 2yy'^3 \, dx, \quad y(1) = 0, y(2) = 1$

**(n)** $\Phi[y] = \int_1^3 2y - yy' + xy'^2 \, dx, \quad y(1) = 1, y(3) = 4$

**(o)** $\Phi[y] = \int_1^2 (xy' + y)^2 \, dx, \quad y(1) = 1, y(2) = 1/2$

**(p)** $\Phi[y] = \int_1^2 (y'^2 - y^2) e^{-2x} dx, \ y(1) = e, y(2) = e^2$

**(q)** $\Phi[y] = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (y - \frac{1}{2} y'^2) \sin x dx, \ y(\frac{\pi}{4}) = -\ln\sqrt{2}, y(\frac{\pi}{2}) = 0$

**(r)** $\Phi[y] = \int_0^\pi y'^2 - \frac{16}{9} y^2 + 2y \sin x dx, \ y(0) = 0, y(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**(s)** $\Phi[y] = \int_0^{\pi/2} y'^2 + 2ye^x \cos x + y^2 dx, y(0) = -\frac{1}{5}, y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{5} e^{\frac{\pi}{2}}$

**(t)** $\Phi[y] = \int_0^{\pi/2} y^2 + y'^2 - 2y \sin x \, dx, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$

**(u)** $\Phi[y] = \int_1^4 x^2 y'^2 + y \ln x dx, y(1) = 0, y(4) = 1 + \ln^2 2 - \ln 2$

**(v)** $\Phi[y] = \int_0^1 y^2 + y'^2 + 2xy'e^x dx, y(0) = \frac{3}{2}, y(1) = \frac{1}{e}$

**(w)** $\Phi[y] = \int_0^\pi y'^2 - \frac{25}{9} y^2 + 68ye^x dx, \ y(0) = 0, y(\pi) = 9e^\pi$

**(x)*** $\Phi[y] = \int_0^b 1 - e^{-y'^2} \, dx, \quad y(0) = 0, y(b) = y_1, b > 0$

### Vázané extrémy funkcionálů

Nalezněte všechny lokální extrémy funkcionálu $\Phi$ na množině spojitě diferencovatelných funkcí $M = \{y \in C^1([a,b]) \mid y(a) = y_0, y(b) = y_1\}$ s vazbou $\int_a^b g(y) \, dx = G$ a rozlište typ extrému

**(1)** $\Phi[y] = \int_0^1 y^2 + y'^2 \, dx, \ y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 y \, dx = 1$

**(2)** $\Phi[y] = \int_0^1 y'^2 \, dx, \quad y(0) = 1. y(1) = 6, \int_0^1 y \, dx = 3$

**(3)** $\Phi[y] = \int_0^\pi y'^2 \, dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \int_0^\pi y^2 \, dx = 1$

**(4)** $\Phi[y] = \int_0^\pi y^2 \, dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \int_0^\pi y'^2 \, dx = \pi/2$

# 11

## Stejnoměrná konvergence

### Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

**(1)** Na daných intervalech vyšetřete charakter konvergence (tj. bodová daná limitou $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) posloupnosti funkcí $\varphi_n(x)$ (příp. v závislosti na param. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$):

**(a)*** $x^n - x^{n+1}$, $[0,1]$

**(b)*** $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $[0,\infty)$

**(c)** $\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $[0,\infty)$

**(d)** $\dfrac{n}{n^3+x^2}$, $\mathbb{R}$

**(e)** $\dfrac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}$, $[0,\infty)$ resp. $(0,\infty)$

**(f)** $(1+x^{2n})^{\frac{2}{n}}$, $[0,\infty)$ resp. $(0,\infty)$

**(g)** $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $[0,\infty)$

**(h)** $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, $[0,\infty)$

**(i)** $\sqrt[n]{1+x^n}$, $[0,\infty)$

**(j)** $\dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n}$, $[0,\infty)$

**(k)** $(1+x^{4n})^{2/n}$, $\mathbb{R}$

**(l)** $(2\sin x)^n/(1+(2\sin x)^n)$, $\mathbb{R}$

**(m)** $(x^n - x^{n+3})\operatorname{arctg}(n^2x)$, $(0,1)$, resp. $[0,1]$

**(n)** $x\ln\left(x+\frac{n}{n+1}\right)$, $[0,\infty)$

**(o)** $n^\alpha x e^{-nx^2}$, $[0,\infty)$, resp. $(0,\infty)$

**(p)** $n^\alpha x e^{-n^2x}$, $[0,\infty)$, resp. $(0,\infty)$

**(q)** $\dfrac{x}{n}\ln\left(\dfrac{x}{n}\right)$ na $(0,\varepsilon)$, resp. $(\varepsilon,\infty)$

**(r)** $\dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{nx}$, $(0,\infty)$

**(s)** $\dfrac{\ln(nx)}{nx}$, $(0,\infty)$

**(t)** $\sin(\pi x^n)$, $[0,1]$

**(u)** $n\left(\sin(x+\frac{1}{n})-\sin x\right)$, $\mathbb{R}$

**(v)** $\dfrac{e^x}{\sqrt{n}}\prod_{k=1}^{n}\sin(kx)$, $\mathbb{R}$

**(2)** **[Děm 2804.]** Ukažte, že posloupnost $f_n(x) = nx(1-x)^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, konverguje, ale nikoli stejnoměrně, na uzavřeném intervalu $[0,1]$, a přesto $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

### Stejnoměrná konvergence řad funkcí, Weierstrassovo kritérium

Vyšetřete charakter kovergence řady funkcí $\sum \varphi_n(x)$ (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) na daných intervalech (případně v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$):

**(1)*** $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$, $[0,1]$

**(2)** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}$, $[0,\infty)$

**(3)** $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx}$ **(a)** $[0,\infty)$ **(b)** $[0,1]$

**(4)** $\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha x e^{-n^2x}$, $[0,\infty)$

**(5)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 x\cos^n x$, $[0,\pi]$

**(6)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$, $[0,1]$

**(7)** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $[-1,1]$

**(8)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{n^2+x^n}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}$, $[0,\infty)$

**(9)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}\sin\dfrac{\pi x}{n}$, $[0,1]$

**(10)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{x^2+\alpha^2})\sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}$, $\mathbb{R}$

**(11)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4x}{1+n^\alpha x^2}$, $(0,\infty)$

**(12)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2x^3}{1+n^4x^4}$, $(0,1]$

**(13)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, **(a)** $[0,1]$ **(b)** $(0,1]$

**(14)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}$, **(a)** $[0,1]$ **(b)** $[0,\infty)$

**(15)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^\alpha x}{1+n^2x^4}$, **(a)** $[0,\infty)$ **(b)** $(0,\infty)$

**(16)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sqrt[n]{x^2}$ **(a)** $[0,\varepsilon]$ **(b)** $[0,\infty)$

**(17)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{xn}{1+x^2n^2}$, $[0,\infty)$

**(18)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{nx^2+1}$, $\mathbb{R}$

**(19)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $\mathbb{R}$

**(20)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1+\operatorname{tgh}(nx))$, $\mathbb{R}$

**(21)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n^{3/2}(1+x^n)}$, $[0,1]$

**(22)*** $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha\ln^\beta n}$, **(a)** $[0,2\pi)$, **(b)** $(0,2\pi)$

**(23)*** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{\sin^2(nx)}{n^\alpha}$, $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

**(24)** $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\sin(nx^2)$, $[0,\infty)$

**(25)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x\sin(nx)}{\sqrt{x^2+n^2}}$, $[0,\infty)$

**(26)** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x\sin(nx)}{\ln(n^2+2)}$, $[0,\pi]$

**(27)** $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)\ln(1+\frac{1}{n^\alpha})\operatorname{arctg}\frac{1}{n^\beta}$, $(0,\pi)$

# 12

## Integrály závislé na parametru, Lebesgueův integrál

### Spojitost integrálů, věty Leviho a Lebesguova

**(1)** Spočtěte záměnou limity a integrálu pomocí vět Leviho nebo Lebesgueovy (předpokládáme $\alpha, \gamma > 0$)

**(a)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx$

**(b)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx$

**(c)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x+\frac{x^2}{n^2}}$

**(d)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{1+x^3}\,dx$

**(e)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n\,e^x}\cos x\,dx$

**(f)*** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$

**(g)*** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-x/n}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

**(h)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty x^n(1-x)^n\,dx$

**(i)** $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\,dx$

**(j)** $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\infty \frac{\alpha e^{-x}\,dx}{(x+\alpha^2)^{3/2}}$

**(k)** $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\gamma(x-1)}\sin\alpha}{(x^2-\cos^2\alpha)^{3/2}}dx$

**(2)** Vyšetřete konvergenci a spojitost následujících Lebesgueových integrálů jako funkcí parametru $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^3}\,dx$

**(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^\alpha}$

**(c)** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx$

**(d)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$

**(e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x^2+2x\cos\alpha+1)}{x}dx$

**(f)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x(\alpha+x)^2}\,dx$

**(g)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\,dx$
*Hint:* Per partes majoranta

**(3)** Derivujte dle parametru $\alpha > 0$ funkce zadané integrálem

**(a)*** $\displaystyle\int_{\alpha^2}^{\alpha^3} \ln x\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{1/\alpha}^{\sqrt{\alpha}} \sin x^2\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_{\alpha}^{\ln\alpha} e^{x^2}\,dx$

### Feynmanova metoda

**(1)** Určete, pro které hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konverguje Lebesgueův integrál a pak jej spočtěte Feynmanovou metodou (derivací dle parametru),

**(a)** $\int_0^1 \ln(x^2+\alpha^2)\,dx$

**(b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha-1}{\ln x}\,dx$

**(c)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx$

**(d)** $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cosh(\beta x)\,dx$

**(e)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cosh(\beta x)}{x^2}\,dx$

**(f)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**(g)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**(h)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+\alpha\sin^2 x)}{\sin^2 x}\,dx$

**(i)** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,dx$

**(j)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{x^2}\,dx$

**(k)** $\int_0^{\pi/2} \ln(1+\alpha^2\operatorname{tg}^2 x^2)dx$

**(l)*** $\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\alpha^2}{x^2}-x^2\right)dx$

**(m)*** $\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\cos(\alpha x)dx$
*Hint:* Uvažte $\beta$ fixní

**(n)*** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\,dx$
*Hint:* Vložte $e^{-\alpha x^2}$

**(o)** $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\,dx$
*Hint:* subs. $x=\cos\theta$

**(p)** $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{x\,dx}{\sin x\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2 x}}$

**(2)** Spočtěte integrály zavedením vhodného parametru a poté Feynmanovou metodou,

**(a)*** $\displaystyle\int_0^1 \ln^4 x\,dx$
*Hint:* $I(\alpha)=\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$

**(b)** $\displaystyle\int_0^\infty x^6 e^{-x^2}\,dx$

**(c)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}\,dx$
*Hint:* $I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x(1+x^2)}dx$

**(d)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$
*Hint:* Vložte $e^{-\alpha x}$

**(e)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$
*Hint:* Vložte $e^{-\alpha x}$

**(f)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$
*H:* $\int_0^\infty \frac{\ln(1+2x\cos\alpha+x^2)}{2x}dx$

**(g)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$

**(h)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$
*Hint:* $\int_0^\infty \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{2(1+x^2)}dx$

**(i)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}\,dx$
*Hint:* $\int_0^\infty \frac{\ln(\alpha^4+x^4)}{4(1+x^4)}dx$

**(j)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$
*Hint:* $\int_0^\infty \frac{x\ln(\alpha^3+x^3)}{3(1+x^3)}dx$

**(k)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx$
*Hint:* $\int_0^\infty \frac{\ln^2(\alpha^2+x^2)}{4(1+x^2)}dx$

**(l)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^3}\,dx$
*Hint:* $\int_0^\infty \frac{\ln^2(\alpha^3+x^3)}{9(1+x^3)}dx$

**(m)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$
*Hint:* $\int_0^\infty \frac{\ln^2(\alpha^4+x^4)}{16(1+x^4)}dx$

# 13

## Dvojný a trojný integrál, Fubiniho věta

### Fubiniho věta : Přímá parametrizace průměty a řezy

**(1)** Spočtěte dvojné integrály na příslušné množině $M \subset \mathbb{R}^2$ její vhodnou parametrizací

**(a)*** $\iint_M \frac{dxdy}{x^2+2xy+y^2}$, $M=(0,1)\times(1,2)$

**(b)** $\iint_M \frac{x^2}{y^2} dxdy, xy>1, 0<x<3, y<4x$

**(c)*** $\iint_M \frac{dxdy}{x^2+1}, M: -x<y<2x-x^2$

**(d)** $\iint_M x+y\ dxdy, y^2-x^2 \leqslant 1, y>0, |x|<2$

**(e)** $\iint_M 1+x dxdy, -3x>y>x^2-4, x<0$

**(f)** $\iint_M \frac{dxdy}{1+x}, M: \frac{1}{2}y^2<x<y+4$

**(g)** $\iint_M x^2+y\ dxdy, 0<y<1-x, y+x^2<1$

**(h)** $\iint_M e^{-xy} dxdy, M: 0<x, 0<xy<1$

**(i)** $\iint_M xy dxdy$, trojúh.$[0,0][1,2][4,2]$

**(j)** $\iint_M x^2\sqrt{1+y}+\cos y\ dxdy$, trojúhelník. $[0,0][1,2][2,1]$

**(k)** $\iint_M xy\sqrt{1+x^2+y^2} dxdy, M=(0,1)^2$

**(l)*** $\iint_M \frac{dxdy}{1+x+y}, x>0, y>0, 1<x+y<2$

**(m)*** $\iint_M xy\ dxdy, \quad M: 4x^2+y^2 \leqslant 4$

**(2)** Spočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

**(a)** $y=x^2, x+2y=3, y=0$

**(b)** $xy=1, xy=4, y=x, x=8$

**(c)** $x=y^2.8x=y^2, y=5$

**(d)** $y=x^2, x-y+2=0, x=0, x=1$

**(e)** $x=y^2, xy=1, x=4y$

**(f)** $y=\ln x, x-y=1, y=-1$

**(3)** Určete polohu těžiště homogenního rovinného obrazce ohraničeného křivkami (příp. splňujícího nerovnosti)

**(a)*** $y=2x-3x^2, y=-x$

**(b)** $y=\sin x, y=0, x\in[0,\pi]$

**(c)** $y^2=4x+4, y^2=4-2x$

**(d)** $1<xy<2, x<y<2x$

**(4)** Spočtěte trojné integrály na příslušné množině $M \subset \mathbb{R}^3$ její vhodnou parametrizací

**(a)** $\iiint_M x^2+y^2+z^2\ dxdydz$, $M: 0<z<x+y, 0<y<3, 0<x<2$

**(b)** $\iiint_M z^3 y\sin x\ dxdydz$, $0<z<\sin x, 0<y<\sin^2 x, 0<x<\frac{\pi}{2}$

**(c)*** $\iiint_M \frac{dxdydz}{(1+3z)^3}$, tetraedr$[0,0,0][6,0,0][0,3,0][0,0,2]$

**(d)** $\iiint_M \frac{dxdydz}{1+x+y+z}$, tetraedr$[0,0,0][1,0,0][0,1,0][0,0,1]$

**(e)** $\iiint_M y\cos(x+z)\ dxdydz$, $M: 0<\sqrt{x}<y, 0<z<\frac{\pi}{2}-x$

**(f)** $\iiint_M xz\ dxdydz$, $0<x, 0<y, x+y<1, 0<z<x^2+y^2+1$

**(g)** $\iiint_M xy^2z^2\ dxdydz$, $M: 0<z<xy, 0<y<x<1$

**(5)** Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochami ($\alpha>\beta>0$)

**(a)** $y=x, y=1, z=xy, z=0$

**(b)** $z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2), y=x, y=x^2$

**(c)** $xy=1, xy=2, y=x, y=2x, z^2=xy$

**(d)** $z=x^2+y^2+4, x-y=2, x=0, y=0, z=0$

**(e)** $z=xy, z=x+y, x=0, y=0, x+y=1$

**(f)** $z=0, y+z=1, y=\ln x, y=\ln^2 x$

**(g)** $(x+y)^2+2z=1, x=0, y=0, z=0,$

**(h)** $|z|=xy, x+y=\alpha, x+y=\beta$

**(i)** $z^2=xy, x+y=\alpha, x+y=\beta$

**(6)** Určete polohu těžiště homogenního tělesa ohraničeného plochami

**(a)** $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$

### Fubiniho věta II : Polární, cylindrická a sférická substituce a jejich Jakobiány

**(1)** Spočtěte dvojné integrály převodem do polárních souřadnic na množinách $M \subset \mathbb{R}^2$ bodů $[x,y]$

**(a)*** $\iint_M \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad M=\mathbb{R}^2$ **(d)** $\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \; M: x^2+y^2 \leqslant 2x$ **(h)** $\iint_M x^2 dxdy, M: (x^2+y^2)^2 < 8|xy|$

**(b)*** $\iint_M \sqrt{x^2+y^2} dxdy, M: x^2+y^2 \leqslant x$ **(e)** $\iint_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x} dxdy, x^2+y^2<1, y>0$ **(i)** $\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \; M: 0<2y<1-x^2$

**(c)** $\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy, M: x^2+y^2<1$ **(f)** $\iint_M xy\, dxdy, M: 4x^2+y^2 \leqslant 4$ **(j)** $\iint_M \sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy, \; M=[0,1]^2$

**(g)** $\iint_M (x^2+4y^2)e^{x^2+4y^2} dxdy, \; x^2+4y^2<1$

**(2)** Spočtěte plošný obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami, užijte polární souřadnice

**(a)** $(x^2+y^2)^2 = 8xy$ **(c)*** $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ [Lemniskáta] **(d)** $x^3+y^3=xy$ [Descartův list]

**(b)** $(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2$ **(e)** $x^4+y^4 = x^2+y^2$

**(3)** Určete polohu těžiště homogenního rovinného obrazce ohraničeného křivkami, užijte polární souřadnice

**(a)*** $x^2+y^2=4x, x^2+y^2=4x$ **(b)*** $\rho = 1-\cos\varphi$ [Kardioida]

**(4)** Spočtěte trojné integrály převodem do cylindrických souřadnic na množinách $M \subset \mathbb{R}^3$ bodů $[x,y,z]$

**(a)*** $\iiint_M x^2+y^2\, dxdydz,$
$M: x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 1, x>0$

**(b)** $\iiint_M \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz,$
$M: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 6-x^2-y^2$

**(c)** $\iiint_M x^2+y^2+z^2\, dxdydz,$
$M: x^2-2x+y^2<0, |z|<1$

**(d)** $\iiint_M xy\, dxdydz,$
$0<x^2+z^2<4, 0<y<4-x^2-z^2$

**(5)** Spočtěte objem tělesa omezeného plochami, případně definovaného nerovnostmi, užijte cylindrické souřadnice, $\alpha>0$

**(a)** $z=\alpha^2-x^2, z=0, x^2+y^2=\alpha^2$

**(b)** $z=6-x^2-y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$

**(c)** $z=2(x^2+y^2), z^2=16(x^2+y^2)$

**(d)** $z^2=1+x^2+y^2, z+x^2+y^2=5$

**(e)*** $z=x^2+y^2, x^2+y^2=x, x^2+y^2=2x, z=0$

**(f)** $z=(x^2+y^2)^3, x^2+y^2=x, x^2+y^2=4x, z=0$

**(g)** $z=x^2+y^2, z=x+y$

**(h)** $z=0, z=x^2+y^2, (x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

**(i)** $x^2+y^2 \leqslant 4, (x^2+y^2)^2 \geqslant 4(x^2-y^2), x\geqslant 0, y\geqslant 0, 0\leqslant z\leqslant xy$

**(6)** Určete polohu těžiště homogenního tělesa omezeného plochami, případně definovaného nerovnostmi, užijte cylindrické souřadnice. $\alpha>0$

**(a)** $z=x^2+y^2, z=2$ **(c)** $0<z<x^2+y^2, x+y\leqslant 5, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ **(e)** $x+y\leqslant\alpha, 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0$

**(b)** $z=4-\sqrt{x^2+y^2}, z=0$ **(d)** $2z>x^2+y^2, x^2+y^2+z^2<3$ **(f)** $(x^2+y^2)^3<4\alpha^2x^2y^2, 0<z<1+x^2+y^2$

**(7)** Spočtěte moment setrvačnosti homogenního tělesa o jednotkové hustotě kolem osy $z$, užijte cylindrické souřadnice, $a>b>0$

**(a)** $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2$ [Torus]

**(8)** Spočtěte trojné integrály převodem do sférických souřadnic na množinách $M\subset\mathbb{R}^3$ bodů $[x,y,z]$

**(a)** $\iiint_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$
$M: x^2+y^2+z^2 \leqslant 9, x>0, y<0$

**(b)** $\iiint_M xyz\, dxdydz,$
$M: 1<x^2+y^2+z^2<2, xyz>0$

**(c)*** $\iiint_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$
$M: x^2+y^2+z^2 \leqslant z$

**(d)** $\iiint_M x^2+y^2\, dxdydz,$
$M: 1<x^2+y^2+z^2 \leqslant 9, y>0, z<0,$

**(e)** $\iiint_M \frac{xyz\, dxdydz}{\sqrt{x^2+4y^2+8z^2}},$
$M: x^2+y^2+z^2<1, x>0, y>0, z>0$

**(9)** Spočtěte objem tělesa omezeného plochami, užijte sférické souřadnice, $\alpha>0$

**(a)*** $(x^2+y^2+z^2)^3 = 3xyz$

**(b)** $(x^2+y^2+z^2)^2 = xyz$

**(c)** $(x^2+y^2+z^2)^2 = \alpha(x^2+y^2-z^2)$

**(d)** $(x^2+y^2+z^2)^{5/2} = \alpha(x^2+y^2-z^2)$

**(e)** $(x^2+y^2+z^2)^{5/2} = x^2+y^2-z^2$

**(10)** Určete polohu těžiště homogenního tělesa M bodů $[x,y,z] \in \mathbb{R}^3$ splňujícího nerovnosti, užijte sférické souřadnice. $\alpha > 0$

**(a)** $x^2+y^2+z^2 < \alpha^2, z > 0$ **(b)** $x^2+y^2+z^2 < \alpha^2, z > \sqrt{x^2+y^2}$

**(11)** Spočtěte konvoluci z definice $f(\vec{x}) * g(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{y})g(\vec{x}-\vec{y})d\vec{y}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $r = \|\vec{x}\|$, $\alpha > 0$

**(a)*** $r^2 * e^{-\alpha r}$ **(b)** $r^4 * e^{-\alpha r}$

**Fubiniho věta III : Obecná substituce, Jakobián**

**(1)** Spočtěte transformací dvojného integrálu vhodnou substitucí

**(a)*** $\iint_M \frac{dxdy}{1+x+y}, x>0, y>0, 1<x+y<2$

**(b)** $\iint_M \frac{dxdy}{(3+2x+2y)^4}$, M: trojúhelník [0,0][1,1][2,0]

**(c)*** $\iint_M xy\ dxdy, x<y<2x, 1<xy<2$ *Hint:* $u = xy, v = y/x$

**(d)** $\iint_M x^2+y\ dxdy, 1<xy<4, x<y<9x$ *Hint:* $u = x+y, v = y/x$

**(e)** $\iint_M x^3 dxdy, 1<xy<3, \frac{x^2}{2}<y<2x^2$ *Hint:* $u = xy, v = y/x^2$

**(f)** $\iint_M 2x-y\ dxdy, 1<x+y<4, x<y<5x$

**(g)*** $\iint_M x^2+y^2\ dxdy$, M: $|x|^3+|y|^3<1$

**(h)** $\iint_M \frac{dxdy}{1-x^2y^2}, M=[0,1]^2$, volte subst. $x = \frac{\cos v}{\cos u}, y = \frac{\sin u}{\sin v}$ [Beukers-Calabi-Kolk]

**(2)** Určete plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami, případně zadaného nerozvnostmi, užijte vhodnou substituci, $\alpha > 0$

**(a)** $x+y=1, x+y=2, x=3y, x=4y$

**(b)** $\frac{1}{3} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x \leqslant y \leqslant 2x$

**(c)** $xy=\alpha^2, xy=2\alpha^2, x=y, y=2x$

**(d)*** $x^{2/3}+y^{2/3} = \alpha^{2/3}$ [Asteroida]

**(e)*** $x^3+y^3=xy$ [Descartův list]

**(f)** $(4x^2+\frac{y^2}{9})^2 = xy$

**(g)** $(x^3+y^3)^2 = xy$

**(h)** $x^4+y^4 = xy$

**(i)** $(x^4+y^4)^{5/9} = xy$

**(3)** Určete polohu těžiště homogenního rovinného obrazce M bodů $[x,y]$ splňujících ($\alpha > 0$)

**(a)** $x^{2/3}+y^{2/3} < \alpha^{2/3}, x \geqslant 0, y \geqslant 0$

**(4)** Spočtěte transformací trojného integrálu vhodnou substitucí

**(a)** $\iiint_M \frac{dxdydz}{1+x+y+z}$, tetraedr [0,0,0][1,0,0][0,1,0][0,0,1] substitucí $u=\frac{x}{z}, v=\frac{y}{z}, w=1+x+y+z$

**(b)** $\iiint_M xy\ dxdydz$, M: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4} \leqslant 1, x<0, y>0, z>0$

**(c)** $\iiint_M \frac{xyz\ dxdydz}{\sqrt{4x^2z^2-(y^2-x^2-z^2)^2}}, |z-x|<y<1, 0<x<1$, substituce $x=w$, $y=\sqrt{w^2+4u^2v(v-w)}$, $z=2uv$

**(5)** Určete objem tělesa omezeného plochami. $\alpha, \beta > 0$

**(a)** $z = 6-7x^2-y^2, z = 5x^2+5y^2$

**(b)** $z = xy, z = 0, x+y+z = 1$, dle sub. $u=\frac{z}{xy}, v=x, w=x+y+z+1$

**(c)** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\alpha^{\frac{2}{3}}, |z|=1+|x|^{\frac{1}{3}}|y|^{\frac{2}{3}}$

**(d)** $z = \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = x$

# 14

## Křivkový a plošný integrál, integrální věty

### Křivkový integrál skalárního pole (I. druhu)

**(1)** Spočtěte křivkové integrály $\int_C f(x,y)\,ds$ v rovině podél křivky $C \subset \mathbb{R}^2$ bodů $[x,y]$, $\alpha > 0$

**(a)*** $\displaystyle\int_C \frac{ds}{x-y}$, C: úsečka $[1,-2][3,2]$

**(b)** $\displaystyle\oint_C \frac{x+2}{x^2+y^2}\,ds$, $C\colon x^2+y^2=4$

**(c)** $\displaystyle\oint_C x^2+y^2\,ds$, $C\colon x^2+y^2=\alpha x$

**(d)** $\displaystyle\oint_C |y|\,ds$, $C\colon (x^2+y^2)^2=\alpha^2(x^2-y^2)$

**(e)** $\displaystyle\int_C \sqrt{2y}\,ds$, $C\colon \begin{bmatrix} x=\alpha(t-\sin t) \\ y=\alpha(1-\cos t) \\ t\in(0,2\pi) \end{bmatrix}$

**(f)** $\displaystyle\oint_C |x|^{\frac{3}{4}}+|y|^{\frac{3}{4}}\,ds$, $C\colon |x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}=1$

**(2)** Určete délku křivky $C \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$

**(a)** $C\colon x=t^2, y=t-\frac{t^3}{3}, t\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

**(b)** $C\colon x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, t\in(0,2\pi)$

**(c)*** $C : \rho(\varphi)=e^{\varphi}, \varphi\in[0,2\pi]$

**(d)** $C\colon \rho(\varphi)=\alpha(1+\cos\varphi), \varphi\in(0,\pi)$

**(e)** $C : \rho(\varphi)=\sin^3\frac{\varphi}{3}, \varphi\in(0,3\pi)$

**(3)** Určete polohu těžiště homogenní křivky $C \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$

**(a)** $C : x=\alpha(t-\sin t), y=\alpha(1-\cos t), t\in(0,2\pi)$

**(4)** Určete plošný obsah válcové plochy $S \subset \mathbb{R}^3$ splňující, $\alpha > 0$

**(a)** $S : y^2=4x, 0<z<2\sqrt{x-x^2}$

**(b)** $S : x^2+y^2<\frac{1}{4}, 0<z<xy, x>0, y>0$

**(c)** $S : (y^2=x \vee 9x-4=0), 0<z<2y, y>0$

**(d)** $S : x^2+y^2=\alpha^2, 0<z<x, x>0, y>0$

**(e)** $S : x^2+y^2=\alpha^2, 0z<x^2+y^2$

**(f)** $S : x^2+y^2=\alpha x, x^2+y^2+z^2\leqslant\alpha^2$

**(5)** Spočtěte křivkové integrály $\int_C f(x,y,z)\,ds$ v prostoru podél křivky $C \subset \mathbb{R}^3$ bodů $[x,y,z]$, $\alpha > 0$

**(a)*** $\displaystyle\int_C x^2+y^2+z^2\,ds$, $C\colon \begin{bmatrix} x=\cos t,\ z=t \\ y=\sin t, t\in(0,2\pi) \end{bmatrix}$

**(b)** $\displaystyle\int_C \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds$, $C\colon \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=x \end{bmatrix}$

**(c)** $\displaystyle\int_C z\,ds$, $C\colon \begin{bmatrix} x=t\cos t,\ \ z=t \\ y=t\sin t,\ \ t\in(0,\pi) \end{bmatrix}$

**(d)** $\displaystyle\int_C x+y\,ds$, $C\colon \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2=\alpha^2, \\ y=x, y>0, x>0 \end{bmatrix}$

**(e)** $\displaystyle\int_C xyz\,ds$, $C\colon \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2=\alpha^2, \\ x^2+y^2=\frac{\alpha^2}{4}, \\ x>0, y>0, z>0 \end{bmatrix}$

**(f)** $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)z\,ds$, $C\colon \begin{bmatrix} x^2+2y^2=4, \\ z=y,\ z>0 \end{bmatrix}$

**(g)** $\displaystyle\int_C x^2\,ds$, $C\colon \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{bmatrix}$

**(6)** Určete délku křivky $C \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha > 0$

**(a)** $C : x=3t, y=3t^2, z=2t^3, t\in(0,1)$

**(b)** $C : x=e^{-t}\cos t, y=e^{-t}\sin t, z=e^{-t}, t\in[0,\infty)$

**(c)** $C\colon (x-y)^2=x+y, x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2, [0,0,0]\to[1,0,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$

**(d)** $C\colon x^2+y^2=z, \frac{y}{x}=\operatorname{tg} z, x>0, y>0, [0,0,0]\to[\sqrt{\frac{\pi}{8}},\sqrt{\frac{\pi}{8}},\frac{\pi}{4}]$

**(7)** Určete polohu těžiště homogenní křivky $C \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha > 0$

**(a)** $C : x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2=x, z>0$

**(b)** $C=C_1\cup C_2\cup C_3$, $C_1\colon x^2+y^2=1$, $C_2\colon y^2+z^2=1$, $C_3\colon z^2+x^2=1$ (čtvrtoblouky kružnic I. oktantu)

### Křivkový integrál vektorového pole (II. druhu)

**(1)** Spočtěte $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$ podél orientované křivky $C \subset \mathbb{R}^2$ z bodu A do B pomocí vhodné parametrizace, $\alpha, \beta > 0$

**(a)*** $\displaystyle\int_C x^2dx-y\,dy$, $C\colon \begin{bmatrix} \text{úsečka} \\ [1,-2]\to[3,2] \end{bmatrix}$

**(b)** $\displaystyle\int_C (x^2-y^2)dy$, $C\colon \begin{bmatrix} y=x^3 \\ [0,0]\to[3,27] \end{bmatrix}$

**(c)** $\displaystyle\int_C (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$, $C : y=x^2, [-1,1]\to[1,1]$

**(d)** $\int_C (x+y)\ dx + (x-y)\ dy$, $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

**(e)** $\int_C -x\cos y dx + y \sin x dy$, $C$ : úsečka $[0,0] \to [\pi, 2\pi]$

**(f)*** $\oint_C \frac{xdy - ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $C: x^2+y^2 = 1$

**(g)** $\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, $C = \partial((-1,1)\times(-1,1))$

**(h)** $\int_C \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$, $C: \begin{bmatrix} x^2+y^2=\alpha^2 \\ [\alpha,0]\to[0,\alpha] \end{bmatrix}$

**(2)** Spočtěte $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ podél orientované křivky $C \subset \mathbb{R}^3$ z bodu $A$ do $B$ pomocí vhodné parametrizace, $\alpha, \beta > 0$

**(a)** $\int_C ydx+zdy+xdz, C: \begin{bmatrix} z = xy \\ x^2+y^2=1 \\ [1,0,0]\to[0,1,0] \end{bmatrix}$

**(b)** $\int_C xdx+ydy+zdz, C: \begin{bmatrix} x^2+y^2=4 \\ x+z=2 \\ [2,0,0]\to[0,2,2] \end{bmatrix}$

**(c)** $\int_C ydx+zdy+xdz, C: \begin{bmatrix} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=2x \\ \vec{\tau}[2,0,2] = \hat{y} \end{bmatrix}$

**(d)** $\int_C xdx+ydy+(xz-y)dz, C: \begin{bmatrix} x=t^2 \\ y=2t \\ z=4t^2 \\ t\in(0,1) \end{bmatrix}$

**(e)** $\oint_C x^2dx + z^2dy + x^2dz$, $C: \begin{bmatrix} x = 5 \\ y = 2+4\sin t \\ z = -3+4\cos t \end{bmatrix}, t\in(0,2\pi)$

## Nezávislost na integrační cestě, potenciálové pole

**(1)** Nalezením potenciálu $\phi = \nabla \vec{f}$ spočtěte křivkové itegrály podél křivky $C \subset \mathbb{R}^2$ od bodu A do bodu B

**(a)** $\int_C y\ dx + x\ dy$, $C: [-1,2] \to [2,3]$

**(b)** $\int_C (3x^2y - 3y^2)\ dx + (x^3 - 6xy)\ dy$, $C: [1,3] \to [2,1]$

**(c)** $\int_C (3x^2y - 2xy^2)dx + (x^3 - 2x^2y)dy$, $C: [1,1] \to [2,-1]$

**(d)** $\int_C \frac{ydx - xdy}{x^2}$, $C: [2,1] \to [1,2]$, C leží v I. kvadrantu

**(e)** $\int_C \left(2xy^2+3x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{y^2}\right)dx + \left(2x^2y+3y^2+\frac{1}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}\right)dy$, $C: [2,1] \to [1,2]$, C leží v I. kvadrantu

**(2)** Nalezením potenciálu $\phi = \nabla \vec{f}$ spočtěte křivkové itegrály podél křivky $C \subset \mathbb{R}^3$ od bodu A do bodu B

**(a)** $\int_C (3x^2y - z^2 + 2z)\ dx + (x^3 + 2yz - 3)\ dy + (y^2 - 2xz + 2x + 5)\ dz$, $C: [0,0,3] \to [3,3,0]$

**(b)** $\int_C (x^2 - 2yz)\ dx + (y^2 - 2xz)\ dy + (z^2 - 2xy)\ dz$, $C: [0,1,1] \to [3,0,2]$

**(c)** $\int_C \frac{x\ dx + y\ dy}{1+x^2+y^2} + 2z\ dz$, $C: [1,0,0] \to [0,1,1]$

## Greenova věta

**(1)** Spočtěte pomocí Greenovy věty (u všech uzavřených křivek předpokládáme kladnou orientaci), $\alpha, \beta > 0$

**(a)** $\oint_C y^3dx - x^3dy$, $C: x^2+y^2 = x$

**(b)** $\oint_C x^2ydx - xy^2dy$, $C: x^2+y^2 = 1$

**(c)** $\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$, $C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$

**(d)** $\oint_C (1-x^2)y\ dx + x(1+y^2)\ dy$, $C = \partial((0,2)\times(0,2))$

**(e)** $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$, $C: x^2+y^2=\alpha^2$
*Hint:* Nahraďte jmenovatel

**(2)** Spočtěte pomocí dopněním na vhodnou uzavřenou křivku a aplikací Greenovy věty

**(a)** $\int_C (e^x \sin y - y)dx + (e^x\cos y - x)dy$, $C: x^2+y^2 = \alpha x, [\alpha, 0] \to [0,0]$

## Plošný integrál skalárního pole (I. druhu)

**(1)** Spočtěte plošné integrály na plochách $S \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha > 0$

**(a)*** $\iint_S (xy+yz+zx)\ dS$, $S: z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leqslant 2y$

**(b)** $\iint_S xz\ dS$, $S =$ trojúhelník $[1,0,0][0,1,0][0,0,1]$

**(c)** $\oiint_S xy\ dS$, $S: x^2+y^2 = 4, 0 \leqslant z \leqslant 1$

**(d)** $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $S: (x^2+y^2+z^2)^2 = 2\alpha^2(z^2-x^2-y^2)$

**(e)** $\oiint_S |xyz|\ dS$, $S = \partial\left\{x^2+y^2 < z^2 < 1\right\}$

**(f)** $\iint_S |xyz|\, dS, \quad S: z = x^2+y^2, z \leqslant 1$

**(g)** $\iint_S x+y+z\, dS, \ S: x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0$

**(h)** $\oiint_S \dfrac{dS}{(1+x+y)^2}$, $S = \partial$ tetraedru $[0,0,0][1,0,0][0,1,0][0,0,1]$,

**(i)** $\oiint_S \dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2-1}, \ S: x^2+y^2+(z-3)^2 = 1$

**(2)** Najděte velikost plochy S množiny bodů $[x,y,z] \in \mathbb{R}^3$ splňující $(a > b > 0)$

**(a)** $3z = 4xy, x^2+y^2 \leqslant 1$

**(b)** $x^2+y^2 = 1, y^2+z^2 \leqslant 1$

**(c)** $x^2+y^2+z^2 = 1, x^2+y^2 \leqslant x$

**(d)** $z = x^2+y^2, \ z \leqslant 1$

**(e)** $z = 4-\sqrt{x^2+y^2}, \ 0 \leqslant z \leqslant 2$

**(f)** $2x+y-z = 0, \ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16} \leqslant 1$

**(g)** $x^2-y^2 = 2z, z \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1$

**(h)*** $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2 = b^2$ [Torus]

**(i)*** $z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 < 4x$

**(j)** $(x^2+y^2)^{3/4}+z = 1, z > 0$

**(k)** $|z|+(x^2+y^2)^{3/2} = 1$

**(3)** Najděte polohu těžiště homogenní plochy, $\alpha > 0$

**(a)** $S: x^2+y^2 = 2z, z \leqslant 1$

**(b)** $S: z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leqslant \alpha x$

**(c)** $S: x^2+y^2+z^2 = \alpha z$

### Plošný integrál vektorového pole (II. druhu)

**(1)** Spočtěte tok $\iint_S \vec{f}\cdot\hat{n}\, dS$ vektorového pole $\vec{f}$ plochou S orientovanou normálou $\hat{n}$ z definice, tj. vhodnou parametrizací plochy. Orientaci ploch uvádíme v jednom bodě plochy, případně znaménkem skalárního součinu a speciálně u uzavřených ploch předpokládáme kladnou orientaci, tj. s vnějším normálovým vektorem, $\alpha, \beta > 0$

**(a)** $\iint_S x dydz + (y-z) dzdx + 2z dxdy$,
$S:$ trojúhelník $[3,0,0][0,2,0][0,0,6]$, $\hat{n}\cdot\hat{x} > 0$

**(b)** $\iint_S z dydz + x dzdx + y dxdy$,
$S: x+z = 2, x^2+y^2 \leqslant 4, \ \hat{n}\cdot\hat{z} > 0$

**(c)** $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$,
$S: x^2+9y^2 = 9, 0 \leqslant z \leqslant 4, \ \hat{n}([3,0,0]) = -\hat{x}$

**(d)*** $\iint_S x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z^2\, dxdy$,
$S: x^2+y^2+2\alpha z = \alpha^2, x \leqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, \ \hat{n}\cdot\hat{y} > 0$

**(e)** $\iint_S xz dydz - 2x^2 y dzdx - 2y^2 dxdy$,
$S: x^2+y^2 = z, x^2+y^2 \leqslant 1, \ \hat{n}([0,0,0]) = \hat{z}$

**(f)** $\overset{+}{\oiint}_S x dydz + y dzdx + z dxdy, S: x^2+y^2+z^2 = 1$

**(g)** $\iint_S (y-z) dydz + (z-x) dzdx + (x-y) dxdy$,
$S: \sqrt{x^2+y^2} = z, 0 < z < 1, \hat{n}\cdot\hat{z} < 0$

**(h)** $\iint_S \dfrac{x dydz + y dzdx + (1-z) dxdy}{x^2+y^2+(1-z)^2}$,
$S: z = 1-\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 < 1, \hat{n}\cdot\hat{z} < 0$

**(i)*** $\overset{+}{\oiint}_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, S = \partial\left\{\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \alpha\right\}$

**(j)** $\overset{+}{\oiint}_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, S: x^2+y^2+z^2 = x+y+z$

**(k)** $\iint_S xz^2\, dydz + yz^2\, dzdx + (x^2+y^2)z\, dxdy$,
$S: \begin{bmatrix} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = \beta v \end{bmatrix}, [u,v] \in (0,\alpha)\times(0,2\pi), \ \hat{n}\cdot\hat{z} > 0$

**(l)** $\iint_S x\, dydz + y\, dzdx + dxdy$,
$S: z = x^{2/3}+y^{2/3}, \ x^{2/3}+y^{2/3} \leqslant 1, \ \hat{n}\cdot\hat{z} > 0$

### Gauss–Ostrogradského věta

**(1)** Spočtěte tok $\overset{+}{\oiint}_S \vec{f}\cdot\hat{n}\, dS$ vektorového pole orientovanou plochou pomocí Gauss–Ostrogradského věty, jednotkové normály $\hat{n}$ ploch S předpokládáme vnější (tj. kladná orientace ploch), $\alpha, \beta, \gamma > 0$

**(a)** $\overset{+}{\oiint}_S x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z^2\, dxdy, \quad S = \partial\,(0,1)^3$

**(b)** $\overset{+}{\oiint}_S (3x+y) dydz + (2y-z+5) dzdx + (x+2y+z) dxdy$,
$S = \partial\,\{0 \leqslant z \leqslant 1-x, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

**(c)** $\overset{+}{\oiint}_S xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy$,
$S = \partial\,\{1 \leqslant z \leqslant 3, 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$

**(d)** $\overset{+}{\oiint}_S xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy$,
$S = \partial\,\{0 \leqslant z, 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9\}$

**(e)** $\overset{+}{\oiint}_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$,
$S = S_1 \cup S_2,\ S_1\colon \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2=1, \\ z \leqslant 0 \end{bmatrix},\ S_2\colon \begin{bmatrix} z=0, \\ x^2+y^2 \leqslant 1 \end{bmatrix}$

**(f)*** $\overset{+}{\oiint}_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,\ S = \partial\left\{\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \alpha\right\}$

**(g)** $\overset{+}{\oiint}_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy,\ S\colon x^2+y^2+z^2=1$

**(h)** $\overset{+}{\oiint}_S x^2 dydz + 2ydzdx + 2zdxdy, S = \partial\left\{\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < \frac{2x}{\alpha} < 2\right\}$

**(i)** $\overset{+}{\oiint}_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, S\colon x^2+y^2+z^2 = 2x-4y+4$

**(j)** $\overset{+}{\oiint}_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$,
$S = \partial\left\{-2 \leqslant z \leqslant 4 - x^2 - y^2, x^2+y^2 \leqslant 4\right\}$

**(k)** $\overset{+}{\oiint}_S 2xydydz - y^2 dzdx + 2zdxdy,\ S\colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

**(l)** $\overset{+}{\oiint}_S \dfrac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ S\colon x^2+y^2+z^2 = 1$
*Hint:* Změňte jmenovatel, aby pole nedivergovalo

**(m)** $\overset{+}{\oiint}_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$,
$S : |x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$

**(2)** Spočtěte doplněním vhodného "víka" a použitím Gauss-Ostrogradského věty, $\alpha > 0$

**(a)** $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,\ S\colon \begin{bmatrix} x^2+y^2=9, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4 \end{bmatrix}$

**(b)*** $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$,
$S : x^2+y^2+2\alpha z = \alpha^2, x \leqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0,\ \hat{n}\cdot\hat{z} > 0$

**(c)** $\iint_S xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy$,
$S : x^2+y^2+z^2 = 1, z > 0, \hat{n}\cdot\hat{z} > 0$

**(d)** $\iint_S xdydz + ydzdx - zdxdy$,
$S : x^2+y^2+z^2 = 4, x \geqslant 0, \hat{n}([2,0,0]) = -\hat{x}$

**(e)** $\iint_S xdydz + ydzdx + dxdy$,
$S : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = z, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqslant 1, \hat{n}\cdot\hat{z} > 0$

## Stokesova věta

**(1)** Spočtěte křivkové integrály druhého druhu pomocí Stokesovy věty, orientaci uzavřených křivek udáváme buď pomocí pořadí bodů či pomocí tečného vektoru $\hat{\tau}$

**(a)** $\oint_C y^2\ dx + z^2\ dy + x^2\ dz$,
C: trojúhelník $[2,0,0] \to [0,2,0] \to [0,0,2]$

**(b)** $\oint_C y\ dx + z\ dy + x\ dz$,
$C\colon x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0, \hat{\tau}([\sqrt{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0])\cdot\hat{y} > 0$

**(c)** $\oint_C (y-x)\ dx + (z-x)\ dy + (x-y)\ dz$,
$C\colon x^2+y^2=1, x+z=1, \hat{\tau}([1,0,0]) = \hat{y}$

**(d)** $\oint_C \dfrac{(z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz}{x^2+y^2+z^2}, C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$,
$C_1\colon \begin{bmatrix} x^2+y^2=1, \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{bmatrix}, C_2\colon \begin{bmatrix} y^2+z^2=1, \\ y \geqslant 0, z \geqslant 0 \end{bmatrix}, C_3\colon \begin{bmatrix} z^2+x^2=1, \\ x \geqslant 0, z \geqslant 0 \end{bmatrix}$,
$[1,0,0] \to [0,1,0] \to [0,0,1]$ (čtvrtoblouky kružnic I. oktantu) *Hint:* Volte plochu ve Stokesově větě tak, aby se dal jmenovatel nahradit jednodušší funkcí nenulovou v počátku

**(2)** Spočtěte křivkové integrály druhého druhu pomocí Stokesovy věty doplněním na vhodnou uzavřenou křivku $a, h > 0$

**(a)** $\int_C (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$,
C: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{h}{2\pi}t,\ [a,0,0] \to [a,0,h]$

# 15

## Vektorový a tenzorový počet

$\vec{c}$ je konstantní vektor, $\phi, \psi$ skalární pole a $\vec{u}, \vec{v}$ vektorová pole, $\sigma$ obecný tenzor druhého řádu, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

### Sklalární a vektorový součin vektorů a tenzorů

**(1)** Pro vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ dokažte následující identity

**(a)*** $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ **(b)** $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ **(c)** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

**(2)** Vyjádřete jako lineární kombinaci kartézských bázových vektorů $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

**(a)*** $\vec{u}\cdot I$ **(b)*** $(\vec{r}\times I)^\top$ **(c)*** $(\vec{u}\times I)\cdot\vec{v}$ **(d)*** $(\vec{u}\times\sigma)\cdot\vec{v}$ **(e)** $\vec{u}\times(\sigma\cdot\vec{v})$ **(f)*** $(\vec{u}\vec{v}) : (\vec{u}\vec{v})^\top$ **(g)*** $\mathrm{Tr}\,\sigma$ **(h)*** $\mathrm{Cr}\,\sigma$ **(i)*** $\sigma\cdot\sigma$ **(j)*** $\mathrm{Tr}(\sigma\cdot\sigma)$ **(k)** $\mathrm{Cr}(\sigma\cdot\sigma)$ **(l)** $\sigma\times\sigma$ **(m)** $\sigma : \sigma^\top$

### Diferenciální operátory v kartézské bázi, obecná pravidla

**(1)** Spočtěte gradienty následujících polí z definice, užitím linearity, řetízkového a součinového pravidla

**(a)*** $\nabla(x + y^2)$ **(b)*** $\nabla(y^2\hat{x} - x^2\hat{y})$ **(c)*** $\nabla(x^2\hat{y}\hat{z})$ **(d)*** $\nabla\sqrt{2x^2 + y}$ **(e)** $\nabla\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **(f)** $\nabla(\hat{z}/\sqrt{x^2+y^2})$

**(2)** Spočtěte divergence a rotace následujících vektorových polí

**(a)** $x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ **(b)** $yz\hat{x} + zx\hat{y} + xy\hat{z}$ **(c)** $x^2y\hat{x} + xy^2\hat{y} + xy\hat{z}$ **(d)** $(y+z)\hat{x} + (z+x)\hat{y} + (x+y)\hat{z}$ **(e)** $(y-z)\hat{x} + (z-x)\hat{y} + (x-y)\hat{z}$ **(f)** $(y^2-z^2)\hat{x} + (z^2-x^2)\hat{y} + (x^2-y^2)\hat{z}$ **(g)** $\frac{2x\hat{y} - 2y\hat{x}}{x^2+y^2}$ **(h)** $\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

**(3)** Spočtěte vyjádřením v kartézské bázi gradienty a další operátory obsahující poziční a axiální vektor a identický tenzor

**(a)*** $\nabla\vec{r}$ **(b)*** $\nabla\vec{\rho}$ **(c)** $\nabla\cdot\vec{r}$ **(d)** $\nabla\times\vec{r}$ **(e)** $\nabla(r^2)$ **(f)** $\nabla(\rho^2)$ **(g)*** $\Delta r^2$ **(h)** $\Delta\rho^2$ **(i)*** $\Delta\vec{r}$ **(j)*** $\nabla\times(\vec{r}\times I)$ **(k)*** $\nabla(\vec{\rho}\times\hat{c})$ **(l)*** $\nabla(\vec{r}\times\hat{c})$

**(4)** Obecná pravidla, Kroneckerovo delta, Levi-Civitův symbol, Einsteinova sumační konvence

**(a)*** $\nabla(\phi\vec{u})$ **(b)** $\nabla(r^2)$ **(c)** $\nabla\times(\vec{c}\times\nabla\phi)$ **(d)** $\nabla\cdot(\vec{c}\cdot\nabla\phi)$ **(e)** $\nabla\times\nabla\vec{u}$ **(f)*** $\nabla\times\nabla\times\vec{u}$ **(g)** $\nabla\times(\vec{u}\times\vec{v})$

**(5)** Dokažte následující relace. *Hint:* Derivace komutují

**(a)*** $\Delta(\nabla\times\nabla\times)\vec{u} = (\nabla\times\nabla\times)\Delta\vec{u}$ **(b)** $\Delta(\vec{r}\times\nabla)\phi = (\vec{r}\times\nabla)\Delta\phi$

**(6)** Spočtěte aplikací operátorů stopy Tr, Cr, případně kombinací řetízkového, součinového a dalších pravidel

**(a)*** $\nabla\cdot\vec{r}$ **(b)*** $\nabla\times\vec{r}$ **(c)** $\nabla\cdot\vec{\rho}$ **(d)** $\nabla\times\vec{\rho}$ **(e)*** $\Delta r^2$ **(f)** $\Delta\rho^2$ **(g)*** $\nabla\cdot(\phi I)$ **(h)** $\nabla\cdot(\vec{r}\times\hat{c})$ **(i)*** $\nabla\times(\vec{r}\times\hat{c})$ **(j)*** $\nabla\cdot(\phi\vec{u})$ **(k)*** $\nabla\times(\phi\vec{u})$ **(l)** $\Delta(\phi\psi)$ **(m)*** $\Delta(\phi\vec{u})$

### Cylindrická a sférická báze, gradienty základních polí

**(1)** Vyjádřete v kartézské, cylindrické a sférické bázi *Hint:* $\hat{r} = \vec{r}/r$, $\hat{\theta} = \hat{r}\times\hat{\rho}$

**(a)*** $I$ **(b)*** $\hat{z}$ **(c)*** $\hat{\rho}$ **(d)*** $\hat{\varphi}$ **(e)*** $\hat{r}$ **(f)** $\hat{\theta}$ **(g)*** $\hat{z}\times\hat{\rho}$ **(h)** $\hat{z}\times\hat{\varphi}$ **(i)*** $\hat{z}\times\hat{r}$ **(j)*** $\hat{\rho}\times I$ **(k)** $\hat{\theta}\times I$

**(2)** Spočtěte aplikací řetizkového a součinového pravidla

**(a)*** $\nabla r$, *Hint:* $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ **(c)** $\nabla\varphi$, *Hint:* $\rho\cos\varphi = x$ **(e)*** $\nabla\hat{r}$, *Hint:* $\vec{r} = r\hat{r}$ **(g)*** $\nabla\hat{\varphi}$, *Hint:* $\hat{\varphi} = -\hat{\rho}\times\hat{z}$

**(b)** $\nabla\rho$, *Hint:* $\rho^2 = x^2 + y^2$ **(d)*** $\nabla\theta$, *Hint:* $r\sin\theta = \rho$ **(f)** $\nabla\hat{\rho}$, *Hint:* $\vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$ **(h)** $\nabla\hat{\theta}$, *Hint:* $\rho\hat{\theta} = z\hat{r} - r\hat{z}$

**(3)** Spočtěte aplikací operátorů stop, řetizkového a součinového pravidla a dalších identit

**(a)*** $\nabla\cdot\hat{r}$ **(c)** $\nabla\cdot\hat{\varphi}$ **(e)*** $\nabla\times\hat{r}$ **(g)*** $\nabla\times\hat{\varphi}$ **(i)** $\Delta r$ **(k)** $\Delta\varphi$ **(m)*** $\Delta\hat{r}$ **(o)*** $\Delta\times\hat{\varphi}$

**(b)** $\nabla\cdot\hat{\rho}$ **(d)*** $\nabla\cdot\hat{\theta}$ **(f)** $\nabla\times\hat{\rho}$ **(h)** $\nabla\times\hat{\theta}$ **(j)** $\Delta\rho$ **(l)*** $\Delta\theta$ **(n)** $\nabla\times\hat{\rho}$ **(p)** $\Delta\times\hat{\theta}$

### Počítání se základními poli pomocí jejich gradientů a skládáním pravidel

**(1)** Spočtěte, $\alpha\in\mathbb{R}$

**(a)*** $\nabla\frac{1}{r}$ **(c)** $\Delta\frac{1}{\sqrt{r^2-2\alpha r+1}}$ **(e)** $\Delta r^n$ **(g)*** $\nabla\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$ **(i)** $\nabla(\hat{z}\cdot\hat{r})$ **(k)** $\Delta(\hat{z}\cdot\hat{r})$ **(m)*** $\nabla\cdot(\hat{r}\hat{r})$ **(o)** $\nabla\cdot(\hat{\theta}\hat{\varphi})$

**(b)*** $\nabla^2\frac{1}{r}$ **(d)*** $\Delta\frac{1}{r}$ **(f)** $\Delta f(r)$ **(h)*** $\vec{c}\cdot\nabla^3\frac{1}{r^3}$ **(j)** $\nabla(\hat{z}\times\hat{r})$ **(l)** $\Delta(\hat{z}\times\hat{r})$ **(n)*** $\nabla\times(\hat{r}\hat{r})$ **(p)** $\nabla\times(\hat{r}\hat{\varphi})$

**(2)** Vyjádřete jako tenzor pomocí základních polí

**(a)*** $\Delta(\psi(\rho,\varphi,z)$ **(c)*** $\Delta(f(r)\hat{\varphi})$ **(e)** $\Delta(z\rho f(r)\hat{\varphi})$ **(g)** $\nabla\cdot(f(\rho)\hat{\rho}\hat{\rho})$ **(i)*** $\nabla\times(\rho f(r)\hat{\varphi})$ **(k)** $\hat{r}\cdot\nabla(\rho f(r)\hat{\varphi})$

**(b)*** $\Delta(\psi(r,\theta,\varphi)$ **(d)** $\Delta(\rho f(r)\hat{\varphi})$ **(f)*** $\nabla\cdot(f(r)\hat{r}\hat{r})$ **(h)** $\nabla(\rho f(r)\hat{\varphi})$ **(j)** $\nabla\cdot(\rho f(r)\hat{\varphi})$

**(3)** Vyjádřete v kartézské, cylindrické a sférické bázi jako funkce parametru $t\in\mathbb{R}$. *Hint:* $\frac{d}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\nabla$

**(a)*** $\vec{r}_{,t}$ **(b)*** $\vec{r}_{,tt}$ **(c)*** $\vec{r}_{,ttt}$ **(d)** $\vec{\rho}_{,t}$ **(e)** $\vec{\rho}_{,tt}$ **(f)** $\vec{\rho}_{,ttt}$

### Integrace tenzorů

**(1)** Spočtěte vytknutím konstantního vektoru. *Hint:* $\hat{\varphi} = \hat{z}\times\hat{\rho}$

**(a)*** $\oiint_\Omega \hat{z}\,d\Omega$ **(b)** $\oiint_\Omega r\hat{z}\,d\Omega$ **(c)*** $\int_0^{2\pi}\hat{\varphi}\hat{\rho}\,d\varphi$

**(2)** Spočtěte použitím symetrie, tj. odhadněte rozklad výsledku do báze a vynásobte konstatními vektory, v případě tenzorů užijte operátorů stop

**(a)*** $\oiint_\Omega \hat{r}\,d\Omega$ **(c)*** $\oiint_\Omega z\hat{r}\,d\Omega$ **(e)** $\oiint_\Omega \rho\hat{\theta}\,d\Omega$ **(g)** $\oiint_\Omega \hat{z}\hat{r}\,d\Omega$

**(b)** $\oiint_\Omega \rho z\hat{r}\,d\Omega$ **(d)** $\oiint_\Omega z^2\hat{r}\,d\Omega$ **(f)*** $\oiint_\Omega \hat{r}\hat{r}\,d\Omega$ **(h)** $\oiint_\Omega \hat{r}\hat{r}\hat{r}\,d\Omega$

**(3)** Stokesovo obtékání rotující koule o poloměru $r = a$ viskózní kapalinou je určeno poli tlaku $p = p_\infty$ (konstanta) a rychlosti $\vec{v} = \omega\rho a^3\hat{\varphi}/r^3$, kde $\omega$ je (konstantní) úhlová rychlost. Určete velikost momentu síly $\vec{M}$ působící kapaliny na povrch koule, pro nějž platí $\vec{M} = \oiint_S \vec{r}\times\sigma\cdot\hat{n}\,dS$, kde $\sigma = -pI + \eta(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^\top)$.

**(4)*** Stokesovo obtékání fixní koule o poloměru $r = a$ viskózní kapalinou je určeno skalárním polem tlaku $p$ a vektorovým polem rychlosti $\vec{v}$, pro něž platí

$$p = p_\infty - \frac{3v_\infty a\eta z}{2r^3}, \qquad \vec{v} = \nabla\times\left[\frac{\rho v_\infty}{2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\left(1+\frac{a}{2r}\right)\hat{\varphi}\right]$$

kde $p_\infty$ a $v_\infty\hat{z}$ jsou okrajové podmínky těchto polí v nekonečnu (daleko od koule) a $\eta$ je konstanta (viskozita). Určete velikost síly $\vec{F}$ působící kapaliny na povrch koule, pro niž platí $\vec{F} = \oiint_S \hat{n}\cdot\sigma\,dS$, kde $\sigma = -pI + \eta(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^\top)$ je tzv. tenzor napětí, $\hat{n} = \hat{r}$ je jednotková normála k ploše $S : r = a$ a $dS = r^2 d\Omega$ je plošný element povrchu. *Hint:* $r\hat{z} = z\hat{r} - \rho\hat{\theta}$.

### Integrální věty (Gauss–Ostrogradského a Stokesova pro tenzory)

**(1)*** $\oiint_\Omega z\hat{r}\,d\Omega$ **(2)*** $\int_0^{2\pi}\hat{\varphi}\hat{\rho}\,d\varphi$ **(3)** $\oiint_\Omega \rho\hat{\theta}\,d\Omega$ **(4)*** $\oiint_\Omega \hat{r}\hat{r}\,d\Omega$

# 16

## Speciální funkce

### Gama

**(1)** Spočtěte následující integrály

**(a)** $\int_0^1$

### Digama

**(1)** Spočtěte následující integrály

**(a)** $\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1+x+x^2} dx$ **(b)** $\int_0^\pi \ln \sin x \; dx$

### Polygama

**(1)** Spočtěte následující integrály

**(a)** $\int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx$

**(b)** $\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{1-x} \; dx$

**(c)** $\int_0^1 \ln x \ln(1+x) \; dx$

**(d)** $\int_0^1 \ln(1-x) \ln(1+x) \; dx$

**(e)** $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \; dx$

**(f)** $\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} \; dx$

**(g)** $\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x} \; dx$

**(h)** $\int_0^1 \ln^2(1+x) \ln x \; dx$

**(i)** $\int_0^1 \ln x \ln(1-x) \ln(1+x) dx$

**(j)** $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x} \; dx$

### Polylogaritmy

**(1)** Spočtěte následující integrály

**(a)** $\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} dx$

**(b)** $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \; dx$

**(c)** $\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1+x)}{x} \; dx$

**(d)** $\int_0^1 \mathrm{Li}_2^2 \, x \; dx$

**(e)** $\int_0^1 \ln x \ln(1+x) \; dx$

**(f)** $\int_0^1 \ln(1-x) \ln(1+x) \; dx$

**(g)** $\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x} \; dx$

**(h)** $\int_0^1 \ln x \ln(1-x) \ln(1+x) dx$

**(i)** $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x} \; dx$

# 17

## Fourierova řada

### Fourierova trigonometrická řada, Gibbsův jev

**(1)** Rozviňte funkci do trigonometrické fourierovy řady na daném intervalu. Dále určete konvergenci této řady k původní funkci ve smyslu konvergence v $L^2$, ve smyslu bodové konvergence a ve smyslu stejnoměrné konvergence (případně v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$).

**(a)** $\sin^4 x, \quad [-\pi, \pi)$

**(b)** $x, \quad [-\pi, \pi)$

**(c)*** $x^2, \quad [-\pi, \pi)$

**(d)** $\operatorname{sgn} x, \quad [-\pi, \pi)$

**(e)** $|x|, \quad [-1, 1)$

**(f)*** $x^2 \operatorname{sgn} x, \quad [-\pi, \pi)$

**(g)** $\max\{x, 0\}, \quad [-\pi, \pi)$

**(h)** $x(\pi^2 - x^2), \quad [-\pi, \pi)$

**(i)** $x|x|, \quad [-\pi, \pi)$

**(j)** $x \sin x, \quad [-\pi, \pi)$

**(k)** $\operatorname{sgn} x \cos x, \quad [-\pi, \pi)$

**(l)*** $\cos(\alpha x), \quad [-\pi, \pi)$

**(m)** $\cosh(\alpha x), \quad [-\pi, \pi)$

**(n)** $e^{\alpha x}, \quad [-1, 1)$

**(o)** $|\sin x|, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**(p)** $\frac{\pi}{4}(\cos x - 1) + \frac{x}{2}, \ [0, \pi)$

**(q)*** $\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|, \quad (-\pi, \pi)$

**(r)** $\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|, \ (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$

**(s)** $\ln\left|\cot\frac{x}{2}\right|, \quad (-\pi, \pi)$

**(t)** $x \cot\frac{x}{2}, \quad [-\pi, \pi)$

**(u)** $\dfrac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}, \ [-\pi, \pi)$

**(2)** Pomocí řad v předchozí úloze sečtěte řady (užijte buď dosazení nebo Parsevalovu rovnost), $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

**(c)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

**(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

**(e)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(-1)^n}{(4n+3)!}$

**(f)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$

**(g)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$

**(h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^4 + n^4}$

# 18

## Ortogonální systémy polynomů

$\phi_l(x) = k_l x^l + \tilde{k}_l x^{l-1} + \cdots$ [Řídící a subř. koef.] $\langle \phi_l, \phi_{l'} \rangle_\rho = \int_a^b \phi_l(x) \bar{\phi}_{l'}(x) \rho(x) dx = \|\phi_l\|_\rho^2 \delta_{ll'}$ [Ortogonální relace]
$G(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \phi_l(x)$ [Generující funkce] $E(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \phi_l(x)/l!$ [Exponenciální generující funkce]

### Čebyševovy polynomy I. druhu

$T_l(x) = \cos(l \arccos x)$ [Explicitní vzorec], $\rho(x) = \frac{\chi_{[-1,1]}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ [Váha]

**(1)** Z explicitního vzorce Čebyševových polynomů prvního druhu odvoďte

**(a)*** $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ **(c)*** Rekurentní vztah $T_{l+1}(x)$ **(e)*** jejich diferenciální rovnici

**(b)*** Ortogonální relace **(d)*** Řídící koeficient $k_l$ **(f)*** Generující funkci

**(2)*** Z diferenciální rovnice odvoďte postupným derivováním (Rokytova metoda) Rodriguesův vzorec

$$T_l(x) = (-1)^l \frac{2^l l!}{(2l)!} \sqrt{1-x^2} \left[ (1-x^2)^{l-\frac{1}{2}} \right]^{(l)}$$

**(3)** Najděte rozvoj funkce $f(x)$ do Čebyševových polynomů prvního druhu na $[-1, 1]$

**(a)*** $\operatorname{sgn} x$

### Čebyševovy polynomy II. druhu

$U_l(x) = \frac{\sin((l+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ [Explicitní vzorec], $\rho(x) = \chi_{[-1,1]}(x)\sqrt{1-x^2}$ [Váha]

**(1)** Z explicitního vzorce Čebyševových polynomů druhého druhu odvoďte

**(a)** $U_0(x), U_1(x), U_2(x), U_3(x)$ **(c)** Rekurentní vztah $U_{l+1}(x)$ **(e)** jejich diferenciální rovnici

**(b)** Ortogonální relace **(d)** Řídící koeficient $k_l$ **(f)** Generující funkci $G(x,t)$

**(2)** Z diferenciální rovnice odvoďte postupným derivováním (Rokytova metoda) Rodriguesův vzorec

$$U_l(x) = (-1)^l \frac{2^l (l+1)!}{(2l+1)!} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ (1-x^2)^{l+\frac{1}{2}} \right]^{(l)}$$

**(3)** Najděte rozvoj funkce $f(x)$ do Čebyševových polynomů druhého druhu na $[-1, 1]$

**(a)** $\operatorname{sgn} x$

### Laguerrovy polynomy

$L_{ls}(x) = \frac{1}{l!} x^{-s} e^x \left( x^{s+l} e^{-x} \right)^{(l)}, \ s > -1$ [Rodriguesův vzorec], $\rho(x) = x^s e^{-x} \chi_{[0,\infty)}(x)$ [Váha]

**(1)** Z Rodriguesova vzorce Laguerrových polynomů odvoďte

**(a)** Rekurentní vztah $L_{l+1}(x)$ **(b)*** Řídící koeficient $k_l$ **(c)*** Ortogonální relace

**(2)*** Pro libovolnou funkci $f(x)$ analytickou na $(0, \infty)$ a libovolné $t \in (-1, 1)$ odvoďte fundamentální integrál

$$\int_0^\infty f(x-tx) x^s e^{-x} dx = \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\infty t^l L_{ls}(x) f(x) x^s e^{-x} \, dx = \int_0^\infty f(x) \, G(x,t) x^s e^{-x} dx$$

**Bonus:** Vhodnou substutucí na levé straně a porovnáním získejte $G(x,t)$ explicitně. *Hint:* Taylorova řada okolo bodu $x$, poté per partes. *Hint na Bonus:* Fundamentální lemma variačního počtu.

**(3)** Najděte rozvoj funkce $f(x)$ do Laguerových polynomů na $[0, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)*** $e^{\alpha x}$

### Hermitovy polynomy

$H_l(x) = (-1)^l e^{x^2} (e^{-x^2})^{(l)}$ [Rodriguesův vzorec], $\rho(x) = e^{-x^2}$ [Váha]

**(1)** Z Rodriguesova vzorce Hermitových polynomů odvoďte

**(a)*** Rekurentní vztah $H_{l+1}(x)$ **(b)*** Řídící koeficient $k_l$ **(c)*** Ortogonální relace

**(2)*** Pro libovolnou funkci $f(x)$ analytickou na $\mathbb{R}$ a libovolné $t \in \mathbb{R}$ odvoďte fundamentální integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-x^2}dx = \sum_{l=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^l}{l!}H_l(x)f(x)e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,E(x,t)e^{-x^2}dx$$

**Bonus:** Vhodnou substitucí na levé straně a porovnáním získejte $E(x,t)$ explicitně.

**(3)** Najděte rozvoj funkce $f(x)$ do Hermitových polynomů na $(-\infty,\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)*** $e^{\alpha x}$

**(4)** Ukažte **(a)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_{2n+j}(x) = H_j\left(\frac{x}{\sqrt{1+4t}}\right)\frac{e^{\frac{4tx^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}^{j+1}}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}H_n(x)H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left(\frac{2txy-t^2(x^2+y^2)}{1-t^2}\right)$

## Legenderovy polynomy

$$P_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\left[(1-x^2)^l\right]^{(l)} \quad \text{[Rodriguesův vzorec]}, \qquad \rho(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \quad \text{[Váha]}$$

**(1)** Z Rodriguesova vzorce Legenderových polynomů odvoďte

**(a)*** $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ **(c)*** Řídící koeficient $k_l$ **(e)*** Ortogonální relace

**(b)** Rekurentní vztah $P_{l+1}(x)$ **(d)*** Hodnoty $P_l(0)$ **(f)** Hodnoty $P_l(\pm 1)$

**(2)*** Pro libovolnou funkci $f(x)$ analytickou na $(-1,1)$ a libovolné $t \in (-1,1)$ odvoďte fundamentální integrál

$$\int_{-1}^{1} f\left(x+\tfrac{1}{2}t(1-x^2)\right)dx = \sum_{l=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} t^l P_l(x)f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,G(x,t)dx$$

**Bonus:** Vhodnou substitucí na levé straně a porovnáním získejte $G(x,t)$ explicitně.

**(3)** Z Generující funkce $G(x,t)$ Legenderových polynomů odvoďte

**(a)*** Hodnoty $P_l(\pm 1)$, a identity: **(b)*** $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+l}(x) - P'_{l-1}(x)$ **(c)*** $(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$

**(d)*** Ortogonální relace $\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$. *Hint:* $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}\sqrt{1-2sx+s^2}} = \int_{-1}^{1}\frac{dz}{1-tsz^2}$

**(4)*** Ověřte postupným derivováním, že Legenderovy polynomy splňují $\left[(1-x^2)P_l(x)\right]'' = -l(l+1)P_l(x)$. *Hint:* Funkce splňující tuto ODR splňují téže Rodriguesovu formuli jako Legenderovy polynomy (až na násobek). Z této ODR poté odvoďte

**(a)** $(2l+1)(1-x^2)P'_l(x) = l(l+1)(P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x))$ **(b)** $\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)(1-x^2)\,dx = \frac{2l(l+1)}{2l+1}\delta_{ll'}$

**(5)** Najděte rozvoj funkce $f(x)$ do Legenderových polynomů na $x \in (-1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}, y \in [-1,1]$ (*Hint:* Přímo nebo z fundamentálního integrálu),

**(a)*** $\operatorname{sgn} x$ **(c)** $x_+$ **(e)** $\theta(x-y)$ **(g)** $\ln(1-x^2)$ **(i)** $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ **(j)** $\sqrt{|x|}$ **(l)** $\sqrt{1-x^2}$

**(b)** $|x|$ **(d)*** $\delta(x-y)$ **(f)** $\sqrt{1-x}$ **(h)** $\operatorname{argtgh} x$ **(k)** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **(m)** $\ln|x|$

**(6)** Sečtěte řady (*Hint:* Dosaďte nebo užijte Parsevalovu rovnost)

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+3)(2n)!^2}{8^n(n+1)!^2 n!^2}$

**(7)** Odvoďte Maclaurinovu řadu funkce $f(y) = \left(\arcsin\sqrt{2y-y^2}\right)/\sqrt{2y-y^2}$ dosazením $t = xy$ do generující funkce $G(x,t)$ Legenderových polynomů a následnou integrací $\int_{-1}^{1} dx$

## Asociované Legenderovy polynomy

$$P_{lm}(x) = \sqrt{1-x^2}^{\,m}\frac{(-1)^l}{2^l l!}\left[(1-x^2)^l\right]^{(l+m)}, \; -l \leqslant m \leqslant l \quad \text{[Rodriguesův vzorec]}, \qquad \rho(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \quad \text{[Váha]}$$

**(1)** Z Rodriguesova vzorce odvoďte

**(a)*** $P_{lm}(x) = \sqrt{1-x^2}^{\,m}P_l^{(m)}(x), m \geqslant 0$ **(b)** Hodnoty $P_{lm}(0)$ **(d)** Ortogon. relace pro libov. $m$

**(c)*** Ortogonální relace pro $m \geqslant 0$

**(2)** Odvoďte si Rodriguesův vzorec z jejich diferenciální rovnice i pro Asociované Legenderovy polynomy

# 19

## Komplexní analýza

### Derivace, holomorfie a Cauchy–Riemannovy podmínky

**(1)** Určete, kde je funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní dle Cauchy–Riemannových podmínek, derivujte, $\alpha \in \mathbb{C}$

**(a)*** $|z|^2$ **(b)*** $z^2$ **(c)*** $e^z$ **(d)** $1/z$ **(e)*** $\sqrt{z}$ **(f)*** $z^\alpha$ **(g)** $\ln z$

**(2)** Určete, kde je funkce holomorfní dle skládání známých holomorfních funkcí

**(a)*** $e^{\sin z}$ **(b)*** $\dfrac{1}{1-z^2}$ **(c)*** $\dfrac{1}{1+z^2}$ **(d)*** $\dfrac{1}{e^z-1}$ **(e)** $\operatorname{tgh} z$

### Řezy funkcí

**(1)** Určete, kde je funkce holomorfní (u všech funkcí uvažujte hlavní větve), určete skoky na řezech

**(a)*** $\sqrt[3]{z-1}$ **(b)*** $\dfrac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}}$ **(c)*** $\ln(z+1)-\ln(z-1)$ **(d)** $\sqrt{\dfrac{z+1}{z-1}}$ **(e)*** $\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z-1}}$ **(f)*** $\ln(1+iz)$ **(g)*** $\ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ **(h)*** $\ln(z^2-1)$ **(i)*** $\ln\left(\dfrac{iz-i}{z+1}\right)$

**(2)** Jak mohou vypadat řezy $f(z)$ různými volbami větví funkcí $\ln(\bullet)$ a $\sqrt{\bullet}$? (Volte jen mezi hlavními a vedlejšími větvemi)

**(a)** $\sqrt{1+z}\sqrt{1-z}$ **(b)** $\dfrac{\ln(z^2+1)}{\sqrt{z}(z+1)}$

**(3)** Navolte větve funkcí $\ln(\bullet)$, $(\bullet)^{2/3}$ a $(\bullet)^{1/3}$ tak, aby funkce $f(z)$ měla řez na intervalu $[-1, 1]$.

**(a)** $(1-z)^{2/3}(1+z)^{1/3}$ **(b)** $\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ **(c)** $\dfrac{\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)}{(1-z)^{2/3}(1+z)^{1/3}}$

### Komplexní integrál

**(1)** Spočtěte z definice komplexní integrály $\int_C f(z)\,dz$ podél konturu $C$ (v kladném smyslu, není-li uvedeno jinak), spočtěte pro hlavní a vedlejší větev, $\alpha > 0, n \in \mathbb{Z}$

**(a)*** $\displaystyle\int_C z^2 dz$, $C$: úsečka $0 \to 3+2i$

**(b)*** $\displaystyle\int_C z\bar{z}\,dz$, $C$: oblouk $0 \to 1+i \to 2i$

**(c)** $\displaystyle\int_C z^2 dz$, $C$: oblouk $0 \to 1+i \to 2i$

**(d)** $\displaystyle\int_C z^2\,dz$, $C : |z-i| = 1, \operatorname{Re} z > 0$

**(e)** $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z\bar{z}}$, $C : |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0$

**(f)** $\displaystyle\int_C \frac{dz}{1+z^2}$, $C: z = t + it^2, t \in (-\infty, \infty)$

**(g)*** $\displaystyle\oint_{|z|=\alpha} z^n\,dz$

**(h)*** $\displaystyle\oint_{|z|=\alpha} \sqrt{z}\,dz$

**(i)*** $\displaystyle\oint_{|z|=\alpha} \ln z\,dz$

**(2)** Spočtěte pomocí komplexní primitivní funkce (vyhněte se řezům!)

**(a)*** $\displaystyle\int_C z^2 dz$, $C$: úsečka $0 \to 3+2i$

**(b)*** $\displaystyle\int_C z^2 dz$, $C$: oblouk $0 \to 1+i \to 2i$

**(c)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x+x)^2}$

**(d)*** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$, *Hint:* $\frac{x^2-1}{x^4+1} = \operatorname{Re}\frac{1+i}{x^2-i}$

### Cauchyho věta, ML lemma a Jordanův odhad

**(1)** Odhadněte integrály a spočtěte limity, $R, \varepsilon > 0$

**(a)*** $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2}$, $C_R$ : oblouk $R \to iR \to -R$

**(b)*** $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$, $C_R$ : oblouk $R \to iR \to -R$

**(c)*** $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\oint_{C_\varepsilon} \frac{dz}{1+z^2}$, $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varepsilon\}$

**(d)*** $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\oint_{C_\varepsilon} \frac{dz}{1+z^2}$, $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = \varepsilon\}$

**(e)** $\displaystyle\lim_{h\to\infty}\int_{C_h} \operatorname{tg} z\,dz$, $C_h : z = h + it, t \in (-\infty, \infty)$

**(2)** Spočtěte integrály doplněním na vhodnou uzavřenou křivku, aplikujte Cauchyho větu

**(a)*** $\int_{C_1} z^2 dz$, $C_1$: oblouk $0 \to 1+i \to 2i$ **(b)*** $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$ **(c)** $\int_C \frac{dz}{1+z^2}$, $C: z = t + it^2, t \in (-\infty, \infty)$

## Laurentova řada, klasifikace singularit a residuum

**(1)** Nalezněte rezidua ve všech singularitách $\sigma \in \mathbb{C}$ dané funkce, $n \in \mathbb{N}$

**(a)** $\frac{1}{z^3+z}$ **(b)** $\frac{z^2}{z^4+1}$ **(c)** $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ **(d)** $\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$ **(e)** $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ **(f)** $\frac{1}{\sin \pi z}$ **(g)** $\frac{1}{\sin^3 z}$ **(h)** $\operatorname{cotg} \pi z$ **(i)** $\frac{1}{\sinh z}$ **(j)** $\frac{1}{\cosh z}$ **(k)** $\operatorname{tgh} z$ **(l)** $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$ **(m)** $\frac{1}{e^z+1}$ **(n)** $\frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$ **(o)** $\frac{1}{\sin(z^2)}$ **(p)** $\frac{1}{z^6(z-2)}$ **(q)** $\frac{z^8+1}{z^6(z+2)}$ **(r)** $\frac{z^{10}+1}{z^6(z^2+4)}$ **(s)** $\frac{\cos z}{(z^2+1)^2}$ **(t)** $\frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$ **(u)** $e^{1/z}$ **(v)** $z^2 \sin \frac{1}{1-z}$

**(2)** Zjistěte, zda má funkce singularitu v nekonečnu a určete reziduum (všechny funkce mají hlavní větve). *Hint:* Vyberte si směr, rozviňte a užijte větu o jednoznačnosti Laurentovy řady na holomorfním prstenci.

**(a)*** $\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ **(b)*** $\operatorname{tg} z$ **(c)*** $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ **(d)*** $e^z$ **(e)*** $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ **(f)** $z \sin z \sin \frac{1}{z}$ **(g)*** $\sqrt{z}\sqrt{z-1}$ **(h)** $(z-1)^{\frac{2}{3}}(z+1)^{\frac{1}{3}} \ln \frac{z+1}{z-1}$ **(i)** $z^5 \sqrt{\left(\frac{1}{z}+i\right)} \ln \frac{z}{z-1}$

## Residuová věta

Řešení z této sekce vizte tady: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~beckd/MAF/ContourIntegrals.pdf`

**(1)** Spočtěte pomocí kruhového konturu, $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-3\cos x)^2}$ **(b)** $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx$ **(c)** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cosh \alpha - \cos x}$ **(d)** $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x\, dx}{(1+4\sin^2 x)^2}$ **(e)** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x - \cos x + 1}$ **(f)** $⨍_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x - \alpha}$ **(g)** $\int_0^{2\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$

**(2)** Spočtěte pomocí polokruhového konturu, $\alpha, k \in \mathbb{R}$

**(a)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ **(b)** $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx$ **(c)** $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2(4+x^2)}$ **(d)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x\, dx}{x^2+\alpha^2}$ **(e)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+\alpha^2)}\, dx$ **(f)** $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+\alpha^2)^2}\, dx$ **(g)** $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx$ **(h)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\, dx$ **(i)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2+1}\, dx$ **(j)** $⨍_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^3}$ **(k)** $⨍_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x-a}\, dx$ **(l)** $⨍_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^2}\, dx$ **(m)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\, dx$ **(n)** $⨍_0^{\infty} \frac{\ln^2 x\, dx}{\sqrt{x}(x-1)^2(x-4)}$ **(o)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ **(p)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}$ **(q)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1-x+x^2}$ **(r)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^4)}{(1+x^2)^2}$ **(s)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^2(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$ **(t)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln x \ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$

**(3)** Spočtěte pomocí wedge konturu, $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$ **(b)** $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \sin(x^2)\, dx$ **(c)** $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{(1+x^4)^2}$ **(d)** $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{x^3+1}$ **(e)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^6+1)}\, dx$ **(f)** $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3}\, dx$ **(g)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}\, dx$ **(h)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\, dx$ **(i)** $⨍_0^{\infty} \frac{dx}{1-x^3}$ **(j)** $⨍_0^{\infty} \frac{\ln x\, dx}{(x^4-1)^2}$ **(k)** $⨍_0^{\infty} \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x}(x^6-1)^2}$ **(l)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x\, dx}{x^2+x+1}$

**(m)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{1-x+x^2}$ **(n)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+2x+2}$ **(o)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^4)}\,dx$

**(4)** Spočtěte pomocí obdelníkového konturu, $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)*** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{\cosh x}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{\cosh x}\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\cosh^2 x}\,dx$ **(g)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\cosh x-\cos\alpha}$

**(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\alpha x}{\sinh x}\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x/2}\,dx}{e^{2x}+2e^x+2}$ **(f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{\sinh x}$ **(h)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^x}$

**(i)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sinh x}e^{-x}\,dx$

**(5)** Spočtěte pomocí key-hole konturu, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**(a)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^2}$ **(g)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)^2(1+x^2)}$ **(m)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$ **(s)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2}{1-x+x^2}\,dx$

**(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^6+1)^2}$ **(h)** $\displaystyle\fint_0^\infty \frac{x^\alpha\,dx}{(\beta+x)(1+x^2)}$ **(n)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}$ **(t)** $\displaystyle\fint_0^\infty \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx$

**(c)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\,dx$ **(i)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **(o)** $\displaystyle\fint_0^\infty \frac{dx}{x^2-6x+1}$ **(u)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

**(d)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x+1)^2(x+4)\sqrt{x}}$ **(j)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)}$ **(p)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{1+x+x^2}$ **(v)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^3}\,dx$

**(e)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln\,dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$ **(k)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)(1+x^3)}$ **(q)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{(x+1)^2}\,dx$ **(w)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)}\,dx$

**(f)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(1+x)^3}\,dx$ **(l)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$ **(r)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^3 x\,dx}{(1+x)^2(1+x^2)}$

**(6)** Spočtěte pomocí bone konturu, $\alpha \in \mathbb{R}$

**(a)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx$ **(i)** $\displaystyle\fint_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\alpha}\,dx$ **(p)** $\displaystyle\int_0^1 \ln^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x^3}$

**(b)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{1+x^2}$ **(j)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{1-x+x^2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\,dx$ **(q)** $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x)x^x(1-x)^x$

**(c)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{4+x^2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$ **(k)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$ **(r)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

**(d)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{5-3x}\,dx$ **(l)** $\displaystyle\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\,dx$ **(s)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

**(e)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\,dx$ **(m)** $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x}$ **(t)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

**(f)** $\displaystyle\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ **(n)** $\displaystyle\int_0^1 \ln^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x}$ **(u)** $\displaystyle\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\arccos\sqrt{x}\,dx$

**(g)** $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$ **(o)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2x\right)\frac{dx}{x^3}$ **(v)** $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\ln x\arccos\sqrt{x}\,dx$

**(h)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$

### Cauchyův vzorec

**(1)** Pro matici $\mathbf{A}$ spočtěte $f(\mathbf{A})$ dle vzorce $f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi i}\oint (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}f(z)\,dz$, $n \in \mathbb{N}$, $f$ holomorfní na $\mathbb{C}$,

**(a)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $f(z) = \exp z$ **(b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $f(z) = \sin z$

# 20

# Integrální transformace

### Fourierova transformace jedné proměnné

Najděte Fourierovu transformaci $\hat{f}(k)$ funkce $f(x), x \in \mathbb{R}$ (případně v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

**(1)*** $\dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$

**(2)*** $\dfrac{x}{x^2+\alpha^2}$

- **(a)** přímo (Residuová věta)
- **(b)** derivací dle $k$

**(3)*** $\dfrac{1}{(x^2+\alpha^2)^2}$

- **(a)** přímo (Residuová věta)
- **(b)** derivací dle $\alpha$
- **(c)** konvolucí, neboť se jedná o součin dvou téže funkcí $1/(x^2+\alpha^2)$,

**(4)** $\dfrac{x^3}{(x^2+\alpha^2)^2}$

**(5)** $\dfrac{x^3+1}{x^4+1}$

**(6)** $\dfrac{1}{(x^2+\alpha^2)^n}$

**(7)*** $\chi_{[-,1,1]}(x)$

**(8)** $\theta(x)e^{-\alpha x}\cos(\beta x)$

**(9)*** $\dfrac{\sin x}{x}$

- **(a)** přímo (Residuová věta),
- **(b)** pomocí inverzní formule

**(10)*** $\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

- **(a)** přímo (Residuová věta)
- **(b)** derivací dle $x$ a poté integrací dle $k$

**(11)*** $e^{-\alpha x^2}$

**(12)** $xe^{-\alpha x^2}$

**(13)** $e^{-x^2}(-1)^n\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$

**(14)** $\dfrac{\chi_{[-1,1]}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

*Hint:* Rozviňte exponenciálu do řady a integrál spočtěte užitím beta funkce, identifikujte rozvoj známé speciální funkce

**(15)*** $\dfrac{\theta(x)}{\sqrt{x}}$ *Hint:* wedge contour

**(16)** $\sin(\alpha x^2)$

*Hint:* napište jako imaginarní část a poté užijte wedge contour (ne substituovat odmocninu!)

Pomocí Fourierovy transformace řešte parciální diferenciální rovnici pro funkci $u = u(x,t) \in \mathcal{S}$ proměnných $t \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$ pro jisté obecné počáteční $u_0(x) = u(x,0)$ a s parametry $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$

**(1)** $u_{,t} = \alpha u_{,xx} - \beta u$

Spočtěte konvoluci užitím Fourierovy transformace $x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0$

**(1)*** $e^{-\alpha|x|} * e^{-\alpha|x|}$

### Fourierova transformace více proměnných

**(1)** Najděte Fourierovu transformaci $\hat{f}(\vec{k})$ funkce $f(\vec{x}), \vec{x}\in\mathbb{R}^n, r=\|\vec{x}\|$ (případně v závislosti na parametru $\alpha\in\mathbb{R}$)

- **(a)*** $e^{-\alpha r^2}$ *Hint:* $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$
- **(b)** $f(\vec{x}) = \exp(-\vec{x}\cdot\mathbf{C}\cdot\vec{x})$, kde $\mathbf{C}$ je positivně definitní **symetrická** matice.

*Hint:* Dá se psát $\mathbf{C} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pro nějakou pos. def. symetrickou matici $\mathbf{A}$. Dále užijte vzorec pro obecnou lineární transformaci. Vyjádřete opět s původní maticí.

**(2)** Pomocí Fourierovy transformace řešte parciální diferenciální rovnici pro funkci $u = u(\vec{x},t) \in \mathcal{S}$ více proměnných $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pro jisté obecné počáteční $u_0(\vec{x}) = u(\vec{x},0)$

- **(a)*** $u_{,t} - \Delta u = 0$ [Vedení tepla]

### Fourierova transformace radiálně symetrických funkcí

**(1)** Najděte Fourierovu transformaci $\hat{f}(\vec{k})$ funkce $f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, r = \|\vec{x}\|$ (případně v závislosti na parametrech $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$)

**(a)*** $e^{-\alpha r^2}$ (radiálně i axiálně)

**(b)*** $\dfrac{1}{\alpha^2+r^2}$, $n=3$ (radiálně i axiálně)

**(c)** $\dfrac{r^2}{1+r^4}$, $n=3$

**(d)*** $r^\lambda$, $\lambda\in\left(-n,\frac{1-n}{2}\right)$, *Hint:* Ansatz $\frac{c(\lambda,n)}{k^{n+\lambda}}$ [Riesz]

**(e)*** $e^{-\alpha\lambda}$, *Hint:* Ansatz $c(\alpha,n)/(\alpha^2+n^2)^{\frac{n+1}{2}}$

**(f)** $f(\vec{x})=\chi_{[0,R]}(r)$, $n=3$, $R>0$
*Hint:* Rozviňte exponenciálu do řady a identifikujte výsledek integrace člen po členu jako reprezentaci známé speciální funkce.

**(g)** $f(\vec{x})=e^{-\alpha r}$, $n=3$, $\alpha>0$
*Hint:* Užijte vzorec pro výpočet FT radiálních funkcí ve třech dimenzích.

**(2)** Pomocí Fourierovy transformace řešte parciální diferenciální rovnici pro funkci $u=u(\vec{x},t)\in\mathcal{S}$ tří proměnných $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, s případnou počátečními podmínkami, $f,u_0\in\mathcal{S}$.

**(a)*** $\Delta u-\alpha^2 u=f$ [Helmholtzova] **(b)** $u_{,tt}+\Delta u=0$, $u(\vec{x},0)=u_0(\vec{x})$

**(3)** Ověřte následující integrály, $\alpha>0$ (*Hint:* Přepište jako konvoluce).

**(a)*** $$\int_{B_3(1)}\int_{B_3(1)}\frac{e^{-\alpha\|\vec{x}-\vec{y}\|}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|}\,d\vec{x}\,d\vec{y}=\frac{8\pi^2}{\alpha^5}\left(1-\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^3-(1+\alpha)^2e^{-2\alpha}\right)$$

**(b)** $$\int_{B_3(1)}\int_{B_3(1)}\theta(\alpha-\|\vec{x}-\vec{y}\|)\,d\vec{x}\,d\vec{y}=\begin{cases}\frac{\pi^2\alpha^3}{18}\left(\alpha^3-18\alpha+32\right), & 0<\alpha\leqslant 2\\ \frac{16\pi^2}{9}, & \alpha>2\end{cases}$$

### Laplaceova transformace

**(1)** Užitím Laplaceovy transformace najděte řešení obyčejné diferenciální rovnice na intervalu $(0,\infty)$

**(a)** $y''-5y'+6y=0, y(0)=y'(0)=2$ **(b)** $y''+xy'-2y=2, y(0)=y'(0)=0$

# 21

# Distribuce

### Vyčíslování a úpravy s distribucemi

**(1)** Zjednodušte ve smyslu distribucí, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, resp. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, r = \|\vec{x}\|, \alpha > 0$

**(a)*** $\langle \delta(\vec{x} - \vec{a}), \varphi(\vec{x}) \rangle$

**(b)*** $\langle \delta(A \cdot \vec{x}) \rangle, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

**(c)*** $\langle \delta', \varphi(x)) \rangle$

**(d)*** $x e^{-x} \delta''$

**(e)** $(\delta'' + 2\delta' + \delta) \cos(2x)$

**(f)*** $x^2 g_n''(x) - n(n+1) g_n(x)$, $g(x) = \begin{cases} (a/x)^n, & x > a \\ (x/a)^{n+1}, & x < a \end{cases}$

**(g)** $x^2\, T_{\text{f.p.}x^{-2}}$

**(h)** $\Delta \ln r, \quad n = 2$

**(i)*** $\Delta \frac{1}{r}, \quad n = 3$

**(j)*** $e^{-\alpha r^2} \Delta \delta(\vec{x}), \quad n = 3$

**(k)** $e^{-\alpha r^2} \Delta^2 \delta(\vec{x}), \quad n = 3$

**(l)*** $\Delta \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad n = 3$

**(2)** Ověřte ve smyslu slabé limity jednorozměrných distribucí

**(a)** $\lim\limits_{n \to \infty} n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0) = -\delta'$

**(b)*** $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 (\delta_{\frac{1}{n}} - 2\delta_0 + \delta_{-\frac{1}{n}}) = \delta''$

**(c)** $\lim\limits_{n \to \infty} T_{f_n} = T_{\text{f.p.}1/x^2}$, kde $f_n(x) = \begin{cases} 1/x^2, & |x| \geqslant 1/n, \\ -n^2, & |x| < 1/n. \end{cases}$

**(d)*** $\lim\limits_{n \to \infty} T_{\frac{n}{1+n^2x^2}}$

**(e)** $\lim\limits_{n \to \infty} T_{\frac{1}{\pi} \frac{n}{e^{nx} + e^{-nx}}} = \frac{1}{2}\delta$

**(f)** $\lim\limits_{n \to \infty} T_{\frac{-2n^3 x}{\pi(1+n^2x^2)^2}}$

**(g)*** $\lim\limits_{\lambda \to -2} H_{|x|^\lambda}$

**(h)*** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \delta_{\frac{k}{n}} = T_{\chi_{[0,1]}}$

**(3)** Spočtěte konvoluce z definice $x \in \mathbb{R}, \alpha > 0, n \in \mathbb{N}_0$

**(a)*** XXX

**(b)*** $H_{x_+^{-3/2}} * T_{x_+^{-1/2}}$

**(c)** $T_{\text{f.p.}\frac{1}{x^{n+1}}} * T_{\chi_{(-1,1)}(x)}$

### Obyčejné diferenciální rovnice s distribucemi

**(1)** Na prostoru regulárních distribucí najděte řešení následujících obyčejných diferenciálních rovnic, $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$,

**(a)*** $T'' - 5T' + 6T' = \delta_0$

**(b)** $T'' + T' - 6T' = \delta_0$

### Fourierova transformace distribucí

**(1)** Spočtěte jednorozměrnou Fourierovu transformaci ve smyslu distribucí, $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$,

**(a)*** $\delta(x - \alpha)$

**(b)*** $e^{i\alpha x}$

**(c)*** $J_n(x)$

**(d)*** $\delta^{(n)}(x - \alpha)$

**(e)*** $x^n$

**(f)*** $T_{\frac{1}{x \pm i0}}$

**(g)*** $T_{\frac{1}{(x \pm i0)^n}}$

**(h)*** $x_\pm^n$

**(i)*** $T_{\text{p.v.}\frac{1}{x}}$

**(j)*** $T_{\text{f.v.}\frac{1}{x^{n+1}}}$

**(k)*** $x^n \operatorname{sgn} x$

**(l)*** $H_{x_\pm^\lambda}$

**(m)*** $H_{|x|^\lambda}$

**(n)*** $H_{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}$

**(o)*** $H_{\frac{1}{(x \pm i0)^\lambda}}$

**(p)** $H_{x_+^{-3/2}}$

**(q)** $T_{\text{f.p.}x^{-2}}$

**(r)** $T_\theta$

**(2)** Spočtěte vícerozměrnou Fourierovu transformaci ve smyslu distribucí, $\vec{x}, \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n, r = \|\vec{x}\|, R > 0, j \in \mathbb{N}$,

**(a)*** $\delta(\vec{x} - \vec{\alpha})$

**(b)*** $\nabla \delta(\vec{x})$

**(c)*** $\Delta \delta(\vec{x})$

**(d)*** $\Delta^j \delta(\vec{x})$

**(e)*** $r^{2j}$

**(f)** $\delta(r - R), \ n = 3$

**(3)** Spočtěte konvoluci užitím Fourierovy transformace $x \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3, r = \|\vec{x}\|, \quad \alpha > 0$

**(a)*** $x^2 * e^{-\alpha|x|}$

**(b)** $H_{x_+^{-3/2}} * T_{x_+^{-1/2}}$

**(c)** $T_{\text{f.p.}x^{-2}} * T_{x^2}$

**(d)** $T_\theta * T_{e^{-\alpha r}}$

**(e)*** $T_{r^2} * T_{e^{-\alpha r}}$

**(f)** $H_{r^{-4}} * T_{e^{-\alpha r}}$

**(4)** Pomocí Fourierovy transformace najděte $f \in \mathcal{S}$ splňující následující vztah ($\alpha, \beta > 0, x_0 \in \mathbb{R}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$),

**(a)*** $f^{(4)}(x) + \alpha^4 f(x) = \delta_0$

**(b)*** $e^{-\beta|x-x_0|} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\alpha|x-y|} dy$

**(c)** $\theta(x) = f(x) + 2\int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)\, f(x-y)\ dy$

*Hint:* Volte $f(x) = e^{-x} g(x)$

**(d)*** $e^{-\beta\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{y})\, e^{-\alpha\|\vec{x}-\vec{y}\|} d\vec{y}$

**(5)** Pomocí Fourierovy transformace řešte parciální diferenciální rovnici pro funkci $u = u(\vec{x}, t) \in \mathcal{S}$ více proměnných $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\beta > 0$, případně s počátečními podmínkami $u_0, v_0 \in \mathcal{S}$.

**(a)** $u_{,t} + \vec{\alpha} \cdot \nabla u = 0, \quad u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x})$

**(b)** $(\Delta^2 - \beta^2\Delta + \beta^4)u = \delta(\vec{x}), \quad n = 3$

**(c)** $u_{,tt} - \Delta u = 0, \qquad u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) = v_0(\vec{x}), \qquad n = 3$ [Vlnová]

# Přehled vzorců

## Řecká písmena

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ A alfa | $\epsilon$ $\varepsilon$ E epsilon | $\iota$ I ióta | $\nu$ N ný | $\rho$ $\varrho$ P ró | $\phi$ $\varphi$ $\Phi$ fí |
| $\beta$ B beta | $\zeta$ Z zéta | $\kappa$ K kappa | $\xi$ $\Xi$ ksí | $\sigma$ $\varsigma$ $\Sigma$ sigma | $\chi$ X chí |
| $\gamma$ $\Gamma$ gama | $\eta$ H éta | $\lambda$ $\Lambda$ lambda | o O omikron | $\tau$ T tau | $\psi$ $\Psi$ psí |
| $\delta$ $\Delta$ delta | $\theta$ $\vartheta$ $\Theta$ théta | $\mu$ M mí | $\pi$ $\Pi$ pí | $\upsilon$ $\Upsilon$ ypsilon | $\omega$ $\Omega$ omega |

## Základní poznatky

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$z^n = r\angle\alpha \Rightarrow z = \sqrt[n]{r}\angle(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}), k = 0, \ldots, n-1$ [Binomická rce]

$\begin{bmatrix} |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \\ |z_1 \pm z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2|| \end{bmatrix}$ [Trojúhelníkové nerovnosti v $\mathbb{C}$]

$(1+x)^n \leqslant 1 + nx, x \geqslant -1, n \in \mathbb{N}$ [Bernoulliova nerovnost]

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ [Binomický koeficient]

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ [Binomická věta]

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ [Suma lineární posloupnosti]

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ [Suma kvadrátů]

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ [$\zeta(2)$ a $\zeta(4)$]

$(2n)!! = 2^n n!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ [Dvojný faktoriál]

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$ [Eulerovo číslo]

$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$ [Wallisova formule]

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ [Stirlingova formule]

$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ [Harmonické číslo]

$H_n^{(m)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^m} = 1 + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n^m}$

$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n)$ [Euler–Mascheroniho konstanta]

$\Pi_n = \{\{P_1, P_2, \ldots, P_l\} \mid P_1 \sqcup P_2 \sqcup \cdots \sqcup P_l = [n], 1 \leqslant l \leqslant n\}$
[Disjunktní rozklady množiny $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$]

$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in \operatorname{int} A \\ 1/2 & x \in \partial A \\ 0 & x \in \operatorname{ext} A \end{cases}$ [Charakteristická funkce]

$\theta(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$ [Heavisidova funkce]

$\operatorname{sgn} x = \theta(x) - \theta(-x)$ [Znaménková funkce]

$x_+ = \max\{x, 0\}, x_- = \max\{-x, 0\}$ [Kladná a záporná část]

$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$ [Konvoluce]

## Hyperbolické a hyperbolometrické funkce

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

## Duplicitiní, bisektivní a jiné formule

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$

$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

$\operatorname{tgh}(2x) = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x}$

$\operatorname{cotg}(2x) = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}$

$\operatorname{cotgh}(2x) = \frac{\operatorname{cotg}^2 x + 1}{2 \operatorname{cotgh} x}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$

$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$

$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$

## Součtové vzorce

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$

$\operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$

$\operatorname{cotgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotgh} x \operatorname{cotgh} y \pm 1}{\operatorname{cotgh} y \pm \operatorname{cotgh} x}$

## Limita a derivace

$\alpha, L \in \mathbb{R}, \beta > 0, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}_\delta(\alpha) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L), \qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$(\alpha f)' = \alpha f'$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f_{-1})' = 1/f'(f_{-1})$

[Newton]

$(fg)' = f'g + fg'$

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

[Leibniz]

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{"0/0"}{=} \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)},$

$f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ [l'Hospital]

$[f(g)]' = f'(g)g'$

$[f(g)]^{(n)} = \sum_{\pi\in\Pi_n} f^{(|\pi|)}(g) \prod_{P\in\pi} g^{(|P|)}$

[Faà di Bruno]

$\alpha' = 0$

$x' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(1/x)' = -1/x^2$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\beta^x)' = \beta^x \ln \beta$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_\beta x)' = \frac{1}{x \ln \beta}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

## Taylorova řada

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, c \in [a, x]$ [Taylorova věta]

$g(f_{-1}(y)) = g(a) + \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{d}{ds}\right)^{n-1} \left[g'(s)\left(\frac{s-a}{f(s)-f(a)}\right)^n\right]\Big|_{s=a} \frac{(y-f(a))^n}{n!}, \qquad y \to f(a)$ [Lagrangeova inverzní formule]

## Maclaurinovy rozvoje

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots \text{ [Newton]}$$

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4!}x^4 + \dots \text{[Newton}']$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \dots$$

$$\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \frac{127x^7}{604800} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$\operatorname{tgh} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \dots$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$$

$$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} - \dots$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \frac{127x^7}{604800} - \dots$$

## Primitivní funkce

$$a, b, C, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,\ f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F'(x) = f(x) \implies \int f(x)\ dx = F(x) + C$$

$$\int \alpha f\ dx = \alpha \int f\ dx$$

$$\int f \pm g\ dx = \int f\ dx \pm \int g\ dx$$

$$\int f(ax+b)\ dx = \tfrac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$$\int f'(x)/f(x)\ dx = \ln|F(x)| + C$$

$$\int g'(x)f(g(x))dx = \int f(y)dy,\ y = g(x)$$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt,\ x = g(t)$$

$$\int fg'\ dx = fg - \int f'g\ dx \quad \text{[Per Partes]}$$

$$\int fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)} g$$

$$\int x^\alpha\ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\ dx = e^x + C$$

$$\int \beta^x\ dx = \beta^x / \ln\beta + C$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x\ dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\ dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argtgh} x + C, |x| < 1$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argcotgh} x + C, |x| > 1$$

## Definice integrálu, derivace a integrál

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b^-) - F(a^+) \quad \text{[Newton]}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = f(x,t)\frac{dx}{dt}\Bigg|_{a(t)}^{b(t)} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \quad \text{[Leibniz]}$$

$$\int_a^b f\ dx = \lim_{\max\limits_{j=1,\dots,n} |x_j - x_{j-1}| \to 0} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{[Riemann]}$$

$$\int_M f_+\ d\mu = \sup_{s=\sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}} \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j \cap M) \right\} \quad \text{[Lebesgue]}$$

## Regularizace integrálu

$$\fint_a^b \frac{f(x)}{x-c}\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \right) \frac{f(x)}{x-c}\ dx \quad \text{[Cauchy PV]}$$

$$\fint_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^{n+1}}\ dx = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dc}\right)^n \fint_a^b \frac{f(x)}{x-c}\ dx \quad \text{[Hadamard]}$$

## Substituce pro racionální funkce speciálního argumentu

$$\int \frac{dx}{Q(x)} = \frac{2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{Q'(x)}{\sqrt{-D}}, \quad D < 0, \quad \text{kde} \quad Q(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta), \quad D = b^2 - 4ac \quad \text{[Master formule]}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} \qquad t = \tan\frac{x}{2} \quad \text{[Weierstrassova universální]}$$

$$\int R(\sinh x, \cosh x)\ dx = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1-t^2} \qquad t = \tanh\frac{x}{2} \quad \text{[Weierstrassova universální}']$$

$$\int R\left(x, \sqrt{Q(x)}\right)\ dx = \begin{cases} \int R\left(\frac{c-t^2}{\pm 2t\sqrt{a}-b}, \frac{\pm c\sqrt{a}-bt}{\pm 2t\sqrt{a}-b}\right)\ dx & \sqrt{Q} = \pm x\sqrt{a} + t \\ \int R\left(\frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \frac{\pm a\sqrt{c}-bt}{a-t^2}\right)\ dx & \sqrt{Q} = xt \pm \sqrt{c} \\ \int R\left(\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}, \frac{a(\beta-\alpha)t}{a-t^2}\right)\frac{2at(\beta-\alpha)\ dt}{(a-t^2)^2} & \sqrt{Q} = (x-\alpha)t \end{cases} \quad \text{[Eulerovy]}$$

$$\int R(Q(x))\frac{dx}{\sqrt{Q(x)}} = \int R\left(\frac{b^2-4ac}{4(t^2-a)}\right)\frac{dt}{a-t^2} \qquad t = \frac{d}{dx}\sqrt{Q(x)} \quad \text{[Abelova]}$$

$$\int R\left(x \pm \frac{1}{x}\right)\left(1 \mp \frac{1}{x^2}\right)\ dx = \int R(t)\ dt \qquad t = x \pm \frac{1}{x} \quad \text{[Slobinova]}$$

## Speciální určité integrály a řady

$$n \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

$$\int_0^\infty \sin(\alpha x)e^{-\beta x}\ dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\int_0^\infty \cos(\alpha x)e^{-\beta x}\ dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{1+x^\alpha}\ dx = \frac{\pi}{\alpha\sin(\pi\frac{\beta}{\alpha})}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha^2-n^2} = \frac{\pi\cot(\alpha\pi)}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} \quad \text{[Mittag-Leffler]}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha^2+n^2} = \frac{\pi\coth(\alpha\pi)}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$L_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad \text{[Wallis]}$$

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$G_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\ dx = n!$$

$$D_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi} \quad \text{[Gaussův]}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\ dx = \pi\operatorname{sgn}\alpha \quad \text{[Dirichletův]}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \sin x^2\ dx \\ \int_0^\infty \cos x^2\ dx \end{aligned}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \quad \text{[Fresnelovy]}$$

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx = \begin{cases} 0, & |\alpha| < 1 \\ 4\pi\ln|\alpha|, & |\alpha| \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{[Diniho]}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\ dx = \pi e^{-|\alpha|} \quad \text{[Laplaceův]}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\ dx = \frac{\pi^4}{15} \quad \text{[Bose–Einsteinův]}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\ dx = \Gamma(s)\zeta(s)$$

## Diferenciální počet více proměnných

$$f(\vec{x}+\vec{h})=f(\vec{x})+df(\vec{x})|_{\vec{h}}+\frac{1}{2}d^2f(\vec{x})|_{\vec{h}}+\frac{1}{3!}d^3f(\vec{x})|_{\vec{h}}+\frac{1}{4!}d^4f(\vec{x})|_{\vec{h}}+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(\vec{x})|_{\vec{h}}+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\vec{x}+\theta\vec{h})|_{\vec{h}}\quad \text{[Taylorův rozvoj]}$$

## Polární, cylindrická a sférická substituce a jejich Jakobiány

[Polární]

$$\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{bmatrix} \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad J=\rho$$

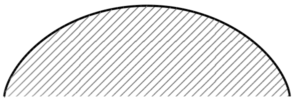
[Cylindrická]

$$\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{bmatrix} \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad J=\rho$$

[Sférická]

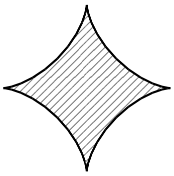
$$\begin{bmatrix} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{bmatrix} \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad J=r^2\sin\theta$$

## Rovinné křivky



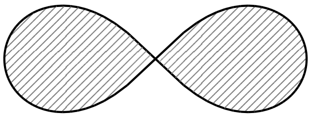
$x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$

[Cykloida]



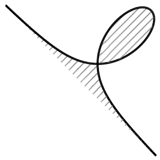
$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

[Asteroida]



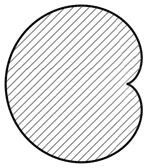
$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$

[Lemniskáta Bernoulliho]



$x^3+y^3=3axy$

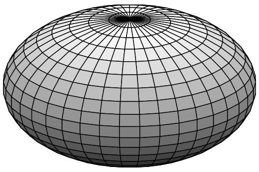
[Descartův list]



$\rho=2a(1-\cos\varphi)$

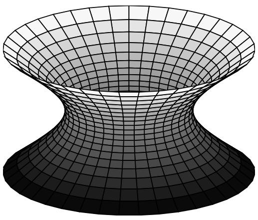
[Kardioida]

## Kvadriky a jiné prostorové plochy



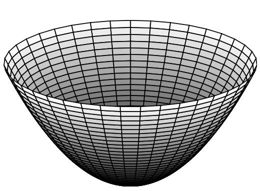
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

[Elipsoid, sféra]



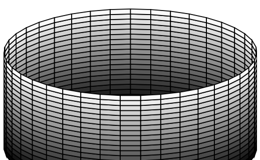
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

[Hyperboloid jednodílný]



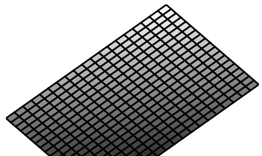
$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

[Paraboloid eliptický]



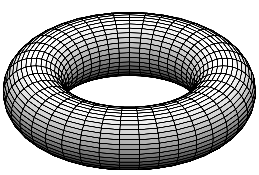
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

[Válec eliptický]



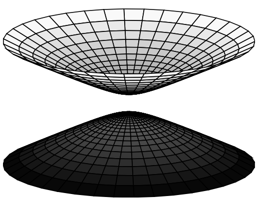
$ax+by+cz=d$

[Rovina]



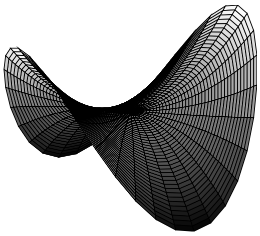
$z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2=b^2$

[Torus]



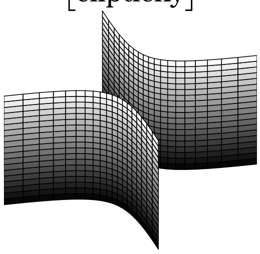
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

[Hyperboloid dvoudílný]



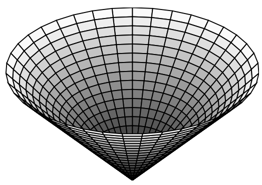
$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

[Paraboloid hyperbolický]



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

[Válcová plocha hyperbolická]



$\frac{z}{c}=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$

[Kužel]

## Obecná parametrizace křivek a ploch, transformace diferenciálů

Objem a jeho parametrizace:

$V\colon \vec{r}=\vec{r}(u,v,w),\quad (u,v,w)\in M\subset\mathbb{R}^3$

$dV=dx\,dy\,dz$ [Element objemu]

$dV=|(\vec{r}_{,u}\times\vec{r}_{,v})\cdot\vec{r}_{,w}|\,du\,dv\,dw$

$dV=|\det(\vec{r}_{,u},\vec{r}_{,v},\vec{r}_{,w})|\,du\,dv\,dw$

$\quad=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

$\quad=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ [Poziční vektor]

Křivka a její parametrizace:

$C\colon \vec{r}=\vec{r}(t),\quad t\in(a,b)\subset\mathbb{R}$

$d\vec{r}=\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz$ [Elem. pozic.]

$d\vec{r}=\hat{\tau}\,ds=\vec{r}_{,t}\,dt$

$ds=\|d\vec{r}\|=\|\vec{r}_{,t}\|\,dt$ [Elem. dráhy]

$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$

$\quad=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+dz^2$

$\quad=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$

$\hat{\tau}=\vec{r}_{,t}/\|\vec{r}_{,t}\|$

[Jednot. tečný vektor ke křivce]

Plocha a její parametrizace:

$S\colon \vec{r}=\vec{r}(u,v),\quad (u,v)\in A\subset\mathbb{R}^2$

$d\vec{S}=\hat{x}dydz+\hat{y}dzdx+\hat{z}dxdy$ [El. plochy]

$d\vec{S}=\hat{n}\,dS=\vec{r}_{,u}\times\vec{r}_{,v}\,du\,dv$

$dS=\|d\vec{S}\|=\|\vec{r}_{,u}\times\vec{r}_{,v}\|\,du\,dv$

$\quad=\sqrt{\|\vec{r}_{,u}\|^2\|\vec{r}_{,v}\|^2-(\vec{r}_{,u}\cdot\vec{r}_{,v})^2}\,du\,dv$

$\quad=\sqrt{1+z_{,x}^2+z_{,y}^2}\,dx\,dy$ [Spec. para.]

$\hat{n}=\pm\frac{\vec{r}_{,u}\times\vec{r}_{,v}}{\|\vec{r}_{,u}\times\vec{r}_{,v}\|}=\pm\frac{z_{,x}\hat{x}+z_{,y}\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{1+z_{,x}^2+z_{,y}^2}}$

[Jednot. normálový vek. k ploše]

## Trojný, křivkový a plošný integrál v prostoru

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ [Poziční vektor] $\phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z)$ [Skalární pole] $\vec{f}(\vec{r}) = P\hat{x} + Q\hat{y} + R\hat{z}$ [Vektorové pole]

| Klasický zápis: | Parametrizace na obyč. integrál: | Název integrálu: |
|---|---|---|
| $\int_C \phi(x, y, z)\ ds$ | $\left[\int_C \phi(\vec{r})\ ds = \int_a^b \phi(\vec{r}(t))\,\lVert\vec{r}(t)\rVert\ dt\right]$ | [Křivkový integrál I. druhu] |
| $\int_C P\ dx + Q\ dy + R\ dz$ | $\left[\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}(t)\ dt\right]$ | [Křivkový integrál II. druhu] |
| $\iint_S \phi(x, y, z)\ dS$ | $\left[\iint_S \phi(\vec{r})\ dS = \iint_A \phi(\vec{r}(u, v))\,\lVert\vec{r}_{,u} \times \vec{r}_{,v}\rVert\ dudv\right]$ | [Plošný integrál I. druhu] |
| $\iint_S P\ dydz + Q\ dzdx + R\ dxdy$ | $\left[\iint_S \vec{f}(\vec{r}) \cdot\ d\vec{S} = \iint_A \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_{,u} \times \vec{r}_{,v})\ dudv\right]$ | [Plošný integrál II. druhu] |
| $\iiint_V \phi(x, y, z)\ dxdydz$ | $\left[\iiint_V \phi(\vec{r})\ dV = \iiint_M \phi(\vec{r}(u, v, w))\,\lvert\det(\vec{r}_{,u}, \vec{r}_{,v}, \vec{r}_{,w})\rvert\ dudvdw\right]$ | [Trojný integrál] |

## Integrální věty v rovině a prostoru

$\oint_{\partial A} Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \quad A \subset \mathbb{R}^2$ [Greenova]

$\int_A^B \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = \phi(B) - \phi(A)$ $\left[\int_A^B \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)\right]$ [Nezávislost na integrační cestě, potenciál]

$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ $\left[\oint_{\partial S} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{S}\right]$ [Stokesova]

$\oiint_{\partial V}^{+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$ $\left[\oiint_{\partial V}^{+} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{f}\ dV\right]$ [Gauss–Ostrogradského]

## Vektorový a tenzorový počet v prostoru

$\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,2,3} = (x, y, z)$ [Kartézské souřadnice]
$\phi = \phi(x, y, z)$ [Skalár, skalární pole]
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ [Jednot. pole ve směru $x, y, z$, pravotoč. repér]
$\vec{a} = \sum_i a_i\hat{x}_i = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$ [Vektor, vektorové pole]
$\lVert\vec{a}\rVert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ [Velikost vektoru]
$\hat{a} = \vec{a}/\lVert\vec{a}\rVert$ [Normovaný, jednotkový vektor]
$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ [Poziční vektor]

---

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lVert\vec{a}\rVert\lVert\vec{b}\rVert \cos\gamma \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = \lVert\vec{a}\rVert^2$ [Skalární součin]
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$ [Ortogonalita, Kroneckerovo delta $\delta_{ij}$]

---

$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} \perp \operatorname{span}(\vec{a}, \vec{b}) \\ \lVert\vec{a} \times \vec{b}\rVert = \lVert\vec{a}\rVert\lVert\vec{b}\rVert \sin\gamma \\ \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}\ \text{pravotoč. báze} \end{array}\right\}$ [Vektorový součin]

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{z}$
$\hat{x}_i \times \hat{x}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_k$ [Pravotočivost, Levi-Civitův symbol $\varepsilon_{ijk}$]
$\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$
$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} = 0$ [Antisymetrie]
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ [Cyklická symetrie]
$\lVert\vec{a} \times \vec{b}\rVert = \sqrt{\lVert\vec{a}\rVert^2\lVert\vec{b}\rVert^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ [Lagrangeova ident.]
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ [BAC−CAB identita]
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

---

$I = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$ [Identický tenzor]

$\sigma = \sum_{ij} \sigma_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j$ [Obecný tenzor 2. řádu, tenz. pole]
$\sigma^\top = \sum_{ij} \sigma_{ij}\hat{x}_j\hat{x}_i, \quad (\vec{a}\vec{b})^\top = \vec{b}\vec{a}$ [Transpozice]
$T = \sum_{i_1 \ldots i_n} T_{i_1 \ldots i_n}\hat{x}_{i_1} \cdots \hat{x}_{i_n}$ [Obecný tenzor $n$-tého řádu]
$\operatorname{Tr} T = \sum_{i_1 \ldots i_n} T_{i_1 \ldots i_n}(\hat{x}_{i_1} \cdot \hat{x}_{i_2})\hat{x}_{i_3} \cdots \hat{x}_{i_n}$ [Stopa tenzoru]
$\operatorname{Cr} T = \sum_{i_1 \ldots i_n} T_{i_1 \ldots i_n}(\hat{x}_{i_1} \times \hat{x}_{i_2})\hat{x}_{i_3} \cdots \hat{x}_{i_n}$ [Křížová stopa]
$\sigma \mathbin{:} T = \sum_{ij i_1 \ldots i_n} \sigma_{ij} T_{i_1 \ldots i_n}(\hat{x}_i \cdot \hat{x}_{i_2})(\hat{x}_j \cdot \hat{x}_{i_1})\hat{x}_{i_3} \cdots \hat{x}_{i_n}$

---

$\partial_{x_i} = \partial_i = {}_{,i}$ [Parciální derivace dle $x_i$]
$d = dx\,\partial_x + dy\,\partial_y + dz\,\partial_z$ [Diferenciál, p.d. dle param.]
$\nabla = \sum_i \hat{x}_i\partial_i = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z$ [Gradient]
$d\phi = \phi_{,x}dx + \phi_{,y}dy + \phi_{,z}dz$ [Diferenciál skal. pole]
$\nabla\phi = \sum_i \phi_{,i}\hat{x}_i = \phi_{,x}\hat{x} + \phi_{,y}\hat{y} + \phi_{,z}\hat{z}$ [Grad. skal. pole]
$dT = \sum_{i_1 \ldots i_n} (dT_{i_1 \ldots i_n})\hat{x}_{i_1} \cdots \hat{x}_{i_n}$ [Diferenciál tenzoru]
$\nabla T = \sum_{i_1 \ldots i_n} (\nabla T_{i_1 \ldots i_n})\hat{x}_{i_1} \cdots \hat{x}_{i_n}$ [Gradient tenzoru]
$dT = d\vec{r} \cdot \nabla T$
$\nabla\cdot = \operatorname{Tr} \nabla$ [Divergence]
$\nabla\times = \operatorname{Cr} \nabla$ [Rotace]
$\Delta = \operatorname{Tr} \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ [Laplacián]

---

$\vec{a} \cdot \nabla T = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(T(\vec{r} + t\vec{a}) - T(\vec{r})\right)$ [Zavedení gradientu]
$T(\vec{r} + \vec{h}) = T + \vec{h} \cdot \nabla T + \frac{1}{2}\vec{h}\vec{h} \mathbin{:} \nabla^2 T + \ldots$ [Tayl. rozvoj tenzoru]
$\nabla_{\vec{u}} T = \vec{u}/\lVert\vec{u}\rVert \cdot \nabla T$ [Derivace ve směru]
$\nabla\phi \perp \phi = C$ [Kolmost gradientu a izoploch skal. pole]

$\nabla\times(\nabla\times T) = \nabla\nabla\cdot T - \Delta T$ [rot rot = grad div − laplace]
$\nabla\times\nabla T = 0$ [rot grad = 0]
$\nabla\times(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\nabla\cdot\vec{v} - \vec{v}\nabla\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\nabla\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{u}$
$\nabla(\phi T) = (\nabla\phi)T + \phi\nabla T$ [Pravidlo součinu]
$\nabla\cdot(\phi T) = (\nabla\phi)\cdot T + \phi\nabla\cdot T$ [Stopa předchozí formule]
$\nabla\cdot(\vec{u}T) = (\nabla\cdot\vec{u})T + \vec{u}\nabla\cdot T$ [Vektorizace předchozí f.]
$\Delta(\phi T) = (\Delta\phi)T + 2(\nabla\phi)\cdot\nabla T + \phi\Delta T$
$\nabla f(\phi) = f'(\phi)\nabla\phi$ [Řetízkové pravidlo fce skal. pole]
$\Delta f(r) = \frac{1}{r}(rf)'' = \frac{1}{r^2}(r^2 f')'$ [Laplacián radiálních polí]
$\Delta(\vec{r}\times\nabla)T = (\vec{r}\times\nabla)\Delta T$
$\Delta(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$
$\nabla\vec{r} = I$
$\nabla\times\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \nabla\phi$ [Potenciálové vek. pole]
$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \nabla\times\vec{A}$ [Solenoidální vek. pole]

---

$d\vec{r} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$ [Dráhový element]
$ds^2 = \|d\vec{r}\|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ [Délkový element]
$d\vec{S} = \hat{n}dS = \hat{x}dydz + \hat{y}dzdx + \hat{z}dxdy$ [Ori. plošný el.]
$dS^2 = \|d\vec{S}\|^2 = dy^2dz^2 + dz^2dx^2 + dx^2dy^2$ [Plošný el.]
$dV = dxdydz$ [Objemový element]

---

$\int_M T dM = \sum_{i_1\dots i_n} (\int_M T_{i_1\dots i_n} dM)\,\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_n}$ [Integrál tenzoru]
$\int_A^B d\vec{r}\cdot\nabla T = T(B) - T(A)$ [Nezáv. na cestě, potenciál]
$\oiint_{\partial V} d\vec{S}\,T = \iiint_V dV\,\nabla T$ [Gauss–Ostrogradského věta]
$\oint_{\partial S} d\vec{r}\,T = \iint_S d\vec{S}\times\nabla T$ [Stokesova věta]
$\frac{d}{dt}\int_{M(t)} T dM = \int_{M(t)} T_{,t} + \nabla\cdot(\vec{v}T) dM$ [Reynoldsův teorém]

## Ortogonální křivočaré souřadnice, základní souřadná pole v prostoru

$\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,2,3} = (x, y, z)$ [Kartézské souřadnice]
$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ [Poziční vektor]
$\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$ [Axiální vektor]
$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ [Radiální vzdálenost]
$\rho = \|\vec{\rho}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ [Axiální vzdálenost]
$\varphi = \operatorname{arctg}(x, y)$ [Azimut]
$\theta = \operatorname{arctg}(z, \rho)$ [Polární úhel]

---

$\mathbf{q} = (q_\alpha)_{\alpha=1,2,3} = (q_1, q_2, q_3)$ [Obec. ortog. souřadnice]
$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = (x_i(q_1, q_2, q_3))_{i=1,2,3}$ [Transformační relace]
$J = \det \mathbf{x}_{,\mathbf{q}} = \det(x_{i,\alpha})_{i\alpha}$ [Jakobián]

$dV = J\, dq_1 dq_2 dq_3$ [Objemový element]

---

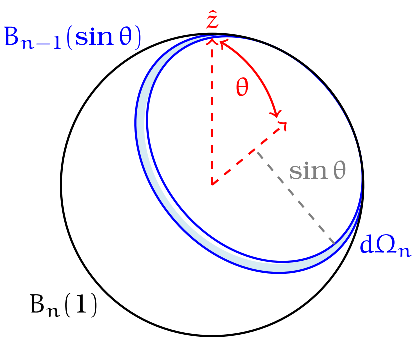
$\hat{x}_i$ [Jednotkové pole ve směru růstu $x_i$]
$\hat{q}_\alpha$ [Jednotkové pole ve směru růstu $q_\alpha$]
$(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)$ [Pravotočivý repér, triáda]
$\hat{q}_\alpha\cdot\hat{q}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ [Ortogonalita]
$\hat{q}_\alpha\times\hat{q}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{q}_\gamma$ [Pravotočivost]

---

$(\rho, \varphi, z), (\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ [Cylindrické souřadnice, repér]
$(r, \theta, \varphi), (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ [Sférické souřadnice, repér]
$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ [Element povrchu jednotkové koule]

| | *Kartézský* | | | *Cylindrický* | | *Sférický* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i(q)$ | | | | $x = \rho\cos\varphi$ | $y = \rho\sin\varphi$ | $\rho = r\sin\theta$ | $z = r\cos\theta$ |
| $\vec{r}$ | $x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ | | | $\rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ | | $r\hat{r}$ | |
| $d\vec{r}$ | $\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$ | | | $\hat{\rho}d\rho + \rho\hat{\varphi}d\varphi + \hat{z}dz$ | | $\hat{r}dr + r\hat{\theta}d\theta + r\sin\theta\hat{r}d\varphi$ | |
| $ds^2$ | $dx^2 + dy^2 + dz^2$ | | | $d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$ | | $dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$ | |
| $dV$ | $dxdydz$ | | | $\rho\, d\rho d\varphi dz$ | | $r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$ | |
| $\nabla$ | $\hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z$ | | | $\hat{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\hat{\varphi}\partial_\varphi + \hat{z}\partial_z$ | | $\hat{r}\partial_r + \frac{1}{r}\hat{\theta}\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{r}\partial_\varphi$ | |
| $\phi$ | $x$ | $y$ | $z$ | $\rho$ | $\varphi$ | $r$ | $\theta$ |
| $\nabla$ | 0 | 0 | 0 | $\hat{\rho}$ | $\frac{1}{\rho}\hat{\varphi}$ | $\hat{r}$ | $\frac{1}{r}\hat{\theta}$ |
| $\Delta$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{\rho}$ | 0 | $\frac{2}{r}$ | $\frac{1}{r^2}\operatorname{cotg}\theta$ |
| $\hat{q}$ | $\hat{x}$ | $\hat{y}$ | $\hat{z}$ | $\hat{\rho}$ | $\hat{\varphi}$ | $\hat{r}$ | $\hat{\theta}$ |
| $d$ | 0 | 0 | 0 | $\hat{\varphi}d\varphi$ | $-\hat{\rho}d\varphi$ | $\hat{\theta}d\theta + \sin\theta\hat{\varphi}d\varphi$ | $-\hat{r}d\theta + \cos\theta\hat{\varphi}d\varphi$ |
| $\nabla$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{\rho}\hat{\varphi}\hat{\varphi}$ | $-\frac{1}{\rho}\hat{\varphi}\hat{\rho}$ | $\frac{1}{r}(\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\varphi}\hat{\varphi})$ | $\frac{1}{r}(-\hat{\theta}\hat{r} + \operatorname{cotg}\theta\,\hat{\varphi}\hat{\varphi})$ |
| $\nabla\cdot$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{\rho}$ | 0 | $\frac{2}{r}$ | $\frac{1}{r}\cot\theta$ |
| $\nabla\times$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{\rho}\hat{z}$ | 0 | $\frac{1}{r}\hat{\varphi}$ |
| $\Delta$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{\rho^2}\hat{\rho}$ | $-\frac{1}{\rho^2}\hat{\varphi}$ | $-\frac{2}{r^2}\hat{r}$ | $-\frac{1}{r^2}(2\operatorname{cotg}\theta\hat{r} + \csc^2\theta\hat{\theta})$ |

## Integrace ve vícedimensionálním prostoru




$B_n(r) = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leqslant r\}$ [n-koule o poloměru r]
$d\Omega_n$ [Element povrchu jednotkové n-koule]
$\omega_n = \int_{\partial B_n(1)} d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ [Povrch jednotkové n-koule]
$S_n(r) = \omega_n r^{n-1}$ [Povrch n-koule o poloměru r]
$V_n(r) = \frac{\omega_n}{n} r^n$ [Objem n-koule o poloměru r]
$d\vec{x} = dr\, dS_n = r^{n-1} dr\, d\Omega_n$ [Obecný objemový element]
$d\vec{x} = \omega_n r^{n-1}\, dr$ [Radiální symetrie]
$d\vec{x} = \omega_{n-1} r^{n-1} \sin^{n-2}\theta\, dr\, d\theta$ [Axiální symetrie]

## Rozšíření funkcí do komplexního oboru

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C},\quad i = \sqrt{-1},\quad \alpha \in \mathbb{C},\quad x, y \in \mathbb{R},\quad r > 0,\ \varphi \in \begin{cases} [0, 2\pi) & \text{[Hlavní větev]} \\ (-\pi, \pi] & \text{[Vedlejší větev]} \end{cases}$$

$\operatorname{Re} z = x$ $\quad |z| = r$ $\quad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ $\quad \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ $\quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\operatorname{Im} z = y$ $\quad \arg z = \varphi$ $\quad \ln z = \ln r + i\varphi$ $\quad z^\alpha = r^\alpha e^{i\varphi\alpha}$ $\quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\sin(iz) = i\sinh z$ $\quad \cos(iz) = i\cosh z$ $\quad \sinh(iz) = i\sin z$ $\quad \cosh(iz) = i\cos z$ [Osbornova pravidla]

## Komplexní analýza

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\quad f(z) = w,\quad z = x + iy = re^{i\varphi}\quad w = u + iv = \eta e^{i\psi},\qquad f'(z) = \lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},\qquad F'(z) = f(z)$$

$\begin{bmatrix} u_{,x} & = & v_{,y} \\ u_{,y} & = & -v_{,x} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} ru_{,r} & = & v_{,\varphi} \\ u_{,\varphi} & = & -rv_{,r} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \eta_{,x} & = & \eta\psi_{,y} \\ \eta_{,y} & = & -\eta\psi_{,x} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} r\eta_{,r} & = & \eta\psi_{,\varphi} \\ \eta_{,\varphi} & = & -r\eta\psi_{,r} \end{bmatrix}$ [Cauchy–Riemannovy podmínky]

$\exists f'(z)$ na $\mathcal{U}_\varepsilon(z), \forall z \in M$ [Holomorfie $f$ na $M \subset \mathbb{C}$]

$C : z = z(t), t \in (a, b)$ [Kontur, komplexní křivka]

$\int_C f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ [Komplexní integrál]

$|\int_C f(z)\ dz| \leqslant \underbrace{\int_C |f(z)||dz|}_{\text{Jordanův}} \leqslant \underbrace{\sup_{z\in C} f(z)}_{M} \underbrace{\int_C |dz|}_{L}$ [Odhady]

$f$ holomorf. na $C \Rightarrow \int_C f(z)\, dz = F(z(t))\big|_a^b$ [Primitivní fce]

$f$ hol. na $\operatorname{Int} C \Rightarrow \oint_C f(z)\, dz = 0$ [Cauchyho věta]

$B_{u,v}(\sigma) = \{z \in \mathbb{C} \mid u < |z - \sigma| < v\}$ [Mezikruží]

$f$ hol. na $B_{u,v}(\sigma) \Rightarrow f(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l(z - \sigma)^l$ [Laurentova řada]

$a_l = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)dz}{(z-\sigma)^{l+1}}, r \in (u, v)$ [Koeficienty L.Ř.]

$$u = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_l = 0, l < 0, & \text{[}\sigma\text{ odstranitelná singularita]} \\ a_l = 0, l < n, & \text{[}\sigma\text{ pól } n\text{-tého řádu]} \\ \text{jinak}, & \text{[}\sigma\text{ esenciální singularita]} \end{cases}$$

$\operatorname{Res}_\sigma f(z) = a_{-1}, \operatorname{Res}_\infty f(z) = -a_{-1}$ [Residuum]

$\operatorname{Res}_\sigma f(z) = \lim_{z\to\sigma} \frac{1}{(n-1)!}[(z - \sigma)^n f(z)]^{(n)}$ [Residuum $n$-pólu]

$f$ hol. na $M/S, S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ [Meromorfie $f$ na $M \subset \mathbb{C}$]

$f$ mer. na $\begin{Bmatrix} \operatorname{Int} C \\ \operatorname{Ext} C \end{Bmatrix} \Rightarrow \oint_C f dz = \begin{Bmatrix} 2\pi i \sum_{\sigma\in \operatorname{Int} C} \operatorname{Res}_\sigma f \\ -2\pi i \sum_{\sigma\in \operatorname{Ext} C \cup \infty} \operatorname{Res}_\sigma f \end{Bmatrix}$ [Residuová v.]

## Chybová a komplementární chybová funkce

$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\ dy$ [Definice chybov. funkce]

$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ [Definice kompl. chybov. funkce]

## Gama funkce

$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0$ [Definice]

$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ [Gaussova limita]

$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^z}{1+z/n}$ [Eulerův součin]

$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1+z/n}$ [Weierstrassův součin]

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ [Rekurence]

$\Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},\ n \in \mathbb{N}$ [Speciální hodnoty]

$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi},\ \Gamma(-n + \frac{1}{2}) = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi},\ n \in \mathbb{N}$

$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{z}{\sin\pi z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ [Reflekční formule]

$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})$ [Duplikační formule]

$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(z + \frac{k}{n}) = n^{\frac{1}{2} - nz}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(nz)$ [Multiplikační formule]

$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = (-1)^n/n!, \quad n \in \mathbb{N}_0$ [Póly]

$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}}z^z e^{-z},\ |z| \gg 1$ [Asymptotika v nekonečnu]

$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\exp\left(-\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)z^k\right)$ [Rozvoj v počátku]

## Beta funkce

$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{1-y}\ dt$ [Definice]

$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ [Vyjádření v Gama funkcích]

$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha\theta\cos^\beta\theta\ d\theta = \frac{1}{2}B(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2})$ [Goniom. integrál]

$B(x, y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\ dt$ [Valeanův integrál]

## Zeta funkce

$$\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ [Definice]

$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ [Riemannova symetrizace]

$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbf{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ [Eulerův součin]

$\xi(s) = \xi(1-s)$ [Reflekční formule]

$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!},\ \zeta(-n) = \frac{B_{n+1}}{n+1}$ [Spec. hodnoty]

$\zeta(s) = \frac{1}{1-s} + \gamma + \cdots$ [Asymptotika v singularitě $s = 1$]

## Digamma funkce

$$n, p, q \in \mathbb{N}_0, \qquad 0 < p < q$$

$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$ [Definice]

$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)$ [Rekurence]

$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+z}$ [Vyjádření pomocí řady]

$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt$ [Vyjádření pomocí integrálu]

$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi\cot(\pi z)$ [Reflekční formule]

$\psi(n) = -\gamma + H_{n-1},$ [Speciální hodnoty]

$\psi(n+\frac{1}{2}) = -\gamma + 2H_{2n} - H_n - 2\ln 2$ [Gauss ↓]

$\psi(\frac{p}{q}) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi p}{q} - \ln q + \sum\limits_{n=1}^{q-1}\cos\frac{2\pi n p}{q}\ln(2\sin\frac{\pi n}{q})$

$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\zeta(k)z^{k-1}$ [Rozvoj v počátku]

$\psi(z) \approx \ln z - \frac{1}{2z} - \sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2kz^{2k}}$ [Asymptotika v nekonečnu]

## Polygamma funkce

$n, m \in \mathbb{N}_0$

$\psi_m(z) = \psi^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m}\psi(z)$ [Definice]

$\psi_m(z+1) = (-1)^m\frac{m!}{z^{m+1}} + \psi_m(z)$ [Rekurence]

$\psi_m(z) = (-1)^{m+1}m!\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^{m+1}}$ [Vyjádření řadou]

$\psi_m(z) = \psi_m(1) + \int_0^1 \ln^m t\,\frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt$ [Vyjádření integrálem]

$(-1)^m\psi_m(1-z) - \psi_m(z) = \pi(\cot(\pi z))^{(m)}$ [Reflekční f.]

$\psi_m(n) = (-1)^m m!(H_{n-1}^{(m+1)} - \zeta(m+1))$ [Spec. hodnoty]

$\psi_m(\frac{1}{2}) = (-1)^{m+1}m!\zeta(m+1)(2^{m+1}-1)$

$\psi_m(n+\frac{1}{2}) = \psi_m(\frac{1}{2}) + (-1)^m m!(2^{m+1}H_{2n}^{(m+1)} - H_n^{(m+1)})$

## Polylogaritmus

$n \in \mathbb{N}_0$

$\mathrm{Li}_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^s}$ [Definice]

$\mathrm{Li}_0(x) = \frac{x}{1-x}, \quad \mathrm{Li}_1(x) = -\ln(1-x), \quad \mathrm{Li}_2(x) = \int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

$\mathrm{Li}_s(x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}\,dt}{e^t/x-1}$ [Vyjádření integrálem]

$(\mathrm{Li}_{s+1}(x))' = \frac{1}{x}\mathrm{Li}_s(x)$ [Derivace]

$\mathrm{Li}_s(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n\frac{x}{1-x}$ [Rekurze pro záporné indexy]

$\mathrm{Li}_s(x) + \mathrm{Li}_s(-x) = 2^{1-s}\mathrm{Li}_s(x^2)$ [Symetrizace]

$\mathrm{Li}_s(x) \approx \frac{\Gamma(1-s)}{(1-x)^{1-s}}, \quad s < 1$ [Asymptotika v $x = 1$]

$\mathrm{Li}_s(0) = 0, \quad \mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s), \quad \mathrm{Li}_s(-1) = (2^{1-s}-1)\zeta(s)$

*Dilogaritmus:*

$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x\ln(1-x)$ [Reflekční formule]

$\mathrm{Li}_2(1-x) + \mathrm{Li}_2(1-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{2}\ln^2 x$ [Landenova formule]

$\mathrm{Li}_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \mathrm{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \mathrm{Li}_2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2$

*Trilogaritmus:*

$\mathrm{Li}_3(-1) = -\frac{3}{4}\zeta(3),\ \mathrm{Li}_3(1) = \zeta(3),\ \mathrm{Li}_3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}\ln^3 2 - \frac{\pi^2}{12}\ln 2 + \frac{7}{8}\zeta(3)$

## Besselovy funkce

*I. druhu:*

$J_\nu(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}, \quad x, \nu \in \mathbb{R} > 0$ [Definice]

$x^2J_\nu'' + xJ_\nu' + (x^2-\nu^2)J_\nu = 0$ [ODR]

$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta - ix\sin\theta}\,d\theta, n \in \mathbb{N}_0$ [Integrální reprez.]

$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ [Spec. hodnoty]

$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \quad |x| \gg 1$ [Asymptotika]

*II. druhu*

$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\pi x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi x)}$ [Definice, stejná ODR!]

$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \quad |x| \gg 1$ [Asymptotika]

## Modifikované Besselovy funkce

*I. druhu:*

$I_\nu(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}, \quad x, \nu \in \mathbb{R} > 0$ [Definice]

$x^2I_\nu'' - xI_\nu' - (x^2+\nu^2)I_\nu = 0$ [ODR]

$I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)\,d\theta, n \in \mathbb{N}_0$ [Integr. reprez.]

$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x \approx I_\nu(x), |x| \gg 1$ [Spec. h., asymptot.]

*II. druhu*

$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\pi x)}$ [Definice, stejná ODR!]

$K_\nu(x) = \int_0^{\infty}e^{-x\cosh\theta}\cosh(\nu\theta)\,d\theta, \nu \in \mathbb{R}$ [Integr. reprez.]

$K_0(x) = \int_0^{\infty}\frac{\cos(tx)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ [Integr. reprez. $K_0$]

$K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \approx K_\nu(x), x \gg 1$ [Spec. h., asymptotika]

## Eliptické integrály prvního a druhého druhu

$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ [Eli. int. 1. druhu]

$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$ [Eli. int. 2. druhu]

$K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=(1+k)\,K(k)$ [Landenova transf.]

$E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{1}{1+k}\big(2E(k)+(1-k^2)K(k)\big)$ [Landenova transf.']

$\frac{dK}{dk}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{K}{k},\qquad \frac{dE}{dk}=\frac{E}{k}-\frac{K}{k}$ [Derivace]

$\int_0^{\pi}\frac{dk}{\sqrt{1-2k\cos\theta+k^2}}=2\,K(k)$

$\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\;dk}{\sqrt{1-2k\cos\theta+k^2}}=\frac{2}{k}\,(K(k)-E(k))$

$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta\;dk}{\sqrt{1-2k\cos\theta+k^2}}=\frac{2}{3k^2}\,\big((1+k^2)\,E(k)-(1-k^2)\,K(k)\big)$

$\int_0^{\pi}\sqrt{1-2k\cos\theta+k^2}\;dk=4\,E(k)-2(1-k^2)\,K(k)$

## Legenderovy polynomy

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(\cos\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\alpha+t^2}}\qquad \sum_{l=0}^{\infty}t^lP_l(\cos\alpha)P_l(\cos\beta)=\frac{\frac{2}{\pi}K\left(\frac{\sqrt{-4t\sin\alpha\sin\beta}}{\sqrt{1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2}}\right)}{\sqrt{1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2}}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\alpha)P_l(\cos\beta)P_l(\cos\gamma)=\frac{2}{\pi\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}}$$

## Distribuce

$$\delta(f(x))=\sum_j\frac{1}{|f'(x_j)|}\delta(x-x_j),\quad f(x_j)=0$$

$T_n\to^* T\Leftrightarrow\forall\varphi\in\mathcal{S}:\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle$ [Slabá limita]

XXX $\dfrac{1}{(k\pm i0)^{n+1}}=T_{f.v.\frac{1}{k^{n+1}}}\mp\dfrac{\pi i}{n!}(-1)^n\delta^{(n)}(k)$

## Fourierova transformace

$$\alpha>0,\quad x\in\mathbb{R},k\in\mathbb{R},\quad \vec{x}\in\mathbb{R}^n,\vec{k}\in\mathbb{R}^n,r=\|\vec{x}\|,\kappa=\|\vec{k}\|,\quad r^2=\rho^2+z^2$$

$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\,e^{ikx}\,dk\Longleftrightarrow\hat{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-ikx}\,dx$ | $f(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,dk\Longleftrightarrow\hat{f}(\vec{k})=\int_{-\infty}^{\infty}f(\vec{x})\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,d\vec{x}$

$\hat{f}(\vec{k})=\omega_{n-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}g(r)\,e^{-i\kappa r\cos\theta}\,r^{n-1}\sin^{n-2}\theta\,d\theta\,dr,\qquad f(\vec{x})=g(r)$ [Radiální funkce sféricky]

$\hat{f}(\vec{k})=\omega_{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}g(\sqrt{\rho^2+z^2})\,e^{-i\kappa z}\,\rho^{n-2}\,d\rho\,dz,\qquad f(\vec{x})=g(\sqrt{\rho^2+z^2})$ [Radiální funkce cylindricky]

$\hat{f}(\vec{k})=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\kappa^{\frac{n}{2}-1}}\int_0^{\infty}r^{\frac{n}{2}}g(r)\,J_{\frac{n}{2}-1}(\kappa r)\,dr,\qquad f(\vec{x})=g(r)$ [Radiální funkce explicitně pomocí Besselových funkcí]

$\hat{f}(\vec{k})=\frac{4\pi}{\kappa}\int_0^{\infty}r\,g(r)\sin(\kappa r)\,dr,\qquad f(\vec{x})=g(r),\quad\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ [Radiální funkce třírozměrná]

## Radonova transformace

$$\hat{n}_\vartheta=(\cos\vartheta,\sin\vartheta),\quad \hat{t}_\vartheta=(-\sin\vartheta,\cos\vartheta),\qquad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \vartheta\in(0,\pi),\quad s\in(-\infty,\infty)$$

$\mathcal{R}_\vartheta[f](s)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(s\hat{n}_\vartheta+u\hat{t}_\vartheta)\,du$ [Definice RT] $\Longleftrightarrow$ $f(\vec{x})=\dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\int_0^{\pi}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}_\vartheta[f](s)}{\vec{x}\cdot\hat{n}_\vartheta-s}\,ds\,d\vartheta$ [Inverzní RT]

## Tabulka Fourierových transformací (1D)

| $f(x)$ | $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\, dx$ |
|---|---|
| $e^{-\alpha x^2}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$ |
| $\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)$ | $\frac{2\sin(\alpha k)}{k}$ |
| $\frac{\sin(\alpha x)}{x}$ | $\pi\chi_{[-\alpha,\alpha]}(k)$ |
| $\frac{1}{\alpha^2+x^2}$ | $\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha\lvert k\rvert}$ |
| $\frac{x}{\alpha^2+x^2}$ | $-i\pi e^{-\alpha\lvert k\rvert}\operatorname{sgn} k$ |
| $e^{-\alpha\lvert x\rvert}$ | $\frac{2\alpha}{\alpha^2+k^2}$ |
| $\frac{\chi_{[-1,1]}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\pi J_0(k)$ |
| $J_n(x)$ | $(-i)^n\frac{2T_n(k)}{\sqrt{1-k^2}}\chi_{[-1,1]}(k)$ |
| $\delta^{(n)}(x)$ | $i^n k^n$ |
| $x^n$ | $2\pi i^n\delta^{(n)}(k)$ |
| $x^n\operatorname{sgn} x$ | $2(-i)^{n+1}n!T_{f.v.\frac{1}{k^{n+1}}}$ |
| $\theta(x)$ | $-iT_{p.v.\frac{1}{k}} + \pi\delta(k)$ |
| $x_\pm^n$ | $\frac{n!(\mp i)^{n+1}}{(k\mp i0)^{n+1}}$ |
| $T_{f.v.\frac{1}{x^{n+1}}}$ | $\pi\frac{(-i)^{n+1}}{n!}k^n\operatorname{sgn} k$ |
| $\frac{1}{(x\pm i0)^{n+1}}$ | $2\pi\frac{(\mp i)^{n+1}}{n!}k_\pm^n$ |
| $x_\pm^\lambda$ | $e^{\mp\frac{\pi}{2}i(\lambda+1)}\Gamma(\lambda+1)(k\pm i0)^{-\lambda-1}$ |
| $\lvert x\rvert^\lambda$ | $\frac{\pi\lvert k\rvert^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)\cos\frac{\pi\lambda}{2}}$ |
| $\lvert x\rvert^\lambda\operatorname{sgn} x$ | $\frac{\pi i\lvert k\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn} k}{\Gamma(-\lambda)\sin\frac{\pi\lambda}{2}}$ |
| $(x\pm i0)^\lambda$ | $e^{\pm\frac{\pi\lambda i}{2}}\frac{2\pi k_\pm^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}$ |

## Tabulka FT (multidimensionální)

| $f(\vec{x})$ | $\hat{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}$ |
|---|---|
| $e^{-\alpha r^2}$ | $(\pi/\alpha)^{n/2}\,e^{-\frac{\kappa^2}{4\alpha}}$ |
| $\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ | $\frac{4\pi}{\alpha^2+\kappa^2}$ [$n=3$] |
| $\frac{1}{\alpha^2+r^2}$ | $\frac{2\pi^2}{\kappa}e^{-\kappa\alpha}$ [$n=3$] |
| $r^\lambda$ | $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}2^{\lambda+n}\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\kappa^{\lambda+n}\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$ [Riesz] |
| $e^{-\alpha r}$ | $\frac{2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\alpha\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(\alpha^2+\kappa^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ |
| $\Delta^l\delta(\vec{x})$ | $(-1)^l\kappa^{2j}$ |
| $r^{2j}$ | $(2\pi)^n(-1)^j\Delta^j\delta(\vec{k})$ |

## Ortogonální systémy polynomů

$$\phi_l(x) = k_l x^l + \tilde{k}_l x^{l-1} + \cdots$$

$$\langle\phi_l,\phi_{l'}\rangle_\rho = \int_a^b\phi_l(x)\bar{\phi}_{l'}(x)\rho(x)dx = \lVert\phi_l\rVert_\rho^2\delta_{ll'} \text{ [OG]}$$

| *Název* | $\phi_l$ | $(a,b)$ | $\rho(x)$ | Rodrigues: $\phi_l =$ | ODR | $\lVert\phi_l\rVert_\rho^2$ | $k_l$ | $\tilde{k}_l/k_l$ | $G(x,t)=\sum_{l=0}^\infty t^l\phi_l$ [$/l!$] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laguerre | $L_{ls}$ | $(0,\infty)$ | $x^s e^{-x}$ | $\frac{1}{l!}x^{-s}e^x(x^{s+l}e^{-x})^{(l)}$ | $(x^{s+1}e^{-x}L_{ls}')' = -lx^{s+1}e^{-x}L_{ls}$ | $\frac{(l+s)!}{l!}$ | $\frac{(-1)^l}{l!}$ | $-l(l+s)$ | $\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)/(1-t)^{s+1}$ |
| Hermite | $H_l$ | $(-\infty,\infty)$ | $e^{-x^2}$ | $(-1)^l e^{x^2}(e^{-x^2})^{(l)}$ | $(e^{-x^2}H_l')' = -2le^{-x^2}H_l$ | $2^l l!\sqrt{\pi}$ | $2^l$ | $0$ | $\exp(2xt-t^2)$ [$/l!$] |
| Čebyšev I | $T_l$ | $(-1,1)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\cos(l\arccos x)$ | $(\sqrt{1-x^2}\,T_l')' = -l^2T_l/\sqrt{1-x^2}$ | $\begin{cases}\pi, & l=0\\ \pi/2, & l>0\end{cases}$ | $\begin{cases}1, & l=0\\ 2^{l-1}, & l>0\end{cases}$ | $0$ | $\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}$ |
| Čebyšev II | $U_l$ | $(-1,1)$ | $\sqrt{1-x^2}$ | $\frac{\sin((l+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\left[(1-x^2)^{3/2}U_l'\right]' = -l(l+2)\sqrt{1-x^2}U_l$ | $\pi/2$ | $2^l$ | $0$ | $\frac{1}{1-2xt+t^2}$ |
| Legendre | $P_l$ | $(-1,1)$ | $1$ | $\frac{(-1)^l}{2^l l!}\left[(1-x^2)^l\right]^{(l)}$ | $\left[(1-x^2)P_l'\right]' = -l(l+1)P_l$ | $\frac{2}{2l+1}$ | $\frac{(2l)!}{2^l l!^2}$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ |
| Asociované Legendre | $P_{lm}$ | $(-1,1)$ | $1$ | $\sqrt{1-x^2}^m P_l^{(m)}$ | $\left[(1-x^2)P_{lm}'\right]' = \left(\frac{m^2}{1-x^2}-l(l+1)\right)P_{lm}$ | $\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}$ | $Y_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\theta)e^{im\varphi}$ | | |

## Souřadné systémy

| | | *Kartézský* | *Cylindrický* | *Sférický* |
|---|---|---|---|---|
| Transformační vztahy | | | $[x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z]$ | $[x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta)$ |
| Poziční vektor | $\vec{r}$ | $x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ | $\rho\hat{\rho}+z\hat{z}$ | $r\hat{r}$ |
| Dráhový element | $d\vec{r}$ | $\hat{x}\,dx+\hat{y}\,dy+\hat{z}\,dz$ | $\hat{\rho}\,d\rho+\rho\hat{\varphi}\,d\varphi+\hat{z}\,dz$ | $\hat{r}\,dr+r\hat{\theta}\,d\theta+r\sin\theta\hat{\varphi}\,d\varphi$ |
| Orientovaný plošný element | $d\vec{S}$ | $\hat{x}\,dydz+\hat{y}\,dzdx+\hat{z}\,dxdy$ | $\rho\hat{\rho}\,d\varphi dz+\hat{\varphi}\,dzd\rho+\rho\hat{z}\,d\rho d\varphi$ | $r^2\sin\theta\hat{r}\,d\theta d\varphi+r\hat{\theta}\sin\theta\,d\varphi dr+r\hat{\varphi}\,drd\theta$ |
| Objemový element | $dV$ | $dxdydz$ | $\rho\,d\rho d\varphi dz$ | $r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$ |